

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ VIII.

СОДЕРЖАНІЕ:

ОДЕССА.
ТИПОГРАФІЯ А. ШУЛЬЦЕ, ЛАНЖЕРОНОВСКАЯ УЛ. ДОМЪ КАРУЗО, № 36.
1888.

... ля Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей въ Одессѣ:

Томъ I и II. Распроданы.

Томъ III. Вып. I-й и 2-й. (См. XII т. «Записокъ» и раньше).

Томъ IV. Вып. I-й и 2-й (См. XIII т. «Записокъ» и раньше).

Томъ V. Вып. 1-й. *Ил. Мечниковъ.* О пищеварительныхъ органахъ прѣсноводныхъ турбеллярій. *Его же.* Изслѣдованіе о развитіи планарій *И. Синцовъ.* Описаніе нѣкоторыхъ видовъ мезозойскихъ окаменѣлостей изъ Симбирской и Саратовской губ. *Его же.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. *Его же.* Замѣтка по поводу статьи проф. Траутшольда: «Ueber Kreidefossilien Russlands». *Л. Ришави.* Къ вопросу о дыханіи растеній. *В. Репяховъ.* Взглядъ на современное состояніе вопроса о зародышевыхъ пластахъ. 1877 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кислоты. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произведенной лѣтомъ 1877 г. въ Подольск. губ. *Л. Ришави.* Отчетъ объ экскурсіи въ Севастопольской бухтѣ въ 1878 г. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произвед. лѣтомъ 1878 г. по прибрежной полосѣ Абхазіи и Черноморскаго округа. 1879 г. Цѣна 75 коп.

Томъ VI. Вып. I-й. *И. Синцовъ.* О мѣловыхъ губкахъ Сарат. губ. (съ 6 табл.). *О. Мечникова.* О тазовой и плечевой дугѣ хрящевыхъ рыбъ. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кисл. *В. Шманкевичъ.* Объ отношеніи нѣкоторыхъ безцвѣтныхъ Flagellata къ водорослямъ и грибамъ (съ табл. рис.) 1879 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *П. Забаринскій.* Дополненіе къ монографіи N. Kleinenberg'а «Hydra» (съ 2 табл.). *Ил. Мечниковъ.* Матеріалы къ ученію о вредныхъ насѣкомыхъ юга Россіи (личинка Anisoplia). *В. Репяховъ.* Къ морфологіи мшанокъ (съ 6 табл.). *С. Танатаръ.* О строеніи фумаровой и малеиновой кисл 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Приложен. къ VI т. Записокъ: *Flora chersonensis E. Lindemann*'а. 2 т. Цѣна 1 и 2 т. 4 р.

Томъ VII. Вып. I-й. *Л. Ришави.* Альгологическія изслѣдованія (съ табл.). *П. Спиро.* Матеріалы для изученія образованія желчи. *П. Меликовъ.* О производныхъ акриловой кислоты. *И. Синцовъ.* Описаніе нѣкоторыхъ видовъ мезозойскихъ окаменѣлостей изъ Симбирской и Саратовской губерн. (съ 2 табл.). *Его-же.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи (съ табл.). 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2 й. *Л. Ришави.* Матеріалы для лихенологической флоры Крыма. *П. Бучинскій.* Къ вопросу о развитіи дождеваго червяка (съ 3 таблицами). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо-восточной части Херсонск. губ. (съ табл.) 1881 г. Цѣна 1 р.

Томъ VIII. Вып I-й. *Д. Кожевниковъ.* Объ анатомическомъ строеніи лепестковыхъ цвѣточныхъ покрововъ (съ 6 табл.). *Р. Прендель.* Изслѣдованіе кристаллическихъ породъ, развитыхъ въ бассейнѣ р. Базавлука и въ верховьяхъ Саксагани (съ картой и 4 табл.). *А. Ковалевскій.* Къ исторіи развитія хитоновъ. *С. Танатаръ.* О хлорсубститутахъ фумаровой и малеиновой кисл. *И. Деппъ.* Замѣтки любителя о жизни Макроподъ. *А. Геричъ.* Объ электрическихъ явленіяхъ, наблюдаемыхъ при диффузіи нѣкоторыхъ жидкостей. *И. Красильщикъ.* Къ исторіи развитія и систематикѣ р. Polytoma Ehr. (съ 3 табл.). *В. Репяховъ.* О личинкѣ Polygordius flavocapitatus (съ табл.). 1882 г. Цѣна 3 руб.

Вып. 2-й. *Ф. Каменскій.* Матеріалы для морфологіи и біологіи Monotropa Hypopitis L. и нѣкоторыхъ другихъ сапрофитовъ (съ 3-мя таблиц.). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо-восточной части Херсонской губ. *Н. Головкинскій.* Результаты геологическихъ изысканій и развѣдокъ на ископаемый уголь въ окрестностяхъ Балаклавы (съ 5 рис. въ текстѣ, картой и 2 табл.). *П. Спиро.* О нѣкоторыхъ явленіяхъ такъ назыв. животнаго магнитизма (гипнотизма) съ 3 табл. 1883 г. Цѣна 2 руб.

Томъ IX. Вып. I-й. *И. Синцовъ.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. Ст. 5-я (съ табл.). *И. Миклашевскій.* Матеріалы для геологіи Глуховскаго уѣзда. Черниговск. губ. (съ табл.). *Н. Андрусовъ.* Замѣтка о геологическихъ изслѣдованіяхъ въ окрестностяхъ г. Керчи. *А. Клоссовскій.* Инструкція для наблюденія осадковъ, грозъ и града. *С. Переяславцева.* О развитіи коловратокъ (съ табл.). 1884 г. Цѣна 1 р.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ VIII.

ОДЕССА.
ТИПОГРАФІЯ А. ШУЛЬЦЕ ЛАНЖЕРОНОВСКАЯ УЛ. ДОМЪ КАРУЗО, № 36.
1888.



Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.
Секретарь Общества *П. Бучинскій.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЭТЮДЫ

ПО

КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ

СТРОЕНІЯ ТѢЛЪ.

Б. Станкевича.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлежащая работа распадается на двѣ части: первая часть относится къ динамической теоріи дѣйствительныхъ газовъ, вторая—къ теоріи жидкаго состоянія вещества.

Въ первой части я занимаюсь исправленіемъ Фанъ-деръ-Ваальсовой теоріи дѣйствительныхъ газовъ, теоріи, которую можно назвать скорѣе рядомъ блестящихъ догадокъ, чѣмъ строго обставленной въ отношеніи основныхъ принциповъ и анализа системой. Мнѣ не удалось исправить эту теорію вполнѣ; я могу лишь указать на слѣдующія улучшенія, внесенныя мною въ эту теорію въ отдѣльныхъ ея частяхъ.

Во первыхъ, я устраняю недостатокъ анализа Фанъ-деръ-Ваальса, состоящій въ томъ, что онъ, примѣняя уравненіе Клаузіуса къ системѣ движущихся молекулъ, не дѣлаетъ различія между силами непрерывно дѣйствующими и силами мгновенными; недостатокъ этотъ, хотя и не отзывается на окончательныхъ результатахъ теоріи, все же подрываетъ ея строгость.

Далѣе, я устраняю произвольную гипотезу Фанъ-деръ-Ваальса, по которой дѣйствіе притягательныхъ между-молекулярныхъ силъ проявляется исключительно въ весьма тонкомъ поверхностномъ слоѣ; вмѣсто соображеній, заимство-

ванныхъ изъ Лапласовой теоріи капилярности, теоріи, основанной на представленіи о непрерывности вещества, я пользуюсь при вычисленіи виріала силъ сцѣпленія лишь основными представленіями кинетической теоріи строенія тѣлъ; для нахожденія выраженія этого виріала я дѣлаю гипотезу, что притягательная сила, дѣйствующая между молекулами, выражается формулой

$$R = \frac{hm^2}{r^n}.$$

Правда, я вычисляю виріалъ силъ сцѣпленія, равно какъ и виріалъ упругихъ силъ, развивающихся при соудареніи молекулъ, лишь съ грубымъ приближеніемъ; но по крайней мѣрѣ я указываю въ § 7 первой главы на *степень* этого приближенія, что рѣшительно недоступно для метода Фанъ-деръ-Ваальса.

Въ выраженіе виріала силъ упругости, равивающихся при соудареніи молекулъ, я ввожу поправочный членъ, отсутствующій въ формулѣ Фанъ-деръ-Ваальса-Лоренца (см. § 4 первой главы); совпаденіе теоретическаго уравненія изотермической кривой съ эмпирическимъ уравненіемъ Реньо имѣетъ мѣсто единственно благодаря этому поправочному члену; Фанъ-деръ-Ваальсъ-же достигаетъ такого совпаденія посредствомъ непозволительной уловки, о которой упомянуто въ концѣ § 1 первой главы.

Согласіе моей заключительной формулы съ закономъ Авогадро значительно лучше, чѣмъ согласіе съ нимъ формулы Фанъ-деръ-Ваальса-Лоренца (см, § 8 первой главы).

Соображенія § 10 первой главы дѣлаютъ весьма вѣроятной догадку, что число n въ формулѣ

$$R = \frac{hm^2}{rn}$$

должно быть близко къ 5.

Вторая часть предлежащихъ этюдовъ посвящена нѣкоторымъ соображеніямъ о строеніи жидкостей съ точки зрѣнія кинетической гипотезы. Я пытаюсь здѣсь приложить къ жидкостямъ уравненіе виріала и опредѣлить *порядокъ* разныхъ гипотетическихъ величинъ, характеризующихъ ихъ строеніе. Результаты, полученные въ этомъ направленіи, подвергаю я неоднократному контролю чрезъ сравненіе основанныхъ на нихъ предвычисленій съ данными опыта.

Да не подумаетъ благосклонный читатель, что я приписываю себѣ построеніе полной теоріи жидкаго состоянія вещества: я смотрю на мою попытку не иначе, какъ на предварительную рекогносцировку въ эту трудную и непочатую область, и почту себя вполнѣ удовлетвореннымъ, если этой скромной попыткѣ суждено будетъ играть въ теоріи жидкостей роль такой-же первой ступени, каковой являются схематическія соображенія Бернулли, Крэнига и отчасти Клаузіуса въ современной теоріи газовъ.

Б. Станкевичъ.

слѣдне́му, проведенной внутрь разсматриваемаго объема. Объемъ призмы, описанной элементомъ dS при его перемѣщеніи, выразится черезъ

$$dl \,.\, dS \,.\, \cos\vartheta.$$

Итакъ, если мы обозначимъ черезъ Ω объемъ всего разсматриваемаго пространства, для искомой вѣроятности получится выраженіе

$$\frac{\cos\vartheta \,.\, dl \,.\, dS}{\Omega} \qquad (6)$$

Положимъ, что всевозможныя направленія абсолютнаго движенія элемента dS одинаково вѣроятны; тогда всевозможныя направленія движенія нашей точки *относительно* элемента dS будутъ также равновѣроятны, а потому вѣроятность того, чтобы величина угла ϑ заключалась между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, выразится черезъ

$$\frac{2\pi \,.\, \sin\vartheta \,.\, d\vartheta}{4\pi} = \tfrac{1}{2} \sin\vartheta \,.\, d\vartheta. \qquad (7)$$

Перемножимъ выраженія (6) и (7) и произведеніе проинтегрируемъ по ϑ въ предѣлахъ o и $\frac{\pi}{2}$. Въ результатѣ получимъ

$$\frac{dl \,.\, dS}{4\Omega} \qquad (8)$$

—выраженіе вѣроятности, чтобы точка натолкнулась на элементъ dS при произвольномъ направленіи относительнаго движенія.

По отношенію къ каждому другому элементу поверхности получимъ выраженіе, подобное выраженію (8); итакъ вѣроятность того, чтобы наша точка наткнулась на поверхность S въ теченіе времени dt, представится такъ:

$$\frac{\Sigma(dl \,.\, dS)}{4\Omega}, \qquad (9)$$

гдѣ суммованіе распространяется на всѣ элементы поверхности S.

Положимъ теперь, что мы имѣемъ газъ, заключенный въ нѣкоторую оболочку. Разсмотримъ одну изъ молекулъ этого газа, скорость которой равна ω; назовемъ ее «молекулой *M*».

Вѣроятность того, чтобы молекула *M* наткнулась въ теченіе времени dt на оболочку, или на какую-нибудь другую молекулу, равна вѣроятности, чтобы центръ ея наткнулся на сферу дѣйствія какой-либо другой молекулы, или на поверхность, представляющую геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ на внутреннихъ нормаляхъ къ оболочкѣ на разстояніи $\frac{1}{2}\rho$ отъ послѣдней (назовемъ эту поверхность «поверхностью s», а сумму поверхностей сферъ дѣйствія всѣхъ молекулъ, за исключеніемъ *M*,—«поверхностью σ»). Итакъ вопросъ о нахожденіи этой вѣроятности сводится къ такой задачѣ: имѣемъ пространство, вполнѣ ограниченное поверхностью S, состоящей изъ двухъ частей: внѣшней s, которую будемъ считать неизмѣнной, и внутренней σ, постоянно измѣняющей свой видъ вслѣдствіе движенія молекулъ; очевидно, что объемъ Ω пространства, ограниченнаго поверхностями s и σ, остается, не смотря на постоянную деформацію поверхности σ, неизмѣннымъ; внутри пространства Ω находится точка (центръ молекулы *M*), движущаяся со скоростью ω; требуется найти вѣроятность, чтобы эта точка наткнулась на поверхность s или σ въ теченіе времени dt. Задача эта рѣшена уже нами. Намъ остается лишь примѣнить къ настоящему случаю формулу (9).

Обозначимъ черезъ v объемъ всего пространства, ограниченнаго оболочкой, а черезъ v' — объемъ пространства, ограниченнаго поверхностью s. Тогда

$$\Omega = v' - \tfrac{4}{3}\pi N v \rho^3;$$

кромѣ того, по малости ρ, можно положить

$$v' = v - \tfrac{1}{2}\rho s.$$

Далѣе

$$\Sigma(dl\,.\,dS) = \Sigma(dl\,.\,ds) + \Sigma(dl\,.\,d\sigma).$$

Такъ какъ элементы поверхности s неподвижны, то по отношенію къ нимъ $dl=\omega dt$, а потому

$$\Sigma(dl\,.\,ds)=\omega\,.\,s\,.\,dt.$$

Пусть будетъ ν число молекулъ газа, скорость которыхъ относительно молекулы M равна данной величинѣ $\mathfrak{B}$; ясно, что

$$\Sigma(dl\,.\,d\sigma)=4\pi\rho^2.\,dt\,.\,\Sigma\nu\mathfrak{B},$$

гдѣ суммованіе распространяется на всевозможныя значенія $\mathfrak{B}$.

На основаніи всего вышесказаннаго вѣроятность того, чтобы молекула M натолкнулась въ теченіе времени dt на другую молекулу, или на оболочку, выразится такъ:

$$\frac{4\pi\rho^2.\,\Sigma\nu\mathfrak{B}+\omega\,.\,s}{4\left(v-\frac{4}{3}\pi N v\rho^3-\frac{1}{2}\rho\,.\,s\right)}dt.$$

Отсюда явствуетъ, что выраженіе

$$\frac{4\pi\rho^2\Sigma\nu\mathfrak{B}+\omega\,.\,s}{4(v-\frac{4}{3}\pi N v\rho^3-\frac{1}{2}\rho\,.\,s)} \tag{10}$$

даетъ число столкновеній, испытываемыхъ молекулой M въ единицу времени.

Очевидно, что, если объемъ v будетъ стремиться къ безконечности, отношеніе $\frac{s}{v}$ будетъ стремиться къ нулю. Итакъ, замѣтивъ, что $\Sigma\nu\mathfrak{B}$ пропорціональна v, приходимъ къ такому заключенію: для газа безграничнаго, но обладающаго конечной плотностью, выраженіе (10) сводится къ

$$\frac{\pi\rho^2\Sigma\frac{\nu}{v}\mathfrak{B}}{1-\frac{4}{3}\pi N\rho^3} \tag{11}$$

Понятно, что выраженіе (11) даетъ также число столкновеній въ единицу времени молекулы M съ остальными молеку-

лами конечной газовой массы. Если пренебрежемъ въ этомъ выраженіи величиной $\frac{4}{3}\pi N\rho^3$ передъ единицей, то оно обратится въ извѣстное выраженіе для числа столкновеній молекулы данной скорости, выраженіе, выводимое обычнымъ способомъ разсужденія, при которомъ пренебрегаютъ молекулярными размѣрами по сравненію съ междумолекулярными разстояніями.

Обратимся теперь къ нашей главной задачѣ, т. е. къ вычисленію выраженія $S\left(\frac{dr}{dt}\right)$.

Число столкновеній въ единицу времени молекулы M съ молекулами, скорость которыхъ относительно M есть $\mathfrak{B}$, выразится на основаніи предъидущаго черезъ

$$\frac{\pi\rho^2 . \mathfrak{B} . \frac{\nu}{v}}{1 - \frac{4}{3}\pi N\rho^3},$$

или, по малости $\frac{4}{3}\pi N\rho^3$ передъ единицей, черезъ

$$\pi\rho^2\left(1+\tfrac{4}{3}\pi N\rho^3\right)\mathfrak{B} . \tfrac{\nu}{v}.$$

$\frac{\nu}{v}$ есть число молекулъ въ единицѣ объема, обладающихъ относительно молекулы M (скорость которой $= \omega$) скоростью, заключающейся между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}+d\mathfrak{B}$. Итакъ (см. сочиненіе мое «Кинетическая теорія газовъ....», стр. 88).

$$\frac{\nu}{v} = N\sqrt{\frac{km}{\pi}}\left(e^{-km(\mathfrak{B}-\omega)^2} - e^{-km(\mathfrak{B}+\omega)^2}\right)\frac{\mathfrak{B}}{\omega}d\mathfrak{B}.$$

Далѣе въ единицѣ объема содержится

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}N(km)^{\frac{3}{2}}e^{-km\omega^2}\omega^2 d\omega$$

молекулъ, скорость которыхъ заключается въ предѣлахъ ω и $\omega+d\omega$.

Обозначимъ черезъ ϑ уголъ, образуемый направленіемъ относительной скорости двухъ сталкивающихся молекулъ съ линіей центровъ въ моментъ столкновенія. Вѣроятность того, чтобы уголъ ϑ имѣлъ величину, лежащую между ϑ и $\vartheta+d\vartheta$, есть

$$2\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\ ^{*}).$$

На основаніи сказаннаго заключаемъ, что въ единицѣ объема происходитъ въ единицу времени

$$8N^2\rho^2(1+\tfrac{4}{3}\pi N\rho^3)(km)^2 e^{-km\omega^2}\omega d\omega\left(e^{-km(\mathfrak{V}-\omega)^2}-e^{-km(\mathfrak{V}+\omega)^2}\right)\mathfrak{V}^2 d\mathfrak{V}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta$$

столкновеній, при которыхъ скорость одной изъ сталкивающихся молекулъ лежитъ въ предѣлахъ ω и $\omega+d\omega$, скорость ея относительно другой—въ предѣлахъ $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}+d\mathfrak{V}$, а уголъ ϑ—въ предѣлахъ ϑ и $\vartheta+d\vartheta$.

При каждомъ такомъ столкновеніи

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)=\mathfrak{V}\,.\cos\vartheta,$$

а потому

$$S\left(\frac{dr}{dt}\right)=4N^2\rho^2(1+\tfrac{4}{3}\pi N\rho^3)(km)^2\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-km\omega^2}\omega d\omega\int_0^\infty\left(e^{-km(\mathfrak{V}-\omega)^2}-e^{-km(\mathfrak{V}+\omega)^2}\right)\mathfrak{V}^3 d\mathfrak{V}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Факторъ $\frac{1}{2}$ приписанъ въ правой части этой формулы потому, что при интеграціяхъ по ω и $\mathfrak{V}$ отъ o до ∞ каждое столкновеніе идетъ въ счетъ два раза.

Интеграція по ϑ выполняется здѣсь непосредственно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta=\tfrac{1}{3}.$$

*) См. сочиненіе мое «Кинетическая теорія газовъ...», стр. 15.

Далѣе

$$\int_0^\infty e^{-km\mathfrak{z}^2}\omega\, d\omega \int_0^\infty \left(e^{-km(\mathfrak{V}-\omega)^2} - e^{-km(\mathfrak{V}+\omega)^2}\right)\mathfrak{V}^3 d\mathfrak{V} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-km\mathfrak{V}^2}\mathfrak{V}^3 d\mathfrak{V} \int_0^\infty \left(e^{2km\mathfrak{V}\omega} - e^{-2km\mathfrak{V}\omega}\right) e^{-2km\omega^2}\omega\, d\omega.$$

Разсмотримъ выраженіе

$$I = \int_0^\infty e^{-m(x-n)^2} x\, dx - \int_0^\infty e^{-m(x+n)^2} x\, dx.$$

Полагая

въ 1-мъ интегралѣ $x-n=y$, а во 2-мъ $x+n=y$, находимъ:

$$I = \int_{-n}^\infty e^{-my^2}(y+n)\, dy - \int_n^\infty e^{-my^2}(y-n)\, dy = \int_{-n}^n e^{-my^2}(y+n)\, dy + 2n\int_n^\infty e^{-my^2} dy =$$

$$= n\int_{-n}^n e^{-my^2} dy + n\int_{-\infty}^{-n} e^{-my^2} dy + n\int_n^\infty e^{-my^2} dy = n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-my^2} dy = \frac{n}{\sqrt{m}}\sqrt{\pi}.$$

Итакъ

$$\int_0^\infty \left(e^{2km\mathfrak{V}\omega} - e^{-2km\mathfrak{V}\omega}\right) e^{-2km\omega^2}\omega\, d\omega = e^{\frac{km}{2}\mathfrak{V}^2}\int_0^\infty \left(e^{-2km\left(\omega-\frac{\mathfrak{V}}{2}\right)^2} - e^{-2km\left(\omega+\frac{\mathfrak{V}}{2}\right)^2}\right)\omega d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2km}}\, e^{\frac{km}{2}\mathfrak{V}^2}.\mathfrak{V}.$$

Далѣе

$$\int_0^\infty e^{-km\omega^2}\omega\, d\omega \int_0^\infty \left(e^{-km(\mathfrak{V}-\omega)^2} - e^{-km(\mathfrak{V}+\omega)^2}\right)\mathfrak{V}^3 d\mathfrak{V} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2km}}\int_0^\infty e^{-\frac{km}{2}\mathfrak{V}^2}.\mathfrak{V}^4 d\mathfrak{V} =$$

$$= \frac{3}{4}\pi\frac{1}{(km)^3}.$$

Слѣдовательно

$$S\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{\pi}{km}N^2\rho^2\left(1+\frac{4}{3}\pi N\rho^3\right) = \frac{2\pi}{3}N^2\rho^2 G^2\left(1+\frac{4}{3}\pi N\rho^3\right).$$

На основаніи вышесказаннаго выраженіе (4) представится въ такомъ видѣ:

$$-\frac{2\pi}{3}\tau v m N^2 \rho^3 G^2 \left(1+\frac{4}{3}\pi N\rho^3\right).$$

Это и будетъ окончательная форма для той части выраженія (1) § 3, которая относится къ соудареніямъ молекулъ между собою, въ предположеніи, что притягательныя силы, дѣйствующія между молекулами, не нарушаютъ сколько нибудь замѣтнымъ образомъ прямолинейности и равномѣрности движенія этихъ послѣднихъ.

§ 5. Перейдемъ къ разсмотрѣнію виріала

$$-\Sigma\int_0^\tau (Xx+Yy+Zz)dt, \tag{1}$$

по скольку онъ относится къ притягательнымъ силамъ, дѣйствующимъ между молекулами.

Очевидно, что знаки

$$\Sigma \text{ и } \int_0^\tau$$

могутъ помѣняться мѣстами, и что выраженіе (1) можетъ быть переписано такъ:

$$-\int_0^\tau dt\Sigma(Xx+Yy+Zz). \tag{2}$$

Та часть суммы

$$\Sigma(Xx+Yy+Zz),$$

которая относится къ *двумъ* какимъ-либо молекуламъ, имѣетъ видъ

$$R\left\{\frac{x_2-x_1}{r}x_1+\frac{y_2-y_1}{r}y_1+\frac{z_2-z_1}{r}z_1+\frac{x_1-x_2}{r}x_2+\frac{y_1-y_2}{r}y_2+\frac{z_1-z_2}{r}z_2\right\}, \tag{3}$$

гдѣ R—абсолютная величина притягательной силы, дѣйствующей

между молекулами, r—взаимное разстояніе ихъ центровъ, (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)—координаты центровъ.

Такъ какъ

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=r^2,$$

выраженіе (3) обращается въ

$$-Rr,$$

а выраженіе (2) принимаетъ такой видъ:

$$\int_0^\tau dt S\,Rr\,, \tag{4}$$

при чемъ знакъ S означаетъ здѣсь *суммованіе, распространенное на всѣ пары молекулъ газовой массы.* Обозначилъ черезъ

$$\overline{S\,Rr} \tag{5}$$

среднюю величину

$$S\,Rr$$

за промежутокъ времени τ. Если промежутокъ времени τ достаточно великъ, что мы и предполагаемъ, то выраженіе (5) можно разсматривать какъ независящее отъ τ, а зависящее лишь отъ среднихъ величинъ, коими характеризуется строеніе газа. Выраженіе (4) перепишется теперь такъ:

$$\tau\,.\,\overline{S\,Rr}. \tag{6}$$

Обозначимъ черезъ r_{ik} разстояніе центровъ $i^{\text{ой}}$ и $k^{\text{ой}}$ молекулы, черезъ R_{ik}—абсолютную величину дѣйствующей между ними притягательной силы. Очевидно, что

$$S\,Rr=\tfrac{1}{2}\sum^{i}\sum^{k} R_{ik}\,.\,r_{ik}\,, \tag{7}$$

гдѣ суммованіе по k распространено на всѣ значенія k, исклю-

чая $k=i$, а суммованіе по i — на всевозможныя значенія i, встрѣчающіяся въ газовой массѣ (на всѣ молекулы). Относительно силы R я принимаю, что она есть функція одного лишь r, весьма быстро убывающая съ возрастаніемъ послѣдняго. Въ такомъ случаѣ суммованіе по k въ формулѣ (7) можно разсматривать какъ распространенное на всѣ молекулы, лежащія внутри сферы, описанной изъ центра $i^{ой}$ молекулы радіусомъ δ, который мы можемъ назвать «радіусомъ сферы молекулярнаго притяженія». Часть суммы

$$\sum^{k} R_{ik} \, . \, r_{ik} \, ,$$

соотвѣтствующая молекуламъ, лежащимъ внѣ сферы молекулярнаго притяженія, имѣетъ исчезающую величину.

Я принимаю, что δ велико сравнительно съ ρ, но все же весьма мало абсолютно.

Представимъ себѣ поверхность, лежащую внутри газа, точки коей отстоятъ всюду на δ отъ оболочки, содержащей газъ. Такъ какъ δ весьма мало сравнительно съ линейными измѣреніями оболочки, число молекулъ, заключающихся въ слоѣ между помянутой поверхностью и оболочкой, будетъ весьма мало сравнительно съ тѣмъ числомъ, которое заключается внутри этой поверхности; слѣдовательно число случаевъ, когда сфера молекулярнаго притяженія, описанная вокругъ центра какой-нибудь молекулы, лежитъ всѣми своими точками внутри газа, чрезвычайно велико по сравненію съ числомъ тѣхъ случаевъ, когда это не имѣетъ мѣста. Итакъ мы можемъ положить, довольствуясь приближеніемъ,

$$\overline{S\,Rr} = \frac{1}{2}\overline{\sum^{i}\sum^{k} R_{ik} \, . \, r_{ik}} = \frac{1}{2}\mathfrak{N}\overline{\overline{\sum^{k} R_{ik} \, . \, r_{ik}}} \, ,$$

гдѣ $\mathfrak{N}$ означаетъ полное число молекулъ газовой массы, а двойная черта надъ

$$\sum^{k} R_{ik} \, . \, r_{ik} \qquad (8)$$

выражаетъ двойную операцію взятія средняго ариѳметическаго

отъ выраженія (8): при первой операціи перемѣннымъ является i, *при чемъ $i^{\text{ая}}$ молекула лежитъ гдѣ нибудь внутри вышепомянутой поверхности*; вторая операція относится ко времени.

Обозначимъ черезъ

$$f(r_{ik})dr_{ik}$$

вѣроятное число молекулъ, разстояніе коихъ отъ $i^{\text{ой}}$ молекулы (лежащей гдѣ-нибудь внутри помянутой поверхности) заключается между r_{ik} и $r_{ik}+dr_{ik}$. Тогда

$$\overline{\overline{\sum^{k} R_{ik}\,.\,r_{ik}}}=\int_{\rho}^{\delta} Rrf(r)dr.$$

Такъ какъ кромѣ того

$$\mathfrak{N}=N\,.\,v,$$

выраженіе (6) обращается въ

$$\tfrac{1}{2}\tau vN\int_{\rho}^{\delta} Rrf(r)dr. \tag{9}$$

Сдѣлаемъ гипотезу, что

$$R=\frac{hm^2}{r^n}.$$

Тогда выраженіе (9) перепишется въ такомъ видѣ:

$$\tfrac{1}{2}\tau vhNm^2\int_{\rho}^{\delta}\frac{f(r)}{r^{n-1}}dr. \tag{10}$$

Видъ функціи $f(r)$ въ общемъ случаѣ мнѣ пока не удалось найти; функція эта должна зависѣть отъ средней молекулярной скорости и отъ свойства силы сцѣпленія, т. е. отъ h и m. Остановлюсь пока на предположеніи, сдѣланномъ въ § 4, т. е. допущу, что притягательныя силы, дѣйствующія между молекулами, не нарушаютъ замѣтнымъ образомъ прямолинейности и равномѣрности ихъ движенія. Въ такомъ случаѣ очевидно, что

$$f(r)=C\,.\,r^2.$$

Постоянное C опредѣляется изъ уравненія

$$C\int_{\rho}^{\delta} r^2 dr = \frac{C}{3}(\delta^3 - \rho^3) = \frac{4}{3}\pi(\delta^3 - \rho^3) . N$$

и оказывается равнымъ $4\pi N$.

При этомъ предположеніи формула (10) обращается въ

$$2\pi . \tau v h N^2 m^2 \int_{\rho}^{\delta} \frac{dr}{r^{n-3}}. \tag{11}$$

Согласно сдѣланному нами раньше предположенію R настолько быстро убываетъ съ возрастаніемъ r, что часть суммы

$$\sum^{k} R_{ik} . r_{ik} ,$$

соотвѣтствующая молекуламъ, для которыхъ $r_{ik} > \delta$, имѣетъ исчезающую величину. Отсюда слѣдуетъ, что интегралъ

$$\int_{\rho}^{\delta} \frac{dr}{r^{n-3}}$$

не долженъ возрастать неограниченно съ возрастаніемъ δ, т. е. n должно быть болѣе 4.

При $n > 4$,

$$\int_{\rho}^{\delta} \frac{dr}{r^{n-3}} = \frac{1}{n-4}\left(\frac{1}{\rho^{n-4}} - \frac{1}{\delta^{n-4}}\right);$$

членъ $\frac{1}{\delta^{n-4}}$ мы опустимъ, такъ какъ, по условію, $\int_{\delta}^{\infty} \frac{dr}{r^{n-3}}$ долженъ быть весьма малъ сравнительно съ $\int_{\rho}^{\delta} \frac{dr}{r^{n-3}}$, и, слѣдовательно, $\frac{1}{\delta^{n-4}}$ мало по сравненію съ $\frac{1}{\rho^{n-4}}$.

Итакъ та часть выраженія (1), которая относится къ силамъ сцѣпленія, можетъ быть для газа, близкаго къ идеальному состоянію, представлена въ видѣ

$$\frac{2\pi}{n-4}\,\tau v \frac{h}{\rho^{n-4}} N^2 m^2.$$

§ 6. Обратимся къ вычисленію той части выраженія (1) § 5, которая относится къ притягательнымъ силамъ, оказываемымъ оболочкой на газовыя молекулы.

Выраженіе (1) § 5 можетъ быть представлено такъ:

$$-\tau\overline{\Sigma P.r.\cos(P,r)}, \qquad (1)$$

гдѣ P означаетъ силу, слагающія коей суть $X, Y, Z, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (за положительное направленіе вектора r принято направленіе отъ начала координатъ къ точкѣ (x, y, z)), а поставленная на верху черта выражаетъ операцію взятія средняго ариѳметическаго по отношенію ко времени.

Допустимъ, что притягательная сила оболочки оказываетъ сколько-нибудь замѣтное дѣйствіе лишь на молекулы, находящіяся въ весьма тонкомъ, прилежащемъ къ оболочкѣ, слоѣ, (пусть толщина его будетъ ν). Силу, съ которой оболочка дѣйствуетъ на какую-нибудь молекулу этого пограничнаго слоя, можно разсматвать какъ нормальную къ внутренней поверхности оболочки.

Итакъ, если ограничиться приближеніемъ, та часть выраженія (1), которая относится къ дѣйствію оболочки на газовыя молекулы, можетъ быть представлена въ видѣ

$$\tau\int r.\cos(n,r)\,d\sigma.\overline{\Sigma Q}. \qquad (2)$$

Здѣсь $d\sigma$ означаетъ элементъ внутренней поверхности оболочки (интеграція распространяется на всю эту поверхность), r— разстояніе элемента $d\sigma$ отъ начала координатъ, n—внутреннюю нормаль къ $d\sigma$, Q—притягательную силу, съ которой оболочка дѣйствуетъ на какую-нибудь молекулу весьма тонкаго поверхностнаго слоя; знакъ Σ выражаетъ суммованіе, распространенное на

всѣ молекулы, находящіяся въ слоѣ толщины ν, прилежащемъ единицѣ поверхности оболочки.

Очевидно, что

$$\overline{\Sigma Q}$$

должно быть пропорціонально плотности газа, такъ что можно положить

$$\overline{\Sigma Q}=AN,$$

гдѣ A—коеффиціентъ пропорціональности, зависящій отъ ν и отъ природы газа и оболочки.

Итакъ выраженіе (2) замѣняется такимъ:

$$-3A\tau vN.$$

§ 7. Уравненіе (6) § 2 напишется теперь такъ:

$$pv-\tfrac{1}{3}\rho mvS\left(\frac{dr}{dt}\right)+\tfrac{1}{3}\overline{SRr}-AvN=\tfrac{1}{3}vNmG^2. \quad (1)$$

Уравненіе это имѣетъ силу не только для газа сколь угодно далекаго отъ идеальнаго состоянія, но даже и для однородной жидкости: въ самомъ дѣлѣ, при выводѣ его не сдѣлано нами никакихъ предположеній, относящихся спеціально къ газообразному состоянію вещества. Въ главѣ 2-ой настоящей статьи изложена попытка примѣненія этого уравненія къ жидкому состоянію вещества,

Для газа *близкаго къ идеальному состоянію* будемъ имѣть уравненіе

$$pv-\frac{2\pi}{9}vmN^2\rho^3G^2(1+\tfrac{4}{3}\pi N\rho^3)+\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}vN^2m^2=$$
$$=AvN+\tfrac{1}{3}vNmG^2. \quad (2)$$

Положимъ, что масса газа, заключеннаго въ разсматриваемую оболочку, равна единицѣ, такъ что

$$Nvm=1.$$

Въ такомъ случаѣ уравненіе (2) приметъ видъ

$$pv+\frac{a}{v}-\frac{b}{v}G^2\left(1+\frac{c}{v}\right)=\frac{A}{m}+\tfrac{1}{3}G^2, \qquad (3)$$

гдѣ

$$a=\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}},\ b=\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{\rho^3}{m},\ c=\tfrac{4}{3}\pi\frac{\rho^3}{m}. \qquad (4)$$

Если пренебрежемъ въ формулѣ (3) членами $\frac{A}{m}$ и $\frac{c}{v}$, то она обратится въ формулу Фанъ-деръ-Ваальса — Лоренца (формула (1) § 1).

Уравненіе изотермы 0°C. будетъ

$$pv+\frac{a-bG_0^2}{v}-\frac{bcG_0^2}{v^2}=\text{const.}=\frac{A}{m}+\tfrac{1}{3}G_0^2. \qquad (5)$$

Уравненіе это по формѣ одинаково съ эмпирической формулой Реньо (формула (3) § 1). Совпаденіе формулы (5) съ формулой Реньо происходитъ отъ присутствія въ ней члена $\frac{bcG_0^2}{v^2}$, лишняго противъ формулы Фанъ-деръ-Ваальса, члена, возникшаго отъ исправленія выраженія для числа молекулярныхъ столкновеній.

Для *азота* формула Реньо имѣетъ видъ

$$pv+\frac{0{,}00071}{v}-\frac{0{,}000007}{v^2}=1{,}0007. \qquad (6)$$

При этомъ Реньо принимаетъ за единицу давленія давленіе 1 метра ртутнаго столба, а за единицу емкости—объемъ, занимаемый разсматриваемой газовой массой при давленіи, равномъ единицѣ, и при температурѣ 0°C.

Введемъ въ формулу (6) единицы системы (*cm.* gr., sec.). Предполагая, что разсматриваемая масса азота равна грамму, най-

демъ единицу емкости Реньо равной 603 $(cm.)^3$; единица давленія Реньо равна 1330000 $\frac{Dn.}{(cm.)^2}$.

Итакъ, принимая систему единицъ (*cm.* gr., sec.), получимъ вмѣсто формулы (6) такую:

$$pv+\frac{343.10^6}{v}-\frac{204.10^7}{v^2}=803.10^6. \qquad (7)$$

Сравнивая формулу (7) съ (5) и обращая вниманіе на формулы (4), получаемъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{A}{m}+\tfrac{1}{3}G_0^2=803.10^6, \qquad (8)$$

$$\frac{8\pi^2}{27}\left(\frac{\rho^3}{m}\right)^2 G_0^2=204.10^7, \qquad (9)$$

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}-\frac{2\pi}{9}\frac{\rho^3}{m}.G_0^2=343.10^6. \qquad (10)$$

Допуская, что вліяніе притягательныхъ силъ оболочки весьма мало, пренебрежемъ членомъ $\frac{A}{m}$ въ уравненіи (8). Тогда изъ этого уравненія окажется, что

$$G_0=49100\frac{cm.}{sec.}.$$

Изъ уравненій (9) и (10) найдемъ

$$\frac{\rho^3}{m}=0{,}54, \qquad (11)$$

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}=125.10^7. \qquad (12)$$

Отсюда

$$\frac{hm}{\rho^{n-1}}=(n-4).111.10^7. \quad (13)$$

Разсмотримъ взаимодѣйствіе на разстояніи двухъ молекулъ. Если обозначимъ черезъ Π ихъ потенціальную энергію, черезъ $\mathfrak{V}$ скорость одной относительно другой, то уравненіе живыхъ силъ для относительнаго движенія будетъ имѣть видъ

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{V}^2+\frac{2}{m}\Pi=\text{const}. \quad (14)$$

Такъ какъ, согласно нашей гипотезѣ, сила взаимодѣйствія— притягательная и выражается формулой $R=\frac{hm^2}{r^n}$, для Π будемъ имѣть такое выраженіе:

$$\Pi=-\frac{hm^2}{n-1}.\frac{1}{r^{n-1}}+\text{const.},$$

а уравненіе (14) приметъ видъ

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{V}^2-\frac{2hm}{n-1}.\frac{1}{r^{n-1}}=\text{const}. \quad (15)$$

Положимъ $n=5$. Тогда формула (15) обратится въ

$$\mathfrak{V}^2-\frac{hm}{r^4}=\text{const.}, \quad (16)$$

а формула (13) въ

$$\frac{hm}{\rho^4}=111.10^7. \quad (17)$$

Формула (17) даетъ намъ наибольшую величину $\frac{hm}{r^4}$; что касается до $\mathfrak{V}^2$, то среднее ариѳметическое всевозможныхъ значеній этого количества есть $2\ G^2$. Слѣдовательно, при температурѣ 0°C., $\mathfrak{V}^2$ равно *въ среднемъ*

482.10[7].

Итакъ (см. формулу (16)), благодаря взаимному притяженію двухъ молекулъ, $\mathfrak{B}^2$, увеличивается при соприкосновеніи ихъ *среднимъ числомъ* на 0,23 своей величины. Принимая-же во вниманіе то обстоятельство, что $\frac{hm}{r^4}$ весьма быстро убываетъ съ возрастаніемъ r, заключаемъ, что съ грубымъ приближеніемъ можно считать движеніе молекулъ азота, находящагося въ обыденныхъ условіяхъ давленія и температуры, прямолинейнымъ и равномѣрнымъ.

Формула (11) можетъ быть написана такъ:

$$N v \rho^3 = 0{,}54. \qquad (18)$$

Возьмемъ еще извѣстное соотношеніе

$$N \rho^2 = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{L}, \qquad (19)$$

гдѣ L—средняя длина свободнаго молекулярнаго пути.

При давленіи 76 *cm.* и при температурѣ 0°С.,

$$v = 794\ (cm)^3; \qquad (20)$$

при тѣхъ-же условіяхъ

$$L = 0{,}00000969\ cm. \qquad (21)$$

Изъ формулъ (18), (19), (20) и (21) слѣдуетъ, что

$$\rho = 293.10^{-10}\ cm. \qquad (22)$$

Если мы положимъ, примѣрно, что величина, обозначенная нами въ § 5 черезъ δ, разъ въ 1000 болѣе ρ, то все-же δ будетъ весьма мало абсолютно, а

$$\int_\delta^\infty \frac{dr}{r^2}$$

будетъ составлять всего лишь тысячную долю

$$\int_{\rho}^{\infty}\frac{dr}{r^2}.$$

Итакъ предположенія, сдѣланныя нами въ § 5 при вычисленіи выраженія SRr, оправдываются.

Изъ формулъ (19), (21) и (22) находимъ, что.

$$N=27.10^{18}$$

(это число относится къ нормальному давленію и температурѣ 0°С.).

Произведенное нами въ § 5 вычисленіе выраженія SRr предполагаетъ, что $n>4$. При примѣрномъ вычисленіи, которое только что было произведено, предполагалось, что $n=5$. Замѣтимъ, что величина n не вліяетъ на G_0 и ρ, а лишь на h (см. формулы (8), (9) и (10) настоящаго §); такимъ образомъ, какое значеніе, большее 4, мы ни припишемъ n, для G_0, ρ а слѣдовательно и для N, получимъ тѣ-же самыя числа, какъ и при $n=5$.

Если для n мы примемъ число, заключающееся между 4 и 5, то для $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ получится число, меньшее, чѣмъ при $n=5$ (см. формулу (13)); при n, неограниченно приближающемся къ 4, $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ стремится къ нулю. Поэтому съ перваго взгляда можетъ показаться, что, если принять $n=4$, то сдѣланное нами предположеніе о прямолинейности и равномѣрности движенія молекулъ окажется оправданнымъ во всей строгости. На самомъ-же дѣлѣ мы не можемъ принять n равнымъ 4 или весьма близкимъ къ 4 потому, что, по мѣрѣ приближенія n къ 4, δ стремится къ ∞.

Принявъ для n число, большее 5, мы получимъ для $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ величину большую, чѣмъ въ случаѣ $n=5$; но за то $\frac{1}{r^{n-1}}$, будетъ тогда убывать съ возрастаніемъ r быстрѣе, чѣмъ при $n=5$.

Такимъ образомъ при n значительно большемъ 5 предположеніе наше относительно $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ *) можетъ оказаться совершенно незаконнымъ; предположеніе-же, что число молекулярныхъ столкновеній въ единицу времени можетъ быть приближенно опредѣленно, разсматривая движеніе молекулъ какъ прямолинейное и равномѣрное, можетъ считаться не лишеннымъ правдоподобія. Какъ-бы то ни было, наша теорія не годится для случая n значительно большаго 5. Всего лучше оправдываются предположенія этой теоріи, если принять, что n заключается между 4 и 5, но не слишкомъ близко къ 4.

Замѣтимъ еще въ заключеніе, что виріалъ силъ взаимодѣйствія на разстояніи между газовыми молекулами и стѣнками сосуда, содержащаго газъ, (членъ $\frac{A}{m}$ уравненія (3)) есть величина постоянная; поэтому принятіе въ разсчетъ этого виріала не измѣняетъ формы уравненій изотермъ, а лишь оказываетъ нѣкоторое вліяніе на числовыя величины G, ρ, N, h. Вліяніе это по всей вѣроятности весьма мало.

Обратимся теперь къ нѣкоторымъ другимъ газамъ.

Для воздуха, по Фанъ-деръ-Ваальсу, имѣетъ мѣсто уравненіе (при 0°С.)

$$pv+\frac{0{,}0011}{v}-\frac{0{,}00000962}{v}=1{,}001. \qquad (23)$$

Формула Реньо отличается отъ формулы (23) коэффиціентомъ при $\frac{1}{v^2}$; по словамъ Фанъ-деръ-Ваальса, уравненіе (23) передаетъ результаты опытовъ лучше, чѣмъ формула Реньо. Надо замѣтить, что за единицу давленія принята въ уравненіи (23)

*) Предположеніе это состояло въ томъ, что относительная скорость двухъ молекулъ при соудареніи возрастаетъ, въ среднемъ, лишь на малую долю своей величины, благодаря существованію между молекулами притягательныхъ силъ.

атмосфера, а за единицу емкости—объемъ, занимаемый разсматриваемой газовой массой при 0°С. и давленіи атмосферы. Итакъ, принимая, что разсматриваемая масса воздуха равна 1 грамму, и замѣтивъ, что 1 граммъ воздуха занимаетъ при 0°С. и давленіи атмосферы объемъ$=773$ $(cm.)^3$, находимъ, что по системѣ (*cm.*, gr., sec.) уравненіе (23) имѣетъ видъ

$$pv+\frac{505.10^6}{v}-\frac{259.10^7}{v^2}=782.10^6, \qquad (24)$$

Сравнивая формулу (24) съ (5), находимъ:

$$G_0=48400\frac{cm.}{sec.},\ \rho=336.10^{-10}cm.,\ N=21.10^{18},$$

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}\frac{h}{\rho^{n-4}}=151.10^7.$$

Итакъ для воздуха при 0°С. $\mathfrak{B}^2$ равно въ среднемъ 469.10^7; если примемъ $n=5$, то $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ окажется равнымъ 118.10^7. Такимъ образомъ, благодаря взаимному притяженію двухъ молекулъ воздуха, $\mathfrak{B}^2$ увеличивается при соприкосновеніи ихъ среднимъ числомъ на $\frac{1}{4}$ своей величины. Понятно, что подъ именемъ *воздухъ* я разумѣю здѣсь нѣкоторый фиктивный газъ, состоящій изъ одинаковыхъ молекулъ и обладающій тѣми-же свойствами, какъ дѣйствительный воздухъ; къ дѣйствительному воздуху, который представляетъ *смѣсь* двухъ газовъ, наша теоретическая формула (уравненіе (3)), собственно говоря, неприменима.

Для закиси азота Фанъ-деръ-Ваальсъ, основываясь на опытахъ Янсена, даетъ въ качествѣ уравненія изотермы 0°С. такую формулу:

$$pv+\frac{0,0055}{v}-\frac{0,000014}{v^2}=1,005. \qquad (25)$$

При этомъ за единицу давленія принята опять таки атмосфера; по системѣ (cm., gr., sec.) уравненіе (25) будетъ имѣть видъ

$$pv+\frac{142.10^7}{v}-\frac{185.10^7}{v^2}=517.10^6.$$

Отсюда

$$G_0=39400\frac{cm.}{sec.},\ \rho=368.10^{-10}cm.,\ N=25.10^{18},$$

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}=211.10^7.$$

Итакъ, принявъ $n=5$, находимъ, что взаимное притяженіе двухъ молекулъ закиси азота увеличиваетъ $\mathfrak{B}^2$ при соприкосновеніи ихъ среднимъ числомъ на $\frac{1}{4}$ той величины, которой обладало-бы $\mathfrak{B}^2$, если-бы молекулы не притягивали одна другой.

Для этилена при 0°С. имѣетъ мѣсто уравненіе (постоянныя этого уравненія вычислены Фанъ-деръ-Ваальсомъ изъ данныхъ опыта, относящихся къ критическому состоянію)

$$pv+\frac{0{,}0056}{v}-\frac{0{,}000017}{v^2}=1{,}006$$

(за единицу давленія принята атмосфера),
или, по системѣ (cm., gr., sec.),

$$pv+\frac{353.10^7}{v}-\frac{858.10^7}{v^2}=807.10^6.$$

Отсюда

$$G_0=49200\frac{cm.}{sec.},\ \rho=347.10^{-10}cm.,N=32.10^{18},$$

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}=539.10^7;$$

если $n=5$, то отношеніе $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ къ среднему значенію $\mathfrak{B}^2$ при 0°С. равно въ данномъ случаѣ 0,48.

Для углекислоты Фанъ-деръ-Ваальсъ, основываясь на данныхъ опытовъ Реньо, даетъ такое уравненіе изотермы 0°С.:

$$pv+\frac{0,0064}{v}-\frac{0,00002}{v^2}=1,006 \qquad (26)$$

(за единицу давленія принята атмосфера). По системѣ (cm., gr., sec.) будемъ имѣть уравненіе

$$pv+\frac{165.10^7}{v}-\frac{26.10^8}{v^2}=513.10^6.$$

Отсюда

$$G_0=39200\frac{cm.}{sec.},\ \rho=439.10^{-10},\ N=18.10^{18},$$

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}=247.10^7;$$

если $n=5$, то отношеніе $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ къ среднему значенію $\mathfrak{B}^2$ при 0°C. равно въ данномъ случаѣ $\frac{1}{2}$.

Формула самого Реньо для углекислоты отличается нѣсколько отъ (26). Она имѣетъ видъ

$$pv+\frac{0,00855}{v}-\frac{0,0000073}{v^2}=1,008, \qquad (27)$$

причемъ за единицу давленія принято давленіе 1 метра ртутнаго столба.

По системѣ (cm, gr., sec.) формула (27) напишется такъ:

$$pv+\frac{168.10^7}{v}-\frac{55.10^7}{v^2}=513.10^6.$$

Отсюда

$$\rho=201.10^{-10},\ N=84.10^{18},\ \frac{2\pi}{3(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}=206.10^7;$$

если $n=5$, то отношеніе $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ къ среднему значенію $\mathfrak{B}^2$ при 0°C. равно въ данномъ случаѣ 0,42.

Разработывая данныя, полученныя Реньо при опытахъ съ

водородомъ, Фанъ-деръ-Ваальсъ нашелъ, что сжимаемость этого газа при 0°С. лучше всего представляется формулой

$$pv-\frac{0,00069}{v}=0,9995$$

(единица давленія—1 метръ ртутнаго столба). По системѣ (cm,. gr., sec.) формула эта представится такъ:

$$pv-\frac{66.10^9}{v}=113.10^8. \qquad (28)$$

Изслѣдованія Фанъ-деръ-Ваальса показали, что у водорода сила притяженія между молекулами обладаетъ ничтожной величиной сравнительно съ остальными газами. Итакъ, имѣя въ виду примѣнить уравненіе (5) къ водороду, положимъ въ немъ h равнымъ нулю. Кромѣ того пренебрежемъ въ этомъ уравненіи членомъ втораго порядка малости и членомъ $\frac{A}{m}$ тогда уравненіе (5) приметъ видъ

$$pv-\frac{bG_0^2}{v}=\tfrac{1}{3}G_0^2. \qquad (29)$$

Сравненіе формулъ (28) и (29) даетъ уравненія

$$\tfrac{1}{3}G_0^2=113.10^8 \text{ и } bG_0^2=\frac{2\pi}{9}\frac{\rho^3}{m}.G_0^2=66.10^9,$$

при помощи которыхъ находимъ, что

$$G_0=184000\frac{cm.}{sec.},\ \rho=203.10^{-10}cm.,\ N=30.10^{18}.$$

Формула самого Реньо для водорода такова

$$pv-\frac{0,00053}{v}-\frac{0,0000084}{v^2}=0,9995 \qquad (30)$$

(единица давленія—1 метръ ртутнаго столба). По системѣ (cm., gr., sec.) формула (30) представится въ видѣ

$$pv - \frac{507.10^8}{v} - \frac{684.10^{10}}{v^2} = 113.10^8.$$

Отсюда

$$\rho = 662.10^{-10} cm., \quad N = 3{,}5.10^{18}, \quad \frac{2\pi}{3(n-4)} \cdot \frac{h}{\rho^{n-4}} = 145.10^9;$$

если $n = 5$, то отношеніе $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ къ среднему значенію $\mathfrak{V}^2$ при 0°C. равно въ данномъ случаѣ 0,12.

Результаты, полученные нами касательно величины отношенія $\frac{hm}{\rho^{n-1}}$ къ среднему значенію $\mathfrak{V}^2$ у разныхъ газовъ, свидѣтельствуютъ о томъ, что предположенія нашей теоріи представляютъ лишь грубое приближеніе къ дѣйствительности, особенно въ отношеніи газовъ, легко поддающихся сжиженію.

§ 8. Для числа N получили мы разныя величины для разныхъ газовъ, хотя по закону Авогадро всѣ газы должны обладать однимъ и тѣмъ-же N. Причины этого несогласія слѣдующія: во 1-хъ наша теоретическая формула (уравненіе (3) § 7) не вполнѣ точна; во 2-хъ опредѣленіе ρ, а слѣдовательно и N, осуществляется путемъ сравненія членовъ втораго порядка малости теоретической и эмпирическихъ формулъ; а между тѣмъ въ эмпирическихъ формулахъ, сюда относящихся, подъ часъ являются ненадежными не только члены 2-го порядка, но даже и члены 1-го порядка; притомъ надо замѣтить, что всякая ошибка въ ρ отзывается на N еще сильнѣе, ибо N обратно пропорціонально квадрату ρ.

Въ нижеслѣдующей табличкѣ выписаны всѣ полученныя нами значенія ρ и N въ сопоставленіи съ значеніями тѣхъ-же количествъ, полученными на основаніи теоріи Фанъ-деръ-Ваальса — Лоренца. Буква $R.$, поставленная противъ нѣкоторыхъ горизонтальныхъ строкъ нашей таблички, указываетъ на то, что числа

этихъ строкъ получены чрезъ сравненіе теоретическихъ формулъ съ эмпирическими формулами Реньо; буква *W* указываетъ на то, что числа, противъ которыхъ она стоитъ, получены при помощи эмпирическихъ формулъ, предложенныхъ Фанъ-деръ-Ваальсомъ и выведенныхъ имъ посредствомъ обработки опытныхъ данныхъ Реньо и другихъ экспериментаторовъ. Числа *N* даны въ табличкѣ въ триллюнахъ; данныя въ табличкѣ значенія ρ выражены въ 10^{-10} доляхъ сантиметра.

НАЗВАНІЕ ГАЗА.	Величины, полученныя при помощи формулы (5) § 7.		Величины, полученныя на основаніи теоріи Фанъ-деръ-Ваальса—Лоренца.	
	ρ	N	ρ	N
Азотъ . . . . *R*.	293	27	370	17
Воздухъ. . . . . . . *W*.	336	21	398	15
Закись азота. . . . *W*.	368	25	266	48
Этиленъ . . . . *W*.	348	32	267	54
Углекислота . . . . *W*.	439	18	321	33
Углекислота . . . . *R*.	201	84	80	364
Водородъ . . . . . . *W*.	203	30	203	30
Водородъ . . . . . . *R*.	662	3,5	930	1,4

Всматриваясь въ эти числа, приходимъ къ заключенію, что несогласіе съ закономъ Авогадро теоріи Фанъ-деръ-Ваальса—Лоренца гораздо значительнѣе, чѣмъ несогласіе съ нимъ изложенной здѣсь теоріи: по этой послѣдней отношеніе между значеніями *N* для двухъ газовъ достигаетъ 24, тогда какъ по теоріи Фанъ-деръ-Ваалса—Лоренца отношеніе это доходитъ до 260. Наибольшую аномалію представляютъ числа для углекислоты и водорода, найденныя при помощи формулъ Реньо; числа, найденныя для тѣхъ-же газовъ при помощи формулъ, обработанныхъ Фанъ-деръ-Ваальсомъ, согласуются съ остальными данными гораздо лучше. Это совершенно понятно въ виду того, что формулы Реньо пере-

дають сжимаемость водорода и углекислоты хуже, чѣмъ формулы Фанъ-деръ-Ваальса. По исключеніи изъ общаго списка помянутыхъ сомнительныхъ чиселъ, окажется, что значенія N колеблются между 18 и 32 для вышеизложенной теоріи и между 15 и 54 для теоріи Фанъ-деръ-Ваальса—Лоренца. Итакъ, по исключеніи чиселъ завѣдомо сомнительныхъ, значенія N, къ которымъ ведетъ наша теорія, оказываются настолько близкими другъ къ другу, что мы получаемъ возможность имѣть сужденіе о томъ, каково должно быть приблизительно истинное значеніе N. Взявъ среднее изъ чиселъ 27, 21, 25, 32, 18, 30, находимъ, что въ 1 кубическомъ сантиметрѣ всякаго газа, имѣющаго температуру 0°С. и находящагося подъ давленіемъ атмосферы, заключается приблизительно 25 трилліоновъ молекулъ. Итакъ молекула водорода вѣситъ около 36.10^{-25} грамма; среднее разстояніе двухъ сосѣднихъ молекулъ всякаго газа, имѣющаго температуру 0°С. и находящагося подъ давленіемъ атмосферы, равно приблизительно 34.10^{-8} сантиметра. Наименьшее-же разстояніе двухъ смежныхъ молекулъ есть ρ; поэтому объемъ водорода, находившагося первоначально подъ давленіемъ атмосферы при 0°С., никакимъ давленіемъ не можетъ быть уменьшенъ болѣе, чѣмъ въ 4900 разъ; объемъ углекислоты при тѣхъ-же условіяхъ нельзя уменьшить болѣе, чѣмъ въ 440 разъ.

§ 9. Произведенное нами въ § 5 вычисленіе выраженія SRr предполагаетъ, что $n>4$. Посмотримъ теперь, что будетъ, если мы примемъ n меньшимъ 4. Въ такомъ случаѣ способъ разсужденія, которымъ мы пользовались въ § 5 при вычисленіи SRr, не примѣнимъ; суммованіе по k въ формулѣ (7) § 5 должно быть теперь распространено на *всѣ* молекулы газовой массы, а не на тѣ лишь изъ нихъ, которыя лежатъ внутри сферы молекулярнаго притяженія, описанной около центра $i^{ой}$ молекулы. Обозначая черезъ x, y, z координаты центра $i^{ой}$, черезъ ξ, η, ζ—координаты центра $k^{ой}$ молекулы, черезъ do и $d\omega$—элементы объема, взятые соотвѣтственно при точкахъ (x, y, z) и (ξ, η, ζ), найдемъ, что въ данномъ случаѣ

$$\overline{SRr} = \frac{1}{2}\overline{\Sigma\Sigma R_{ik} \cdot r_{ik}}^{\,i\,k} = \frac{1}{2}N^2 \int do \int Rr d\omega,$$

при чемъ интеграціи по o и ω распространяются на весь объемъ, занятый газомъ; R и r суть функціи x, y, z, ξ, η, ζ.

Если мы примемъ $n=1$, то $Rr=hm^2$, и

$$\overline{SRr} = \frac{h}{2}N^2m^2 \int do \int d\omega = \frac{h}{2}N^2v^2m^2. \tag{1}$$

Итакъ виріалъ силъ сцѣпленія оказывается при этой гипотезѣ величиной постоянной. Если примемъ опять всю массу газа, заключеннаго въ оболочку, за единицу, то формула (1) обратится въ

$$SRr = \frac{h}{2},$$

а вмѣсто формулы (3) § 7 получится такая:

$$pv + \frac{h}{6} - \frac{b}{v}G^2\left(1 + \frac{c}{v}\right) = \frac{A}{m} + \frac{1}{3}G^2.$$

Изотерма 0°С. будетъ слѣдовательно имѣть уравненіемъ

$$pv - \frac{bG_0^2}{v} - \frac{bcG_0^2}{v^2} = \frac{h}{6} + \frac{A}{m} + \frac{1}{3}G_0^2. \tag{2}$$

Уравненіе (2) согласуется по формѣ съ эмпирической формулой Реньо *лишь для случая водорода* (см. формулу (30) § 7); поэтому гипотеза, по которой сила молекулярнаго притяженія обратно пропорціональна разстоянію, должна быть отброшена.

Положимъ теперь, что $n=2$, т. е. допустимъ Ньютоніанское взаимодѣйствіе между молекулами. Въ такомъ случаѣ

$$\overline{SRr} = \frac{h}{2}N^2m^2 \int do \int \frac{d\omega}{r}. \tag{3}$$

Интегралъ, стоящій въ правой части уравненія (3), *зависитъ отъ формы внутренней поверхности оболочки*, заключающей газъ. Итакъ въ данномъ случаѣ *виріалъ силъ сцѣпленія зависитъ отъ внутренней формы содержащаго газъ сосуда*; заключеніе это крайне неправдоподобно, а потому гипотеза, о которой рѣчь, несостоятельна. По той-же причинѣ должны быть отброшены и всѣ остальныя гипотезы, при которыхъ n меньше 4 и не равно единицѣ; лишь въ послѣднемъ случаѣ виріалъ силъ сцѣпленія оказывается независящимъ отъ формы сосуда.

Положимъ, что внутренняя поверхность оболочки — сфера. тогда интегралъ въ правой части формулы (3) легко вычислить.

$$\int\frac{d\omega}{r}$$

есть потенціалъ однородной сферы плотности равной единицѣ (при коеффиціентѣ притяженія равномъ единицѣ) на точку (x, y, z), лежащую внутри ея. Итакъ, если мы возьмемъ начало координатъ въ центрѣ сферы, обозначимъ радіусъ ея черезъ R и положимъ $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, то

$$\int\frac{d\omega}{r}=2\pi\left(R^2-\frac{\rho^2}{3}\right).$$

do можно положить равнымъ $4\pi\rho^2 d\rho$, а потому

$$\int do\int\frac{d\omega}{r}=8\pi^2\int_0^R\left(R^2-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho^2 d\rho=\frac{32\pi^2}{15}R^5=\frac{2}{5}\sqrt[3]{36\pi.v^{\frac{5}{3}}}.$$

Итакъ въ данномъ случаѣ

$$\overline{SRr}=\frac{1}{5}\sqrt[3]{36\pi}.\frac{1}{v^{1/3}},$$

т. е. виріалъ силъ сцѣпленія обратно пропорціоналенъ корню кубическому изъ объема газа.

Изъ вышеизложеннаго слѣдуетъ заключить, что n должно быть болѣе 4.

§ 10. Въ видахъ контроля надъ нашей теоріей примѣнимъ ее къ явленію, опытнымъ изученіемъ котораго занимались Джауль и В. Томсонъ, а именно къ прохожденію газовъ сквозь пористыя перегородки.

Опыты Джауля и Томсона состояли въ томъ, что газъ вытекалъ черезъ пористую перегородку изъ резервуара съ постояннымъ давленіемъ p_1 въ пространство съ постояннымъ давленіемъ p_2 (понятно, что $p_2 < p_1$), при чемъ измѣрялась температура газа до и послѣ прохожденія сквозь перегородку. Оказалось изъ этихъ опытовъ, что температура всѣхъ газовъ, за исключеніемъ водорода, при такомъ процессѣ понижается. Вычислимъ величину этого измѣненія температуры на основаніи нашей теоріи.

Положимъ, что черезъ перегородку прошла единица массы (1 gr.) газа; объемъ этой массы въ резервуарѣ съ давленіемъ p_1 пусть будетъ v_1, а въ пространствѣ съ давленіемъ p_2—v_2; энергія разсматриваемой газовой массы до прохожденія черезъ перегородку пусть будетъ E_1, а послѣ прохожденія—E_2.

Внѣшніе силы, выгонявшія разсматриваемую газовую массу изъ резервуара, совершили къ концу процесса работу $p_1 v_1$; разширяясь вопреки давленію p_2, газъ отдалъ наружу работу $p_2 v_2$; въ итогѣ газъ получилъ работу $p_1 v_1 - p_2 v_2$, которая и пошла на увеличеніе его энергіи. Итакъ

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 = E_2 - E_1. \qquad (1)$$

На основаніи формулы (3) § 7, въ которой пренебрежемъ членомъ втораго порядка малости,

$$p_1 v_1 - p_2 v_2 = \frac{a - bG_2^2}{v_2} - \frac{a - bG_1^2}{v_1} + {}^1/_3(G_1^2 - G_2^2), \qquad (2)$$

гдѣ G_1—значеніе G при температурѣ, которую имѣлъ газъ до

прохожденія черезъ перегородку, а G_2—значеніе, которое получаетъ G послѣ расширенія газа.

Найдемъ теперь выраженіе для энергіи (E) газа. Энергія эта слагается изъ двухъ частей, кинетической и потенціальной; кинетическая энергія равна въ данномъ случаѣ (такъ какъ мы разсматриваемъ единицу массы)

$$\tfrac{1}{2}G^2.$$

Вычислимъ потенціальную энергію. Потенціальная энергія двухъ молекулъ (i и k) есть

$$-\frac{hm^2}{n-1}\cdot\frac{1}{r_{ik}^{n-1}}+\text{const.},$$

а потому потенціальная энергія всей газовой массы выразится черезъ

$$\text{const.}-\frac{hm^2}{n-1}S\frac{1}{r_{ik}^{n-1}},$$

гдѣ знакъ S выражаетъ суммованіе, распространенное на всѣ пары молекулъ газовой массы.

Подобно тому, какъ въ § 5, будемъ имѣть:

$$S\frac{1}{r_{ik}^{n-1}}=\tfrac{1}{2}\overset{i}{\Sigma}\overset{k}{\Sigma}\frac{1}{r_{ik}^{n-1}}=\tfrac{1}{2}Nv\overline{\overset{k}{\Sigma}\frac{1}{r_{ik}^{n-1}}}=2\pi N^2v\int_{\rho}^{\delta}\frac{dr}{r^{n-3}}=\frac{2\pi}{n-4}\cdot\frac{N^2v}{\rho^{n-4}}.$$

Итакъ потенціальная энергія разсматриваемой массы газа равна

$$\text{const.}-\frac{2\pi}{(n-1)(n-4)}\frac{h}{\rho^{n-4}}N^2m^2v=\text{const.}-\frac{2\pi}{(n-1)(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\cdot\frac{1}{v}.$$

Слѣдовательно

$$E_2-E_1=\frac{2\pi}{(n-1)(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)+\tfrac{1}{2}(G_2^2-G_1^2). \qquad (3)$$

Въ силу формулъ (2) и (3), уравненіе (1) обращается въ

$$\frac{5}{6}(G_2^2-G_1^2)=\frac{a-bG_2^2}{v_2}-\frac{a-bG_1^2}{v_1}+\frac{2\pi}{(n-1)(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right). \quad (4)$$

Далѣе

$$G_2^2-G_1^2=\frac{G_0^2}{273}\Delta t,$$

гдѣ Δt означаетъ искомое приращеніе температуры (въ градусахъ Цельзія) газа при разсматриваемомъ процессѣ. Опытъ показываетъ, что Δt бываетъ обыкновенно очень мало: при $p_1-p_2=$ атмосферѣ, Δt не достигаетъ для большинства газовъ $(\frac{1}{3})^0$C. Какъ явствуетъ изъ числовыхъ данныхъ, приведенныхъ въ § 7, bG_0^2 есть величина такого-же порядка, какъ и a; слѣдовательно $b(G_2^2-G_1^2)=bG_0^2\frac{\Delta t}{273}$ есть величина малая сравнительно съ a, а потому, довольствуясь приближеніемъ, можемъ положить въ правой части уравненія (4) $G_2=G_1=G$, гдѣ G—значеніе средней молекулярной скорости при температурѣ опыта. Тогда уравненіе (4) приметъ видъ

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{G_0^2}{273}\Delta t=\left\{a+\frac{2\pi}{(n-1)(n-4)}\frac{h}{\rho^{n-4}}-bG_0^2\right\}\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right). \quad (5)$$

На основаніи приблизительно вѣрнаго уравненія

$$pv=\frac{1}{3}G^2$$

разность $\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}$ можно замѣнить черезъ $\frac{3(p_2-p_1)}{G^2}$ (G^2 относится къ температурѣ опыта). Формула (5) перепишется тогда такъ

$$\Delta t=983\left\{a+\frac{2\pi}{(n-1)(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}-bG_0^2(1+0{,}00366.t)\right\}\cdot\frac{p_2-p_1}{G_0^4(1+0{,}00366.t)}$$

(здѣсь t—температура газа во время опыта), или

$$\Delta t = 983\left\{\frac{n+2}{n-1}a - bG_0^2(1+0,00366.t)\right\}\frac{p_2-p_1}{G_0^4(1+0,00366.t)}. \quad (6)$$

Положимъ $n=5$. Тогда формула (6) обратится въ

$$\Delta t = 983\{{}^7/_4 a - bG_0^2(1+0,00366.t)\}.\frac{p_2-p_1}{G_0^4(1+0,00366.t)}. \quad (7)$$

Примѣнимъ формулу (7) къ воздуху. Положимъ, что $p_1 - p_2 =$ атмосферѣ$=101.10^4 \frac{Dn.}{(cm)^2}$ а $t=20°$C. Значеніе постояннаго a для воздуха приведено въ § 7: $a=151.10^7$; что касается до bG_0^2, то это количество равно въ данномъ случаѣ 101.10^7. Подставивъ всѣ эти данныя въ формулу (7), найдемъ изъ нея, что

$$\Delta t = -0,264°C.$$

При тѣхъ же условіяхъ опыта Джауль и Томсонъ нашли въ среднемъ, что

$$\Delta t = -0,260°C.$$

Изъ такого замѣчательнаго согласія теоріи съ опытомъ можно съ нѣкоторымъ вѣроятіемъ заключить, что постоянное a опредѣленно нами для воздуха вѣрно, и что n должно быть дѣйствительно близко къ 5.

Для углекислоты $a=247.10^7$, $bG_0^2=817.10^6$ (я беру данныя, выведенныя изъ формулы (26) § 7; формула (27), какъ уже было замѣчено, не такъ надежна). Итакъ, принявъ $t=20°$C., p_1-p_2=атмосферѣ, найдемъ изъ формулы (7), что

$$\Delta t = -1,34°C.$$

Джауль и Томсонъ нашли при тѣхъ-же обстоятетьствахъ

$$\Delta t = -1,15°C.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Нѣкоторыя соображенія относительно жидкаго состоянія вещества.

§ 1. Положимъ, что нашему разсмотрѣнію подлежитъ однородная жидкость, не подверженная дѣйствію внѣшнихъ силъ, кромѣ давленія со стороны оболочки, всюду одинаковаго и равнаго p.

Наша основная гипотеза будетъ состоять въ томъ, что молекулы жидкости суть совершенно упругіе, твердые шары діаметра ρ, находящіеся въ быстромъ движеніи, причемъ средняя скорость молекулы есть нѣкоторая функція температуры жидкости; молекулы дѣйствуютъ одна на другую весьма энергическими притятельными силами, причемъ сила взаимодѣйствія двухъ молекулъ направлена по линіи соединенія ихъ центровъ и, по величинѣ своей, обратно пропорціональна n-ой степени разстоянія между этими центрами; среднее разстояніе между двумя сосѣдними молекулами настолько мало, что длина пути молекулы въ промежутокъ времени между двумя послѣдовательными ея столкновеніями есть величина такого-же порядка, какъ помянутое разстояніе; другими словами, жидкость отличается въ этомъ отношеніи отъ газа тѣмъ, что въ газѣ молекула пролетаетъ мимо многихъ себѣ подобныхъ, прежде чѣмъ претерпѣть столкновеніе, тогда какъ молекула жидкости минуетъ первую встрѣчную ей молекулу лишь весьма рѣдко.

Къ такой системѣ движущихся молекулъ мы можемъ приложить уравненіе

$$pv-\frac{1}{3}\rho mvS\left(\frac{dr}{dt}\right)+\frac{1}{3}\overline{SRr}-AvN=\frac{1}{3}vNmG^2. \qquad (1)$$

Въ случаѣ газа 2-ой и 3-ій члены лѣвой части этого уравненія суть величины малыя, играющіе роль поправокъ; въ случаѣ жидкости члены эти получаютъ преобладающее значеніе. Приступимъ къ вычисленію этихъ членовъ для случая жидкости.

Знакъ S въ выраженіи $S\left(\frac{dr}{dt}\right)$ означаетъ суммованіе, распространенное на всѣ столкновенія, происходящія въ единицу времени въ единицѣ объема. Итакъ намъ надо будетъ найти выраженіе для числа молекулярныхъ столкновеній въ интересующемъ насъ случаѣ. Такъ какъ путь молекулы въ промежутокъ времени между двумя послѣдовательными ея столкновеніями чрезвычайно малъ, то мы будемъ, довольствуясь приближеніемъ, считать этотъ путь прямолинейнымъ; допущеніе это тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ меньше разстоянія между молекулами жидкости; оно значительно облегчитъ намъ нашу задачу. Кромѣ того я приму, какъ это дѣлаетъ Клаузіусъ по отношенію къ газамъ, что всѣ молекулы жидкости обладаютъ одной и той-же постоянной скоростью G. Допущеніе Клаузіуса въ теоріи газовъ ведетъ къ результатамъ несомнѣнно годнымъ въ качествѣ перваго приближенія; мы въ правѣ надѣяться, что то-же имѣетъ мѣсто и для жидкостей.

Обозначимъ черезъ $\mathfrak{B}$ относительную скорость двухъ молекулъ жидкости, направленія движенія которыхъ образуютъ между собой уголъ φ. Очевидно, что

$$\mathfrak{B}=\sqrt{2}.G\sqrt{1-\cos\varphi}.$$

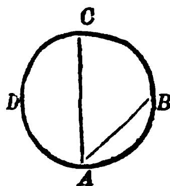
Всевозможныя направленія движенія молекулы мы будемъ считать одинаково вѣроятными. Въ такомъ случаѣ вѣроятность того, чтобы уголъ φ заключался между φ и $\varphi+d\varphi$, будетъ

$$\tfrac{1}{2}\sin\varphi\, d\varphi.$$

Обозначимъ черезъ $\overline{\mathfrak{B}}$ среднее различныхъ значеній $\mathfrak{B}$, соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніямъ φ. Будемъ имѣть:

$$\overline{\mathfrak{B}}=\frac{1}{\sqrt{2}}G\int_0^\pi\sqrt{1-\cos\varphi}\,\sin\varphi d\varphi=\tfrac{4}{3}G. \qquad (2)$$

Для того, чтобы опредѣлить приблизительно число столкновеній какой нибудь молекулы жидкости въ единицу времени, я представляю себѣ, что центръ этой молекулы движется со скоростью $\overline{\mathfrak{B}}$ внутри сферы радіуса $\sigma-\rho$, гдѣ σ—среднее растояніе между двумя сосѣдними молекулами, отражаясь отъ поверхности сферы по законамъ совершеннаго удара. По всей вѣроятности, такое представленіе есть лишь грубое приближеніе къ дѣйствительности; оно воплощаетъ ту мысль, что молекула жидкости лишь въ чрезвычайно рѣдкихъ случаяхъ минуетъ при своемъ движеніи первую ей встрѣчную молекулу, и что такимъ образомъ молекулярное движеніе въ жидкостяхъ не есть свободное, а подобно колебательному.



Положимъ, что $ABCD$ (см. прилагаемый чертежъ) есть разрѣзъ сферы радіуса $R=\sigma-\rho$; положимъ, что центръ разсматриваемой молекулы находится въ данный моментъ въ A и приходитъ въ движеніе по направленію AB со скоростью $\overline{\mathfrak{B}}$. Положеніе центра нашей молекулы въ A соотвѣтствуетъ одному, положеніе его въ B—другому столкновенію этой молекулы. Промежутокъ времени между обоими столкновеніями равенъ

$$\overline{AB}:\overline{\mathfrak{B}},$$

или

$$2R\cos\varphi:\overline{\mathfrak{B}},$$

гдѣ φ означаетъ уголъ между хордой AB и діаметромъ AC.

Такъ какъ мы считаемъ равновѣроятными всевозможныя на-

правленія движенія какой либо молекулы, вѣроятность того, чтобы уголъ φ заключался между φ и $\varphi+d\varphi$, равна отношенію поверхности зоны съ полярными углами φ и $\varphi+d\varphi$ къ поверхности полусферы, т. е.

$$\frac{2\pi \sin\varphi\, d\varphi}{2\pi}=\sin\varphi\, d\varphi.$$

Итакъ *средняя* продолжительность промежутка времени между двумя послѣдовательными столкновеніями молекулы есть

$$\frac{2R}{\overline{\mathfrak{V}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

или

$$R:\overline{\mathfrak{V}}=\tfrac{3}{4}\frac{\sigma-\rho}{G}\text{(см. формулу (2)).}$$

Среднее же число столкновеній какой нибудь молекулы въ единицу времени будетъ

$$\tfrac{4}{3}\cdot\frac{G}{\sigma-\rho}.$$

Умноживъ выраженіе (3) на N—число молекулъ въ единицѣ объема, получимъ очевидно удвоенное число столкновеній, происходящихъ въ единицу времени въ единицѣ объема; слѣдовательно это послѣднее число равно

$$\tfrac{2}{3}\cdot\frac{NG}{\sigma-\rho}.$$

Положимъ, что при какомъ нибудь столкновеніи двухъ молекулъ направленіе относительной скорости ихъ образуетъ съ линіей центровъ уголъ ψ. Для такого соударенія

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)=\overline{\mathfrak{V}}\,.\cos\psi.$$

Вѣроятность того, чтобы ψ заключалось между ψ и $\psi+d\psi$, есть

$$2\cos\psi \sin\psi \, d\psi \text{ (см. § 4)},$$

а потому $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ равна *въ среднемъ*

$$2\overline{\mathfrak{B}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi \sin\psi \, d\psi = \tfrac{2}{3}\overline{\mathfrak{B}} = \tfrac{8}{9}G.$$

Итакъ

$$S\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{16}{27}\cdot\frac{NG^2}{\sigma-\rho},$$

и слѣдовательно второй членъ уравненія (1) будетъ

$$-\frac{16}{81}\cdot Nmv\cdot\frac{\rho}{\sigma-\rho}\cdot G^2.$$

Для упрощенія дальнѣйшихъ вычисленій, претендующихъ не болѣе какъ на опредѣленіе *порядка* величинъ, которыми характеризуется строеніе жидкостей, я замѣню въ этомъ выраженіи факторъ $\frac{16}{81}$ приблизительно равнымъ ему факторомъ $\frac{1}{5}$.

Что касается третьяго члена уравненія (1), то вычисленіе его для даннаго случая будетъ происходить тѣмъ же путемъ, какъ въ § 5. Также, какъ и тамъ, найдемъ, что

$$\tfrac{1}{3}\overline{SRr}=\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\cdot N^2m^2v.$$

Итакъ уравненіе (1) принимаетъ видъ

$$pv-\tfrac{1}{5}\cdot\frac{\rho}{\sigma-\rho}\cdot G^2\cdot Nmv+\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\cdot N^2m^2v-AvN=\tfrac{1}{3}NvmG^2,$$

или, если примемъ, что разсматриваемая масса жидкости равна единицѣ, такъ что $Nmv=1$,

$$pv-\tfrac{1}{6}.\frac{\rho}{\sigma-\rho}.G^2+\frac{2\pi}{3(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}.\frac{1}{v}-\frac{A}{m}=\tfrac{1}{3}G^2. \qquad (4)$$

Вотъ окончательный видъ уравненія виріала для жидкостей при сдѣланныхъ нами предположеніяхъ. Онъ отличается отъ соотвѣтствующаго уравненія для газовъ вторымъ своимъ членомъ. Кромѣ того въ случаѣ газа второй и третій члены уравненія виріала малы сравнительно съ pv; въ случаѣ жидкости, какъ увидимъ изъ дальнѣйшаго, наоборотъ, pv мало по сравненію съ вторымъ и третьимъ членами уравненія (4).

§ 2. Положимъ, что разсматриваемая нами единица массы жидкости испытываетъ безконечно малый изотермическій процессъ. Дифференцируя уравненіе (4) § 1 при постоянной температурѣ, а слѣдовательно при постоянномъ G, и замѣчая, что σ зависитъ отъ v, получаемъ такое уравненіе помянутаго процесса:

$$pdv+vdp+\tfrac{1}{6}\frac{\rho}{(\sigma-\rho)^2}.G^2.\frac{d\sigma}{dv}dv-\frac{2\pi}{3(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}.\frac{1}{v^2}dv=0. \quad (1)$$

Если среднее разстояніе между двумя смежными молекулами увеличивается на $d\sigma$, то линейное удлиненіе внутри жидкости при такой деформаціи равно $\frac{d\sigma}{\sigma}$; кубическое расширеніе, соотвѣтствующее этому линейному удлиненію, есть $\frac{dv}{v}$; между этими величинами существуетъ соотношеніе

$$1+\frac{dv}{v}=\left(1+\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^3,$$

откуда

$$\frac{d\sigma}{dv}=\tfrac{1}{3}.\frac{\sigma}{v}.$$

Далѣе выраженіе

$$-\frac{vdp}{dv},$$

относящееся къ изотермическому процессу, представляетъ изотермическій коэффиціентъ упругости; обозначимъ эту величину черезъ E_i.

Итакъ уравненіе (1) обращается въ

$$p-E_i+\frac{1}{15}\cdot\frac{\rho\sigma}{(\sigma-\rho)^2}\cdot\frac{G^2}{v}-\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\cdot\frac{1}{v^2}=0. \qquad (2)$$

Разсмотримъ еще безконечно малый процессъ термическаго расширенія жидкости при постоянномъ давленіи. Обозначая абсолютную температуру черезъ T и дифференцируя уравненіе (4) § 1 при постоянномъ p, получаемъ:

$$pdv+\frac{1}{15}\cdot\frac{\rho\sigma}{(\sigma-\rho)^2}\cdot\frac{G^2}{v}dv-\frac{1}{5}\cdot\frac{\rho}{\sigma-\rho}\cdot\frac{dG^2}{dT}.dT-\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\cdot\frac{1}{v^2}.dv=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{dT}{dG^2}.d\Gamma. \qquad (3)$$

Въ силу уравненія (2) уравненіе (3) обращается въ

$$E_i dv=\frac{1}{15}\cdot\frac{5\sigma-2\rho}{\sigma-\rho}\cdot\frac{dG^2}{dT}.dT. \qquad (4)$$

Относительно газовъ мы знаемъ, что G^2 пропорціонально T; зависимость G^2 отъ T для жидкостей намъ неизвѣстна; мы можемъ съ большимъ вѣроятіемъ утверждать лишь то, что G^2 *возрастаетъ съ возрастаніемъ температуры*, такъ что $\frac{dG^2}{dT}$ *есть величина положительная.*

Выраженіе

$$\frac{dv}{vdT}$$

представляетъ коэффиціентъ термическаго расширенія жидкости; обозначимъ его черезъ α.

Уравненіе (4) можетъ быть переписано такъ:

$$E_i\alpha=\frac{1}{15}.\frac{5\sigma-2\rho}{\sigma-\rho}.\frac{dG^2}{dT}.\frac{1}{v}. \qquad (5)$$

Такъ какъ $\sigma>\rho$ и $\frac{dG^2}{dT}$ положительно, формула (5) не можетъ давать для α отрицательныхъ значеній; слѣдовательно наша теорія въ настоящемъ ея видѣ не объясняетъ аномальнаго явленія, представляемаго водой при температурахъ, низшихъ 4°С.; да и само собою очевидно, что ключемъ къ объясненію этого явленія не можетъ быть наше основное представленіе о жидкости какъ объ аггрегатѣ движущихся шаровъ *неизмѣнныхъ* размѣровъ, скорости которыхъ *возрастаютъ* съ возрастаніемъ температуры.

§ 3. Въ уравненія (2) и (5) предъидущаго § входятъ величины E_i и α, извѣстныя намъ на основаніи опыта для многихъ жидкостей. Я покажу теперь, какъ можно воспользоваться этими уравненіями, чтобы найти числовыя значенія разныхъ гипотетическихъ величинъ, характеризующихъ строеніе жидкостей.

Я сдѣлаю предположеніе, которое, какъ увидимъ, и оправдывается на самомъ дѣлѣ, что, при *обычныхъ* условіяхъ давленія, членъ pv уравненія (4) § 1 малъ по сравненію со вторымъ и третьимъ членами того-же уравненія; итакъ, пренебрегая этимъ членомъ, а также членомъ $\frac{A}{m}$, я представлю это уравненіе въ такомъ видѣ:

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}.\frac{1}{v}=\frac{1}{15}.\frac{5\sigma-2\rho}{\sigma-\rho}.G^2. \qquad (1)$$

Сжимаемость жидкотей весьма мала; для того, чтобы ее замѣтить и измѣрить, требуются весьма большія давленія. Поэтому коэффиціентъ E_i есть величина весьма большая, и, если начальное давленіе p жидкости, подвергаемой изотермическому сжатію, близко къ атмосферному, то это p бываетъ обыкновенно во много разъ менѣе E_i (см. § 4). Итакъ, предполагая, что величина E_i

опредѣлена изъ опыта, при которомъ начальное давленіе жидкости было равно атмосферному, я пренебрегу въ уравненіи (2) § 2 величиной p передъ E_i.

Исключивъ кромѣ того изъ этого уравненія величину

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}\cdot\frac{h}{\rho^{n-4}}\cdot\frac{1}{v^2}$$

при помощи уравненія (1), я представлю его въ такомъ видѣ:

$$F_i=\frac{1}{15}\cdot\frac{8\sigma\rho-5\sigma^2-2\rho^2}{(\sigma-\rho)^2}\cdot\frac{G^2}{v},$$

или, положивъ

$$\frac{\rho}{\sigma}=\varepsilon,$$

$$15.E_i=\frac{8.\varepsilon-5-2.\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}\cdot\frac{G^2}{v}. \qquad (2)$$

Сдѣлаю гипотезу, что

$$G^2=cT^\nu,$$

гдѣ c и ν—нѣкоторыя положительныя постоянныя.

Тогда уравненіе (5) § 2 представится такъ:

$$15.E_i.\alpha=\frac{5-2\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{G^2}{v}\cdot\frac{\nu}{T}. \qquad (3)$$

Въ уравненіяхъ (2) и (3) фигурируютъ три неизвѣстныя намъ величины: ε, ν, G. Для того, чтобы опредѣлить эти неизвѣстныя, я присоединю къ уравненіямъ (2) и (3) новое уравненіе, которое получается при разсмотрѣніи процесса перехода жидкости въ парообразное состояніе.

Положимъ, что разсматриваемая нами единица массы жидкости переходитъ въ паръ той-же температуры. Назовемъ «скрытую теплоту» парообразованія λ, среднюю молекулярную скорость

пара g. Теплота λ (предполагаемъ, что она выражена въ механическихъ единицахъ) слагается изъ двухъ частей: изъ приращенія потенціальной энергіи вещества при переходѣ его изъ жидкаго состоянія въ парообразное и изъ приращенія его кинетической энергіи.

Приращеніе кинетической энергіи при парообразованіи есть

$$\tfrac{1}{2}Nmvg^2-\tfrac{1}{2}NmvG^2,$$

или, такъ какъ $Nmv=1$,

$$\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}G^2.$$

Совершенно также, какъ въ § 10 первой главы, найдемъ, что потенціальная энергія единицы массы жидкости выражается черезъ

$$\text{const.}-\frac{2\pi}{(n-1).(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}.\frac{1}{v}. \qquad (4)$$

Потенціальная энергія единицы массы пара выразится совершенно такимъ же образомъ, и постоянныя, фигурирующія въ выраженіи (4), будутъ имѣть для пара тѣ же значенія, какъ и для жидкости, только въ случаѣ пара v (удѣльный объемъ) будетъ въ нѣсколько сотъ разъ болѣе, чѣмъ въ случаѣ жидкости. Отсюда заключаемъ, что приращеніе потенціальной энергіи единицы массы вещества при переходѣ его изъ состоянія жидкаго въ состояніе газообразное съ значительнымъ приближеніемъ можетъ быть выражено черезъ

$$+\frac{2\pi}{(n-1).(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}.\frac{1}{v},$$

гдѣ v есть удѣльный объемъ жидкости.

Итакъ имѣемъ уравненіе

$$\tfrac{1}{2}g^2-\tfrac{1}{2}G^2+\frac{2\pi}{(n-1).(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}.\frac{1}{v}=\lambda. \qquad (5)$$

Исключивъ изъ уравненія (5)

$$\frac{h}{\rho^{n-4}}\cdot\frac{1}{v}$$

при помощи уравненія (1), представимъ его въ такомъ видѣ:

$$\lambda-\tfrac{1}{2}g^2=\frac{10-5(n-1)+(5n-9).\varepsilon}{10(n-1)(1-\varepsilon)}.G^2. \qquad (6)$$

Величина g извѣстна для паровъ многихъ жидкостей; поэтому, если мы окончательно спеціализируемъ гипотезу о взаимодѣйствіи на разстояніи молекулъ жидкости, приписавъ числу n опредѣленное значеніе, уравненіе (6), будучи присоединено къ уравненіямъ (2) и (3), даетъ возможность опредѣлить неизвѣстныя ε, ν, G.

Излагая въ § 10 первой главы теорію опытовъ Джауля и Томсона надъ прохожденіемъ газовъ сквозь пористыя перегородки, я принялъ для воздуха и углекислоты $n=5$; результаты вычисленій, основанныхъ на этомъ предположеніи, оказались въ удовлетворительномъ согласіи съ опытомъ. Отсюда можно заключить, что для названныхъ газовъ n дѣйствительно должно быть близко къ 5. Далѣе, весьма правдоподобнымъ представляется предположеніе, что законъ молекулярныхъ взаимодѣйствій долженъ быть одинаковъ для всѣхъ веществъ природы и во всѣхъ ихъ состояніяхъ. Вотъ мотивы, которые меня побуждаютъ сдѣлать гипотезу, что и для жидкостей $n=5$. Въ этомъ предположеніи уравненіе (6) обращается въ

$$20(\lambda-\tfrac{1}{2}g^2)=\frac{8.\varepsilon-5}{1-\varepsilon}.G^2. \qquad (7)$$

§ 4. Примѣнимъ уравненія (2), (3) и (7) § 3 къ нѣкоторымъ жидкостямъ. Наиболѣе изученными въ опытномъ отношеніи жидкостями являются вода, спиртъ и эѳиръ; ими то мы и

займемся. Понятно, что отъ послѣднихъ двухъ жидкостей мы въ правѣ ожидать лучшихъ результатовъ, чѣмъ отъ воды, которая обнаруживаетъ извѣстное аномальное явленіе, необъяснимое съ точки зрѣнія нашей теоріи. Начнемъ съ эѳира. Вычисленія наши будутъ относиться къ температурѣ 0°C. При этой температурѣ для эѳира

$E_i = 91.10^8 \frac{Dn.}{(cm)^2}$ [1], v (объемъ 1 грамма) $= 1{,}36\ (cm)^3$ [2], $\alpha = 0{,}00151$ [3], $\lambda = 94$ (граммокал.) $= 94.42.10^6 = 395.10^7$ (erg.) [4], $g = 30200 \frac{cm.}{sec.}$ [5].

Далѣе, значеніе T, соотвѣтствующее нулю Цельзія, есть 273.

Подставивъ всѣ эти числа въ уравненія (2), (3) и (7) § 3, получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$\frac{8.\varepsilon - 5 - 2.\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2} G^2 = 186.10^9, \tag{1}$$

$$\frac{5 - 2.\varepsilon}{1-\varepsilon} . \nu . G^2 = 766.10^8, \tag{2}$$

$$\frac{8.\varepsilon - 2}{1-\varepsilon} . G^2 = 7.10^{10}. \tag{3}$$

Раздѣливъ уравненіе (3) на (1), получимъ:

$$\frac{13.\varepsilon - 5 - 8.\varepsilon^2}{8.\varepsilon - 5 - 2.\varepsilon^2} = 0{,}377,$$

или

$$\varepsilon^2 - \frac{998}{725} . \varepsilon + \frac{312}{725} = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ два положительныхъ корня; меньшій изъ нихъ не соотвѣтствуетъ нашей задачѣ, ибо даетъ для ν отрицательное значеніе; большій есть

$$\varepsilon = 0{,}898.$$

[1] Grassi. [2] Kopp. [3] Pierre. [4] Regnault. [5] O. E. Meyer.

Итакъ отношеніе ρ къ σ для эѳира довольно близко къ единицѣ, и, стало быть, молекулы этой жидкости расположены довольно тѣсно.

Соединяя уравненіе (3) со (2), находимъ, что

$$\nu=0,745.$$

Наконецъ

$$G=57200\frac{cm.}{sec.}$$

Итакъ *средняя молекулярная скорость эѳира въ жидкомъ состояніи болѣе средней молекулярной скорости эѳирныхъ паровъ той же температуры*; другими словами, потенціальная энергія эѳира получаетъ при переходѣ его изъ жидкаго въ газообразное состояніе приращеніе большее, чѣмъ какое могло бы быть вызвано сообщеніемъ эѳиру теплоты λ, при чемъ этотъ избытокъ возникаетъ на счетъ убыли кинетической энергіи при парообразованіи.

Опредѣлимъ еще величину $\frac{\pi}{2}.\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v}$, которая понадобится намъ въ дальнѣйшемъ. Положивъ въ уравненіи (1) § 3 $n=5$, найдемъ изъ него него, что

$$\frac{\pi}{2}.\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v}=514.10^7.$$

Въ качествѣ перваго пробнаго камня вышеизложенныхъ теоретическихъ соображеній изберемъ теоретическое вычисленіе величины *теплоемкости* эѳира. Понятно, что въ данномъ случаѣ мы можемъ разсчитывать на согласіе теоріи съ опытомъ лишь на столько, что *порядокъ* опредѣляемой нами теоретически величины долженъ быть найденъ вѣрно; полнаго согласія нельзя ожидать потому, что теорія наша построена на предположеніяхъ, представляющихъ по всей вѣроятности лишь грубое приближеніе къ дѣйствительности; такъ, напримѣръ, произведенное нами въ

§ 1 опредѣленіе числа молекулярныхъ столкновеній носитъ характеръ лишь схематическій: оно основано на представленіяхъ, могущихъ имѣть лишь *качественное* подобіе съ дѣйствительностью.

Для жидкостей мы знаемъ на основаніи опыта лишь теплоемкость при постоянномъ давленіи; обозначимъ эту величину (выраженную въ механическихъ единицахъ) черезъ C_p. Это C_p слагается изъ двухъ частей: одна часть идетъ на увеличеніе кинетической энергіи единицы массы жидкости при повышеніи температуры ея на одинъ градусъ, другая — на увеличеніе потенціальной энергіи жидкости, связанное съ ея термическимъ расширеніемъ (внѣшняя работа обладаетъ, какъ сейчасъ увидимъ, ничтожной въ сравненіи съ C_p величиной, если постоянное во время процесса расширенія жидкости давленіе близко къ атмосферному).

Приращеніе кинетической энергіи единицы массы жидкости при повышеніи температуры ея на 1 градусъ выразится черезъ

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dG^2}{dT}=\frac{\nu}{2}\cdot\frac{G^2}{T}.$$

Потенціальная энергія единицы массы жидкости, если $n=5$, есть

$$\text{const.}-\frac{\pi h}{2}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{v}\ \text{(см. выраженіе (4) § 3)};$$

приращеніе ея при повышеніи температуры жидкости на градусъ выразится черезъ

$$+\frac{\pi h}{2}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{1}{v^2}\cdot\frac{dv}{dT}=+\frac{\pi h}{2}\cdot\frac{\alpha}{\rho}\cdot\frac{\alpha}{v}.$$

Итакъ

$$C_p=\frac{\nu}{2}\cdot\frac{G^2}{T}+\frac{\pi h}{2}\cdot\frac{\alpha}{\rho}\cdot\frac{\alpha}{v}.$$

Для эѳира при 0°С, на основаніи вышеприведенныхъ данныхъ,

$$\frac{\nu}{2}\cdot\frac{G^2}{T}=447.10^4(\text{erg.}),\ \frac{\pi h}{2}\cdot\frac{\alpha}{\rho}\cdot\frac{\alpha}{v}=776.10^4(\text{erg.}),$$

и, слѣдовательно,

$$C_p = 12{,}2.10^6 \text{ (erg.) (для градуса Цельзія).}$$

Если давленіе, подъ которымъ находится жидкость при расширеніи, равно атмосферному, т. е. $=101.10^4 \dfrac{Dn.}{(cm.)^2}$, то внѣшняя работа, совершенная при расширеніи, соотвѣтствующемъ повышенію температуры на 1 градусъ, выразится черезъ

$$101.10^4.\frac{dv}{dT} = 101.10^4.\alpha.v = 0{,}208.10^4 \text{ (erg.)}.$$

Итакъ работа эта составляетъ всего лишь 0,00017 величины C_p, почему и можно ей пренебречь.

Опыты Реньо даютъ для теплоемкости эѳира при 0°C. величину

0,53 gr. col. (на 1 градусъ Цельзія).

Итакъ, на основаніи опыта,

$$C_p = 0{,}53.42.10^6 = 23{,}3.10^6 \text{ (erg.)}.$$

Порядокъ опытной и теоретической величины оказывается одинъ и тотъ-же.

Замѣчу здѣсь кстати, что, если p близко къ атмосферѣ, то pv составляетъ лишь ничтожную долю величинъ

$$\frac{2\pi}{3(n-4)}.\frac{h}{\rho^{n-4}}.\frac{1}{v} \quad \text{и} \quad \frac{1}{15}.\frac{5-2.\varepsilon}{1-\varepsilon}.G^2,$$

такъ что, слѣдовательно, предположеніе наше на этотъ счетъ вполнѣ оправдывается.

Обратимся теперь къ алкоголю (C_2H_6O). Вычисленія наши будутъ теперь относиться къ температурѣ 10°C., такъ что T равно теперь 283. При этой температурѣ для алкоголя

$E_i=112.10^8\frac{Dn.}{(cm.)^2}$[1], v (объемъ 1 грамма)$=1,25(cm.)^3$[2], $\alpha=0,00108$[3], $\lambda=240$ (gr. cal.) $=240.42.10^6=1008.10^7$ (erg.)[4], $g=38200\ \frac{cm.}{sec.}$[5].

Уравненія, опредѣляющія ε, ν, G, будутъ теперъ таковы:

$$\frac{8.\varepsilon-5-2.\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}.G^2=21.10^{10},$$

$$\frac{5-2.\varepsilon}{1-\varepsilon}.\nu.G^2=642.10^8,$$

$$\frac{8.\varepsilon-5}{1-\varepsilon}.G^2=187.10^9.$$

Уравненіе, опредѣляющее ε, будетъ таково:

$$\varepsilon^2-\frac{588}{622}.\varepsilon+\frac{55}{622}=0;$$

оно имѣетъ два положительныхъ корня, изъ которыхъ меньшій не идетъ къ дѣлу, ибо даетъ отрицательное значеніе для ν. Большій корень есть

$$\varepsilon=0,839.$$

Далѣе

$$\nu=0,177,\ G=133000\ \frac{cm.}{sec.},\ \frac{\pi}{2}.\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v}=181.10^8\ (erg.).$$

При помощи этихъ данныхъ находимъ, что

$$C_p=25,1.10^6\ (erg.)\ (\text{для градуса Цельзія}).$$

Опыты Реньо даютъ для теплоемкости алкоголя при 10°C. величину

0,57 gr. cal. (на 1 градусъ Цельзія).

[1]) Grassi. [2]) Менделѣевъ. [3]) Is. Pierre. [4]) Regnault. [5]) O. E. Meyer.

Итакъ, на основаніи опыта,

$$C_p = 23,9.10^6 \text{ (erg.)}.$$

Согласіе теоріи съ опытомъ оказывается весьма хорошее.

Молекулярная скорость алкоголя, также, какъ и эѳира, въ жидкомъ состояніи больше, чѣмъ въ газообразномъ; членъ pv уравненія виріала при обычныхъ условіяхъ давленія оказывается опять таки весьма малымъ сравнительно съ прочими членами этого уравненія.

Обратимся теперь къ водѣ. Вычисленія наши будемъ вести для температуры 40°С., дабы имѣть дѣло съ водой въ состояніи достаточно удаленномъ отъ того, въ которомъ она обнаруживаетъ извѣстное аномальное явленіе. Итакъ T равно въ данномъ случаѣ 313. Далѣе, для воды при 40°С. имѣемъ слѣдующія числа $E_i = 23.10^9 \frac{Dn.}{(cm.)^2}$[1], v близко къ единицѣ, и мы примемъ $r=1$, $\alpha=0,00037$[2], $\lambda=579$ gr. cal. $=579.42.10^6=243.10^8$ (erg.)[3], $G=61400 \frac{cm.}{sec.}$[4].

Уравненія, опредѣляющія ε, ν, G, будутъ таковы:

$$\frac{8.\varepsilon-5-2.\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}.G^2=345.10^9,$$

$$\frac{5-2.\varepsilon}{1-\varepsilon}.\nu G^2=399.10^8,$$

$$\frac{8.\varepsilon-5}{1-\varepsilon}.G^2=44.10^{10}.$$

Уравненіе, опредѣляющее ε, имѣетъ видъ

$$\varepsilon^2-\frac{280}{545}.\varepsilon-\frac{138}{545}=0;$$

---

[1]) Grassi. [2]) Volkmann. [3]) Regnault. [4]) O. E. Meyer.

имѣетъ оно только одинъ положительный корень, а именно:

$$\varepsilon = 0{,}822.$$

Далѣе $\nu = 0{,}0426$, $G = 223000\ \frac{cm.}{sec.}$, $\frac{\pi h}{2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{v} = 468.10^8$ (erg.).

По поводу этихъ чиселъ можно сдѣлать тѣ же самыя замѣчанія, какъ и по отношенію къ двумъ раньше разсмотрѣннымъ жидкостямъ.

На основаніи приведенныхъ числовыхъ данныхъ находимъ, что

$$C_p = 21.10^6.$$

На основаніи данныхъ опыта

$$C_p = 42.10^6.$$

Порядокъ обѣихъ величинъ одинъ и тотъ же.

§ 5. Предшествующія теоретическія соображенія даютъ намъ средство для опредѣленія отношенія $\rho:\sigma = \varepsilon$ для разныхъ жидкостей; для опредѣленія самыхъ ρ и σ они недостаточны. Средство для опредѣленія ρ и σ мы получимъ благодаря теоріи *теплопроводности* жидкостей. Къ наброску такой теоріи мы теперь и приступимъ.

Представимъ себѣ жидкость, неодинаково нагрѣтую въ разныхъ своихъ частяхъ, при чемъ изотермическія поверхности суть плоскости. Возьмемъ въ качествѣ оси x перпендикулярную къ системѣ изотермъ прямую; за положительное ея направленіе примемъ то, по которому температура убываетъ, и по которому идетъ тепловой токъ. Температура внутри жидкисти есть въ данномъ случаѣ функція одного только x.

Съ точки зрѣнія кинетической теоріи все это можно выразить такъ, что средняя молекулярная скорость не одинакова въ разныхъ частяхъ жидкости, есть функція одной только коорди-

наты x и притомъ убываетъ съ возрастаніемъ этой координаты. Понятно, что, при такомъ распредѣленіи молекулярной энергіи въ жидкости, въ ней будетъ совершаться процессъ передачи энергіи по направленію оси x; въ этой то передачѣ энергіи и состоитъ съ нашей точки зрѣнія явленіе теплопроводности; коэффиціентъ теплопроводности есть съ этой точки зрѣнія количество энергіи, передаваемой въ единицу времени черезъ единицу площади, взятой перпендикулярно къ оси x, въ томъ случаѣ, если производная температуры по x равна единицѣ.

Если температура не одинакова въ разныхъ частяхъ жидкости, то всевозможныя направленія движенія молекулъ нельзя считать равновѣроятными; фиктивная сфера, внутри которой представляли мы себѣ происходящимъ движеніе каждой молекулы, деформируется теперь въ нѣкоторую иную замкнутую поверхность, которая при разсматриваемомъ нами распредѣленіи температуры въ жидкости будетъ поверхностью вращенія около оси, параллельной оси x. Мы будемъ однакоже принимать, что измѣненіе температуры по направленію оси x на столько медленно, что молекулярное движеніе въ жидкости лишь незначительно уклоняется отъ движенія безразличнаго относительно направленій, и что вышеупомянутая замкнутая поверхность весьма близка къ сферѣ.

Разсмотримъ столкновеніе двухъ одинаковыхъ совершенно упругихъ однородныхъ шаровъ. Обозначимъ слагающія скоростей ихъ до удара черезъ u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2; самыя скорости до удара назовемъ ω_1 и ω_2, послѣ удара—Ω_1 и Ω_2. Эти послѣднія величины зависятъ отъ u_1, v_1, . . . w_2 и кромѣ того отъ координатъ b и ψ (см. сочиненіе мое «Кинетическая теорія газовъ . . .», стр. 19). Обозначимъ среднее значеніе Ω_2^2 для всевозможныхъ b и ψ черезъ $\overline{\Omega_2^2}$, величину относительной скорости шаровъ—черезъ $\mathfrak{V}$. Тогда (см. «Кин. теорію . . .», стр. 20)

$$\overline{\Omega_2^2}=\tfrac{1}{4}\{(u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2+(w_1+w_2)^2\}+\tfrac{1}{4}\mathfrak{V}^2=\tfrac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2),$$

Отсюда

$$\omega_2^2-\overline{\Omega_2^2}=\tfrac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2). \qquad (1)$$

Примѣнимъ формулу (1) къ двумъ молекуламъ жидкости, въ которой совершается процессъ теплопроводности, причемъ положимъ, что молекула скорости ω_2 явилась на столкновеніе со стороны меньшихъ, а молекула скорости ω_1 — со стороны большихъ x (назовемъ ихъ соотвѣтственно «вторая» и «первая» молекула). Формула (1), будучи умножена на $\frac{1}{4}m$, представитъ намъ убыль энергіи второй молекулы при столкновеніи ея съ первой *въ среднемъ для всевозможныхъ* b и ψ. *Въ среднемъ для всевозможныхъ* ω_1 и ω_2 убыль энергіи второй молекулы выразится черезъ

$$-\tfrac{1}{2}m\Delta G_2^2=\tfrac{1}{4}m(G_2^2-G_1^2), \tag{2}$$

гдѣ ΔG_2^2 означаетъ *приращеніе* величины G^2 для второй молекулы.

Молекула вторая находится въ постоянномъ движеніи, не выходя однакоже, согласно основному нашему представленію, изъ предѣловъ нѣкоторой замкнутой поверхности, весьма близкой къ сферѣ. Центръ этой сферы можно назвать «среднимъ положеніемъ» молекулы второй (точнѣе, ея центра). Пусть среднее положеніе молекулы второй находится на плоскости съ абсциссой x. Согласно одной изъ исходныхъ нашихъ гипотезъ, молекула жидкости лишь чрезвычайно рѣдко минуетъ въ своемъ движеніи молекулы, находящіяся въ непосредственномъ съ нею сосѣдствѣ; сравненіе нашихъ теоретическихъ соображеній съ данными опыта привело насъ къ результатамъ, несомнѣнно подтверждающимъ эту гипотезу: для разсмотрѣнныхъ нами трехъ жидкостей ε оказалось близкимъ къ единицѣ, и, слѣдовательно, расположеніе молекулъ довольно тѣснымъ. Итакъ *молекула первая есть одна изъ сосѣднихъ со второй молекулъ*, такъ что среднее разстояніе среднихъ положеній этихъ двухъ молекулъ равно σ. Положимъ, что прямая, соединяющая оба среднія положенія, составляетъ съ изотермическими плоскостями уголъ φ. Въ такомъ случаѣ среднее положеніе молекулы первой находится на плоскости

съ абсциссой $x+\sigma.\sin\varphi$, и слѣдовательно, по малости σ, можно положить

$$G_2^2-G_1^2=-\frac{dG^2}{dx}.\sigma.\sin\varphi,$$

гдѣ $\frac{dG^2}{dx}$ представляетъ значеніе этой производной для плоскости съ абсциссой x.

Итакъ, если обозначимъ черезъ ΔG^2 приращеніе, относящееся къ плоскости съ абсциссой x и соотвѣтствующее данному φ, уравненіе (2) можно будетъ переписать такъ:

$$-\tfrac{1}{2}m\Delta G^2=-\tfrac{1}{4}m\frac{dG^2}{dx}.\sigma\sin\varphi.$$

Обозначимъ наконецъ черезъ $\overline{\Delta G^2}$ среднее значеніе ΔG^2 для всевозможныхъ φ. Въ качествѣ выраженія для вѣроятности того, чтобы φ заключалось между φ и $\varphi+d\varphi$, можно принять отношеніе поверхности зоны съ полярными углами $90^0-\varphi$ и $90^0-\varphi+d\varphi$ къ поверхности полусферы, отношеніе, равное

$$\cos\varphi\, d\varphi.$$

Итакъ

$$-\tfrac{1}{2}m\overline{\Delta G^2}=-\tfrac{1}{4}m\frac{dG^2}{dx}.\sigma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi=-\tfrac{1}{8}.m.\frac{dG^2}{dx}.\sigma. \quad (3)$$

Формула (3) выражаетъ среднее количество энергіи, отдаваемой молекулой слоя съ абсциссой x при столкновеніи ея съ молекулой, явившейся изъ слоя съ большей абсциссой. Среднее число столкновеній какой нибудь молекулы разсматриваемаго слоя въ единицу времени есть (см. § 1)

$$\tfrac{4}{3}.\frac{G}{\sigma-\rho}.$$

Половина этого числа столкновеній относится къ столкно-

веніямъ разсматриваемой молекулы съ молекулами, явившимися со стороны меньшихъ x, другая половина—къ столкновеніямъ ея съ молекулами, явившимися со стороны большихъ x. Итакъ количество энергіи, отдаваемой въ единицу времени одной молекулой разсматриваемаго слоя по направленію возрастающаго x, выразится черезъ

$$-\frac{1}{12}.m.\frac{\sigma}{\sigma-\rho}.G.\frac{dG^2}{dx}. \tag{4}$$

Для того, чтобы найти количество энергіи, отдаваемой въ единицу времени единицей площади слоя съ абсциссой x, остается только умножить выраженіе (4) на число молекулъ слоя, приходящееся на единицу площади; число это обозначимъ черезъ $\mathfrak{N}$. Съ грубымъ приближеніемъ число $\mathfrak{N}$ можно опредѣлить на основаніи слѣдующихъ соображеній. Представимъ себѣ квадратъ со стороной, равной единицѣ, расположенный на плоскости съ абсциссой x. На этомъ квадратѣ, какъ на основаніи, вообразимъ себѣ построеннымъ кубъ. Число молекулъ въ этомъ кубѣ$=N$ (числу молекулъ въ единицѣ объема). Представимъ себѣ далѣе, что молекулы внутри нашего куба распредѣлены въ правильномъ кубическомъ порядкѣ, т. е., что кубъ этотъ раздѣленъ тремя системами плоскостей, параллельныхъ его сторонамъ и отстоящихъ одна отъ другой на σ, на N маленькихъ кубиковъ, въ вершинахъ которыхъ и расположены центры молекулъ. Въ каждомъ изъ слоевъ, взятыхъ внутри куба и перпендикулярныхъ къ оси x, заключается $\mathfrak{N}$ молекулъ; число такихъ слоевъ въ кубѣ есть $\frac{1}{\sigma}$. Итакъ

$$\mathfrak{N}=N.\sigma.$$

Повторяю, только что изложенныя соображенія даютъ намъ не болѣе, какъ только *порядокъ* неизвѣстнаго намъ числа $\mathfrak{N}$.

Итакъ количество энергіи, проходящей въ единицу времени сквозь единицу площади изотермической плоскости по направленію оси x, выразится черезъ

$$-\frac{1}{12}.Nm.\frac{\sigma^2}{\sigma-\rho}.G.\frac{dG^2}{dx}.$$

То-же самое количество энергіи можно выразить еще черезъ

$$-K.\frac{dT}{dx},$$

гдѣ K—коэффиціентъ теплопроводности, а T—абсолютная температура.

Итакъ, замѣтивъ, что

$$\frac{dG^2}{dx}=\frac{dG^2}{dT}.\frac{dT}{dx}=\nu.\frac{G^2}{T}.\frac{dT}{dx},$$

будемъ имѣть

$$K=\frac{\nu}{12}.\frac{\rho}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.\frac{G^3}{T}.\frac{1}{v}, \quad (5)$$

гдѣ v есть удѣльный объемъ данной жидкости.

Въ формулѣ (5) величины K и v извѣстны для многихъ жидкостей изъ опыта; всѣ остальныя, входящія въ нее, величины, за исключеніемъ ρ, извѣстны на основаніи предъидущаго; слѣдовательно эта формула можетъ служить для опредѣленія *порядка* ρ.

§ 6. Вычислимъ величину ρ для разсмотрѣнныхъ нами ранѣе трехъ жидкостей.

Для эѳира при 5,4°C. Веберъ оцѣниваетъ коэффиціентъ теплопроводности въ

0,000405 (gr. cal.),

при чемъ за единицу длины принятъ сантиметръ. Переводя это число на механическія единицы, будемъ имѣть:

$$K=17.10^3 \text{ (erg.)}.$$

Число это относится къ температурѣ 5,4°C.; по всей вѣ-

роятности значеніе K при 0°С., которое собственно намъ и нужно, лишь незначительно отличается отъ приведеннаго. Итакъ, воспользовавшись этимъ послѣднимъ, найдемъ на основаніи формулы (5) § 5, что для эѳира

$$\rho = 498.10^{-10} cm.$$

Зная ε и ρ, знаемъ и σ:

$$\sigma = \frac{\rho}{\varepsilon} = 554.10^{-10} cm.$$

Далѣе, исходя опять таки изъ представленія о кубическомъ распредѣленіи молекулъ, можемъ написать формулу

$$N.\sigma^3 = 1,$$

а основаніи которой находимъ, что для эѳира при 0°С.

$$N = 587.10^{13},$$

т. е., что въ кубическомъ сантиметрѣ эѳира при 0°С. заключается 5870 трилліоновъ молекулъ. Зная N, можемъ по формулѣ

$$Nmv = 1$$

опредѣлить массу молекулы эѳира. Оказывается, что

$$m = 125.10^{-24} gr.$$

Результатъ этотъ имѣетъ для насъ весьма большую важность въ томъ отношеніи, что даетъ намъ средство контроля надъ вышеизложенной теоріей: въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ изъ главы первой, какъ велика масса молекулы водорода абсолютно; итакъ мы имѣемъ возможность опредѣлить массу молекулы эѳира въ абсолютныхъ единицахъ еще и другимъ путемъ, а именно на основаніи стехіометрическихъ законовъ. Врядъ-ли нужно усиленно настаивать на томъ, что согласіе чиселъ, полученныхъ

этими двумя путями, можетъ считаться удовлетворительнымъ уже въ томъ случаѣ, когда порядки ихъ одинаковы.

Въ § 8 первой главы мы нашли, что молекула водорода должна обладать массой въ

$$36.10^{-25}\text{gr.};$$

формула эѳира—$C_4H_{10}O$, а потому заключаемъ, что молекула эѳира должна обладать массой въ 37 разъ большей, чѣмъ молекула водорода (H_2). Итакъ, на основаніи теоріи дѣйствительныхъ газовъ и стехіометрическихъ законовъ,

$$m = 133.10^{-24}\text{gr.}$$

Согласіе обоихъ чиселъ отличное.

Для алкоголя коэффиціентъ теплопроводности равенъ по Веберу

$$0{,}000487 \text{ gr. cal.},$$

причемъ за единицу длины принятъ сантиметръ. Число это относится къ температурѣ 5,2°C., но мы не впадемъ въ значительную ошибку, если примѣнимъ его къ алкоголю при 10°C. Переводя это число на механическія единицы, найдемъ, что

$$K = 20500 \text{ (erg.)}.$$

Формула (5) § 5 дастъ намъ:

$$\rho = 284.10^{-10} cm.;$$

далѣе

$$\sigma = 338.10^{-10} cm., \; N = 258.10^{0}, \; m = 31.10^{-24}\text{gr.}$$

Химическая формула алкоголя есть C_2H_6O; стало быть молекула алкоголя въ 23 раза тяжелѣе молекулы водорода. Итакъ, на основаніи результатовъ теоріи дѣйствительныхъ газовъ и химическихъ законовъ, для алкоголя будемъ имѣть:

$$m = 83.10^{-24}\text{gr.}$$

Порядокъ обоихъ чиселъ одинъ и тотъ-же; при оцѣнкѣ этихъ результатовъ не слѣдуетъ, между прочимъ, упускать изъ виду того обстоятельства, что ошибка, сдѣланная при вычисленіи ρ и σ, отзывается на m, весьма чувствительно, ибо N, а слѣдовательно и m опредѣляется при помощи σ^3.

Обратимся наконецъ къ водѣ. Для воды при 40°C. Лундквистъ даетъ въ качествѣ коэффиціента теплопроводности число

$$0{,}00155 \text{ gr. cal.}$$

Переведя это число на механическія единицы, будемъ имѣть:

$$K = 65100 \text{ (erg.)}.$$

Формула (5) § 5 даетъ:

$$\rho = 761{,}10^{-10} cm.;$$

далѣе

$$\sigma = 925.10^{-10} cm., \quad N = 126.10^{19}, \quad m = 792.10^{-24} \text{gr.}$$

На основаніи теоріи газовъ и стехіометрическихъ законовъ, для воды

$$m = 32.10^{-24} \text{gr.}$$

Несогласіе въ данномъ случаѣ значительное; происходитъ оно вѣроятно отъ того, что для воды всѣ наши вычисленія не очень надежны по причинѣ представляемаго этой жидкостью аномальнаго явленія.

§ 7. Представимъ себѣ, что центры трехъ молекулъ жидкости расположены рядомъ на одной прямой; допустимъ, что двѣ крайнія молекулы постоянно остаются неподвижными, а средняя колеблется между ними взадъ и впередъ по той же прямой, находясь исключительно подъ вліяніемъ притяженій этихъ послѣднихъ; разстояніе между центрами двухъ крайнихъ молекулъ примемъ равнымъ 2 σ. Разсмотрѣніе этого схематическаго случая

представляетъ для насъ, какъ выяснится изъ дальнѣйшаго, нѣкоторый интересъ.

Пусть будутъ O и O' (см. прилагаемый чертежъ) центры двухъ крайнихъ (неподвижныхъ) молекулъ; ABC и $A'B'C'$—описанныя вокругъ этихъ центровъ сферы радіуса ρ. Итакъ $\overline{OO'}=2\sigma$, $\overline{OA}=\overline{O'A'}=\rho$.

Движеніе третьей (средней) молекулы происходитъ такъ, что центръ ея колеблется по отрѣзку AA' линіи OO', при чемъ въ точкахъ A и A' скорость его каждый разъ мгновенно мѣняетъ свой знакъ вслѣдствіе соудареній подвижной молекулы съ неподвижными; колебаніе это таково, какъ если-бы центръ подвижной молекулы былъ матеріальной точкой массы m (масса молекулы), получившей начальную скорость по направленію OO', притягиваемой двумя неподвижными центрами, находящимися въ O и O', по закону молекулярныхъ взаимодѣйствій на разстояніи, и отражающейся отъ поверхностей сферъ ABC и $A'B'C'$ по законамъ идеальнаго удара; въ качествѣ закона молекулярнаго взаимодѣйствія на разстояніи принимаемъ, какъ и ранѣе, законъ, выражаемый формулой

$$R=\frac{hm^2}{r^5}.$$

Возьмемъ начало координатъ въ O и положимъ, что ось x направлена по линіи OO'; положеніе разсматриваемой нами матеріальной точки опредѣляется одной только координатой x. Потенціальная энергія этой матеріальной точки (т. е. функція, производная которой по x, взятая, съ обратнымъ знакомъ, даетъ слагающую по оси x дѣйствующей на точку силы) выразится черезъ

$$\text{const.}-\frac{hm^2}{4}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{(2\sigma-x)^4}\right).$$

Итакъ, если обозначимъ скорость точки черезъ $\mathfrak{V}$, уравненіе живыхъ силъ будетъ для даннаго движенія имѣть видъ:

$$\mathfrak{V}^2-\frac{hm}{2}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{(2\sigma-x)^4}\right)=\text{const}.$$

Изслѣдуя это уравненіе, безъ труда найдемъ, что наименьшее значеніе $\mathfrak{V}^2$ соотвѣтствуетъ $x=\sigma$ (когда движущаяся точка находится въ K); итакъ

$$\mathfrak{V}^2_{min.}=\text{const}+\frac{hm}{\sigma^4}.$$

Наибольшее значеніе $\mathfrak{V}^2$ вслѣдствіе дополнительнаго условія нашей задачи, по которому колебанія точки стѣснены отрѣзкомъ AA', соотвѣтствуетъ $x=\rho$ и $x=2\sigma-\rho$. Итакъ

$$\mathfrak{V}^2_{max.}=\text{const.}+\frac{hm}{2}\left(\frac{1}{\rho^4}+\frac{1}{(2\sigma-\rho)^4}\right).$$

Слѣдовательно

$$\mathfrak{V}^2_{max.}-\mathfrak{V}^2_{min.}=\frac{hm}{2}\left(\frac{1}{\rho^4}+\frac{1}{(2\sigma-\rho)^4}-\frac{2}{\sigma^4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{hm}{\rho^4}\left(1+\frac{\varepsilon^4}{(2-\varepsilon)^4}-2.\varepsilon^4\right), \qquad (1)$$

Примѣнимъ уравненіе (1) къ молекуламъ эѳира, алкоголя и воды.

Для эѳира мы нашли раньше, что

$$\frac{\pi}{2}.\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v}=514.10^7,\ m=125.10^{-24},\ \rho=498.10^{-10},$$

На основаніи этихъ данныхъ находимъ, что

$$\frac{hm}{\rho^4}=451.10^7;$$

далѣе $\varepsilon=0,898$, а потому

$$1+\frac{\varepsilon^4}{(2-\varepsilon)^4}-2.\varepsilon^4=0,144.$$

Итакъ для описаннаго выше схематическаго движенія молекулы эѳира

$$\mathfrak{B}^2_{max.}-\mathfrak{B}^2_{min.}=325.10^6.$$

Такъ какъ сила молекулярнаго взаимодѣйствія убываетъ чрезвычайно быстро съ увеличеніемъ разстоянія между молекулами, преобладающее вліяніе на движеніе какой-нибудь молекулы внутри жидкости имѣютъ тѣ молекулы, которыя находятся въ непосредственномъ съ нею сосѣдствѣ; потому-то разсмотрѣнный нами схематическій случай движенія молекулы можетъ намъ дать приблизительное понятіе о томъ, какъ велико вліяніе молекулярныхъ притяженій на относительную скорость двухъ молекулъ жидкости.

Обозначимъ среднее ариѳметическое всевозможныхъ значеній $\mathfrak{B}^2$, гдѣ $\mathfrak{B}$—относительная скорость двухъ молекулъ жидкости, черезъ $\overline{\mathfrak{B}^2}$. Для газовъ, какъ извѣстно, $\overline{\mathfrak{B}^2}=2G^2$. Допуская, что и для жидкостей имѣетъ мѣсто то же соотношеніе, находимъ, на основаніи § 4, для эѳира

$$\overline{\mathfrak{B}^2}=655.10^7.$$

Итакъ для эфира

$$\frac{\mathfrak{B}^2_{max.}-\mathfrak{B}^2_{min.}}{\overline{\mathfrak{B}^2}}=0,0496.$$

Такимъ образомъ приращеніе, которое можетъ получить $\mathfrak{B}^2$ благодаря междумолекулярнымъ силамъ, не превышаетъ въ случаѣ эѳира двадцатой доли величины $\overline{\mathfrak{B}^2}$.

Для алкоголя найдемъ подобнымъ-же образомъ

$$\frac{\mathfrak{B}^2_{max.}-\mathfrak{B}^2_{min.}}{\overline{\mathfrak{B}^2}}=0,0775;$$

для воды отношеніе это равно

$$0{,}0865.$$

Эти числа показываютъ, что въ случаѣ жидкостей движеніе молекулъ можно считать прямолинейнымъ и равномѣрнымъ съ большимъ приближеніемъ къ дѣйствительности, чѣмъ въ случаѣ газовъ (см. соотвѣтствующія числа въ § 7 первой главы). Происходитъ это какъ отъ скученности молекулъ въ жидкомъ состояніи вещества, такъ и отъ того обстоятельства, что молекулярныя скорости въ состояніи жидкомъ обладаютъ большими величинами, чѣмъ въ состояніи газообразномъ.

§ 8. Займемся теперь наброскомъ теоріи внутренняго тренія въ жидкостяхъ, теоріи, которая послужитъ намъ новымъ средствомъ контроля надъ вышеизложенными идеями о строеніи жидкостей.

Разсмотримъ жидкость, слои которой движутся поступательно съ различными скоростями. Возьмемъ систему прямолинейныхъ прямоугольныхъ осей координатъ; положимъ, что поступательное движеніе слоевъ направлено по оси x, и что скорость этого движенія, которую мы обозначимъ черезъ v, есть нѣкоторая функція одного только z, возрастающая съ возрастаніемъ послѣдняго.

Раздѣлимъ мысленно жидкую среду плоскостью, параллельной плоскости xy и отстоящей отъ нея на z; часть среды, соотвѣтствующую меньшимъ значеніямъ z, назовемъ «первой», а соотвѣтствующую большимъ z—«второй». Вторая часть жидкой среды дѣйствуетъ на первую тангенціальной силой, равномѣрно распредѣленной по плоскости разрѣза и направленной въ данномъ случаѣ по оси x; сила эта и называется внутреннимъ треніемъ. «Коэффиціентомъ внутренняго тренія» называется величина этой силы, приходящаяся на единицу площади раздѣльной плоскости, подъ условіемъ, что $\frac{dv}{dz}=1$.

Съ нашей точки зрѣнія внутреннее треніе въ жидкостяхъ обусловливается передачей количества поступательнаго движенія изъ слоевъ, у которыхъ оно больше, въ слои, у которыхъ оно меньше, передачей, происходящей черезъ посредство молекулярныхъ столкновеній.

Разсмотримъ столкновеніе двухъ одинаковыхъ совершенно упругихъ однородныхъ шаровъ. Пусть будутъ u_1 и u_2 слагающія по оси x скоростей ихъ до удара, U_1 и U_2—тѣ-же слагающія послѣ удара; далѣе, $\overline{U}_2$ — среднее ариеметическое всевозможныхъ значеній U_2, соотвѣтствующихъ всевозможнымъ значеніямъ b и ψ (см. § 5). Будемъ имѣть (см. сочиненіе мое «Кинетическая теорія газовъ...», стр. 18):

$$\overline{U}_2=\frac{u_1+u_2}{2},$$

откуда

$$u_2-\overline{U}_2=\frac{u_2-u_1}{2} \qquad (1)$$

Примѣнимъ формулу (1) къ двумъ молекуламъ разсматриваемой нами жидкой среды, слои которой обладаютъ различными скоростями поступательнаго движенія; притомъ положимъ, что молекула скорости u_2 явилась на столкновеніе со стороны большихъ, а молекула скорости u_1—со стороны меньшихъ z (назовемъ ихъ соотвѣтственно «вторая» и «первая» молекула). Формула (1), будучи умножена на m, представитъ намъ убыль количества движенія второй молекулы при столкновеніи ея съ первой *въ среднемъ для всевозможныхъ* b и ψ. *Въ среднемъ для всевозможныхъ* u_1 и u_2 будемъ имѣть:

$$-m\Delta\overline{u}_2=\frac{m}{2}(\overline{u}_2-\overline{u}_1), \qquad (2)$$

гдѣ $\overline{u}_2$—среднее всевозможныхъ значеній u_2 въ слоѣ, которому

принадлежитъ молекула вторая, $\bar{u}_1$ — среднее u_1 для слоя, которому принадлежитъ молекула первая, а $\Delta\bar{u}_2$ — приращеніе u_2 *въ среднемъ* при одномъ столкновеніи.

Положимъ, что *среднее положеніе* молекулы второй (см. § 5) находится на разсматриваемой нами плоскости раздѣла между двумя частями жидкой среды (на плоскости съ ординатой z); положимъ далѣе, что среднее положеніе молекулы первой находится на плоскости съ ординатой $z-\sigma.\sin\varphi$ (см. § 5). Въ такомъ случаѣ можно положить

$$\bar{u}_2-\bar{u}_1=\frac{dv}{dz}.\sigma\sin\varphi,$$

и формула (2) перепишется такъ:

$$-m\Delta\bar{u}=\frac{m}{2}.\frac{dv}{dz}.\sigma.\sin\varphi.$$

Здѣсь $\Delta\bar{u}$ означаетъ приращеніе величины u, которой обладаетъ молекула, принадлежащая въ вышеуказанномъ смыслѣ раздѣльной плоскости, *въ среднемъ* при одномъ столкновеніи ея съ молекулой, принадлежащей плоскости съ ординатой $z-\sigma.\sin\varphi$.

Обозначивъ черезъ $\Delta\bar{\bar{u}}$ среднее значеніе $\Delta\bar{u}$ для всевозможныхъ φ, будемъ имѣть:

$$-\Delta\bar{\bar{u}}=\frac{m}{2}.\frac{dv}{dz}.\sigma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{m}{4}.\frac{dv}{dz}.\sigma. \qquad (3)$$

Умноживъ величину $-m\Delta\bar{\bar{u}}$ на $\mathfrak{N}$ и на

$$\frac{2}{3}.\frac{G}{\sigma-\rho}$$

(см. § 5), получимъ величину внутренняго тренія, отнесенную къ единицѣ площади раздѣльной плоскости, т. е. $\eta.\frac{dv}{dz}$, гдѣ η — коэффиціентъ внутренняго тренія. Итакъ (см. формулу (3))

$$\eta=\frac{1}{6}Nm\frac{\sigma^2}{\sigma-\rho}G=\frac{1}{6}.\frac{\rho}{\varepsilon(1-\varepsilon)}.\frac{G}{v}. \qquad (4)$$

Формула (4) даетъ намъ возможность вычислить η для разсмотрѣнныхъ ранѣе жидкостей, такъ какъ всѣ величины, фигурирующія въ правой ея части, извѣстны для этихъ жидкостей изъ предъидущаго.

Такимъ образомъ находимъ, что для эѳира при 0°C.

$$\eta=0{,}0038\ (gr.,\ cm.^{-1},\ sec.^{-1}).$$

Опытная величина, относящаяся къ температурѣ 10°C., есть

$$\eta=0{,}0024\ (gr.,\ cm.^{-1},\ sec.^{-1})\ \text{(Handl)}.$$

Опытной величины η для 0°C. мнѣ не удалось найти; извѣстно только, что для всѣхъ жидкостей η убываетъ съ возрастаніемъ температуры. По всей вѣроятности, значеніе η для 0°C. еще ближе къ нашему теоретическому числу, чѣмъ приведенное значеніе этого коэффиціента для 10°C. Согласіе теоріи съ опытомъ можно назвать въ данномъ случаѣ весьма удовлетворительнымъ.

Далѣе, для алкоголя при 10°C. будемъ имѣть на основаніи нашей теоріи:

$$\eta=0{,}0037.$$

Опытная величина для той же температуры такова:

$$\eta=0{,}015\ \text{(Rellstab)}.$$

Порядокъ обѣихъ величинъ одинъ и тотъ-же.

Наконецъ для воды при 40° на основаніи теоріи

$$\eta=0{,}019;$$

опытъ даетъ для той-же температуры

$$\eta=0{,}007\ \text{(Poiseuille)}.$$

§ 9. Въ § 2 мы видѣли, что извѣстное аномальное явленіе, представляемое водой при температурахъ, низшихъ 4°C.

нельзя объяснить при помощи гипотезы, что жидкость есть агрегатъ движущихся шаровъ *неизмѣнныхъ* размѣровъ, скорости которыхъ *возрастаютъ* съ возрастаніемъ температуры.

Предположеніе, что средняя молекулярная скорость нѣкоторыхъ тѣлъ можетъ въ извѣстныхъ предѣлахъ измѣненія температуры *убывать* съ возрастаніемъ этой послѣдней, могло-бы объяснить вышеупомянутое явленіе; но такое предположеніе въ высшей степени неправдоподобно.

Мы сейчасъ увидимъ, что явленіе *отрицательнаго* термическаго расширенія можетъ быть объяснено еще и иначе, а именно на основаніи предположенія что ρ (діаметръ молекулы) *убываетъ* съ возрастаніемъ температуры.

Но правдоподобно-ли это предположеніе? Отвѣтъ приходится дать утвердительный въ виду того, что для газовъ *убываніе* ρ *съ возвышеніемъ температуры представляетъ несомнѣнный фактъ.* Сравненіе результатовъ теоріи внутренняго тренія газовъ съ данными опыта приводитъ къ заключенію, что для газовъ

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\rho_0^2}\cdot\frac{T^n}{273}, \tag{1}$$

гдѣ T—абсолютная температура, ρ_0—значеніе ρ для 0°C., а n—дробь, заключающаяся между $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ (см. сочиненіе мое «Кинетическая теорія газовъ...», стр. 135 и 136). Изъ формулы (1) выводимъ такую:

$$\frac{dlg\rho}{dT}=-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{T}(lg\text{—натур. лог.}). \tag{2}$$

Формула (2) даетъ понятіе объ *измѣняемости* ρ съ температурой въ случаѣ газовъ. Для температуры 0°C. величина $\frac{dlg\rho}{dT}$ заключается для разныхъ газовъ между

—0,00046 и —0,00092.

Возникаетъ вопросъ: достаточно-ли *такой* измѣняемости ρ

въ случаѣ жидкостей для того, чтобы вызвать въ извѣстныхъ случаяхъ явленіе отрицательнаго термическаго расширенія? Отвѣтъ на этотъ вопросъ заключается въ нижеслѣдующихъ строкахъ.

Вернемся къ исходному нашему уравненію, къ уравненію (4) § 1, въ которомъ будемъ теперь считать ρ функціей температуры; кромѣ того положимъ въ немъ $n=5$.

Разсмотримъ опять безконечно малые процессы—изотермическаго сжатія и термическаго расширенія при постоянномъ давленіи. Уравненіе, которое получится отъ разсмотрѣнія перваго процесса, будетъ таково-же, какъ и полученное нами въ § 2 (уравненіе (2) § 2), съ замѣной только буквы n числомъ 5. Уравненіе втораго процесса будетъ таково:

$$pdv+\frac{1}{15}\frac{\rho.\sigma}{(\sigma-\rho)^2}.\frac{G^2}{v}.dv-\frac{2\pi}{3}\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v^2}.dv-\frac{1}{5}.\frac{\rho}{\sigma-\rho}.\frac{dG^2}{dT}.dT-$$

$$-\frac{1}{5}.\frac{G^2}{\sigma-\rho}.\frac{d\rho}{dT}.dT-\frac{1}{5}.\frac{\rho}{(\sigma-\rho)^2}.G^2.\frac{d\rho}{dT}.dT-\frac{2\pi}{3}.\frac{h}{\rho^2}.\frac{1}{v}.\frac{d\rho}{dT}.dT=\frac{1}{3}.\frac{dG^2}{dT}.dT. \quad (3)$$

Принявъ во вниманіе уравненіе (2) § 2, въ которомъ положимъ $n=5$, и сдѣлавъ нѣкоторыя преобразованія, представимъ уравненіе (3) въ такомъ видѣ:

$$E_i dv=\frac{1}{15}.\frac{5\sigma-2\rho}{\sigma-\rho}.\frac{dG^2}{dT}.dT+\frac{1}{5}.\frac{\sigma\rho}{(\sigma-\rho)^2}.G^2.\frac{dlg\rho}{dT}.dT+\frac{2\pi}{3}.\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v}.\frac{dlg\rho}{dT}.dT,$$

откуда

$$E_i\alpha=\frac{1}{15}.\frac{5-2.\varepsilon}{1-\varepsilon}.\frac{1}{v}.\frac{dG^2}{dT}+\left\{\frac{1}{5}.\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}.\frac{G^2}{v}+\frac{2\pi}{3}.\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v^2}\right\}\frac{dlg\rho}{dT}. \quad (4)$$

Изъ разсмотрѣнія уравненія (4) явствуетъ, что α можетъ обратиться въ нуль и быть отрицательнымъ, если принять $\frac{dlg\rho}{dT}$ отрицательнымъ и, въ извѣстныхъ предѣлахъ измѣненія температуры, достаточно большимъ.

Вычислимъ приближенно, каково должно быть $\frac{dlg\rho}{dT}$ для во-

ды, чтобы α могло обратиться въ нуль; при этомъ вычисленіи, претендующемъ лишь на нахожденіе ***порядка*** искомой величины, воспользуемся тѣми значеніями ε, G, $\frac{dG^2}{dT}$, $\frac{h}{\rho}$ которыя найдены нами на основаніи предположенія, что ρ не измѣняется съ температурой, и которыя относятся къ температурѣ 40°С. Будемъ имѣть:

$$\frac{1}{15}.\frac{5-2.\varepsilon}{1-\varepsilon}.\frac{1}{v}.\frac{dg^2}{dT}=849.10^4,\ \frac{1}{5}.\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}.\frac{g^2}{v}=257.10^9,\ \frac{2\pi}{3}\frac{h}{\rho}.\frac{1}{v^2}=624.10^8.$$

Итакъ для того, чтобы α обратилось въ нуль, достаточно принять

$$\frac{dlg\rho}{dT}=-0{,}000026.$$

Величина эта еще значительно меньше, чѣмъ у газовъ. Такимъ образомъ объясненіе отрицательнаго термическаго расширенія воды измѣняемостью ρ съ температурой оказывается весьма правдоподобнымъ.

Для жидкостей, которыя не представляютъ отрицательнаго термическаго расширенія, измѣняемость ρ съ температурой вѣроятно еще меньше, чѣмъ для воды.

Но чѣмъ-же, спрашивается теперь, объяснить *уменьшеніе* ρ съ возрастаніемъ температуры? Для газовъ О. Е. Мейеръ объясняетъ это тѣмъ, что съ повышеніемъ температуры съ одной стороны уменьшается прочность молекулъ, которыя суть аггрегаты движущихся атомовъ, а съ другой стороны увеличивается сила толчка одной молекулы о другую; понятно, что отъ дѣйствія обѣихъ причинъ молекулы газа должны при столкновеніяхъ глубже *врѣзаться* одна въ другую, т. е. величина ρ нашей схематической теоріи должна убывать. Объясненіе это не лишено правдоподобія, и нѣтъ причины, почему его нельзя было-бы распространить и на жидкости.

ПОПРАВКА.

Въ § 2 первой главы слѣдуетъ выкинуть слова:

«Очевидно, что знакъ Σ можетъ помѣняться мѣстомъ со знакомъ $|_0^\tau$ .... величина

$$\frac{d}{dt}\Sigma(x^2+y^2+z^2)$$

близка къ нулю».

Вмѣсто выбрасываемаго надлежитъ поставить слѣдующее: «Выраженіе $m\Sigma\,|_0^\tau\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)$ представляетъ величину, *не возрастающую безпредѣльно* съ возрастаніемъ τ; всѣ остальные члены уравненія (4) пропорціональны τ (это выяснится изъ дальнѣйшаго). Итакъ стоитъ взять τ достаточно большимъ, и мы въ правѣ будемъ пренебречь третьимъ членомъ лѣвой части ур. (4) предъ остальными его членами».

Объ общемъ законѣ сжатія водныхъ растворовъ солей.

А. Герича.

(Читано въ засѣданіи математическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 13-го апрѣля 1888 года).

Если обозначимъ чрезъ δ сжатіе, происходящее при образованіи *100 граммовъ* раствора, а чрезъ p процентное содержаніе въ немъ соли, то можно показать, что

$$\delta = C(100-p)p \qquad (1)$$

гдѣ C есть постоянное для растворовъ данной соли отношеніе $\frac{\delta}{(100-p)p}$. При $p=50$ функція (1) имѣетъ максимумъ, что вполнѣ согласно съ дѣйствительностію, такъ какъ изъ прямыхъ наблюденій давно извѣстно, что наибольшее сжатіе соотвѣтствуетъ растворамъ, содержащимъ около 50% соли. Для симметричныхъ растворовъ функція (1) даетъ равныя величины сжатія, что опять согласно съ дѣйствительными фактами, какъ увидимъ изъ приводимыхъ ниже таблицъ. Далѣе, такъ какъ $(100-p)p > \frac{(100-2p).2p}{2}$, ибо $\frac{100-p}{100-2p} > 1$, то отсюда понятно само собою, что при разбавленіи водою всякаго раствора должно происходить сжатіе. Это третье свойство функціи (1) также подтверждается дѣйствительными фактами, ибо еще въ 50-хъ годахъ

Кремерсъ *) прямыми опытами показалъ, что разбавленіе водою даже очень слабыхъ растворовъ сопровождается сжатіемъ.

Хотя наша функція всѣми своими свойствами совершенно согласуется съ извѣстными уже фактами, но отсюда нельзя еще заключить, что она есть выраженіе общаго закона сжатія соляныхъ растворовъ. Для этого необходимо было прежде всего показать, что отношеніе $\frac{\delta}{(100-p)p}$ дѣйствительно остается постояннымъ для всѣхъ растворовъ данной соли при одной и той-же температурѣ. Съ этой цѣлью мнѣ нужно было сперва найти способъ для опредѣленія величины *истиннаго* сжатія, подъ которымъ слѣдуетъ разумѣть сжатіе, разсчитанное по объему *жидкой* соли **). Предположивъ нашу зависимость (1) доказанной для *двухъ* какихъ-либо растворовъ данной соли, получаемъ

$$\frac{100-p}{\sigma}+\frac{p}{\partial}-\frac{100}{s}=\frac{100-p_1}{\sigma}+\frac{p_1}{\partial}-\frac{100}{s_1} \qquad (2)$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно ∂, получаемъ плотность жидкой соли; а зная эту послѣднюю, вычисляемъ сжатіе для *остальныхъ* растворовъ той-же соли по слѣдующей формулѣ:

$$\frac{100-p}{\sigma}+\frac{p}{\partial}-\frac{100}{s}=\delta \qquad (3)$$

Результаты произведенныхъ мною вычисленій относятся къ растворамъ 30 веществъ и помѣщены въ прилагаемыхъ здѣсь таблицахъ, гдѣ p означаетъ процентное содержаніе соли, $s\frac{15^0}{4^0}$ плотность раствора при 15^0 по отношенію къ плотности воды

*) Kremers, Pogg. Ann. Bd. 95, p. 110. 1855.

**) Сжатіе расчитываютъ обыкновенно по объему твердой соли; а при этомъ въ окончательномъ результатѣ теряется объемъ, равный *приращенію* объема соли вслѣдствіе перехода ея въ жидкое состояніе. Оттого для нѣкоторыхъ солей, вмѣсто сжатія, получается расширеніе.

при 4°, δ соотвѣтствующее данному раствору сжатіе и наконецъ C есть отношеніе сжатія къ произведенію процентнаго содержанія массъ въ растворѣ, т. е. $\frac{\delta}{(100-p)p}$. Въ таблицахъ показаны также плотности каждой соли въ твердомъ и въ жидкомъ видѣ; первыя взяты изъ таблицъ Ландольта, а вторыя вычислены мною по формулѣ (2) изъ двухъ растворовъ, указанныхъ вертикальной стрѣлкой.

1) Хлористый натрій, $NaCl$. твердст. 2,15; жидк. 1,787

p	$s^{15°}_{4°}$	δ	C
5	1,0353	1,288	0,002710
10 ↑	1,0724	2,427	0,002697
15 ↓	1,1105	3,415	—
20	1,1501	4,282	0,002677
25	1,1908	5,07	0,002704

2) Хлористый калій, KCl. тверд. 1,977; жидк. 1,817

p	$s^{15°}_{4°}$	δ	C
5	1,0314	0,877	0,001847
10 ↑	1,0647	1,664	0,001849
15	1,0992	2,352	0,001845
20 ↓	1,1351	2,953	—
25	1,1715	3,46	0,001845

3) Хлористый аммоній, NH_4Cl. тверд. 1,52; жидк. 1,174.

p	$s^{15°}_{4°}$	δ	C
5	1,0148	0,898	0,001893
10 ↑	1,0299	1,701	0,001890
15	1,0443	2,386	0,001871
20 ↓	1,0584	—	—
25	1,0721	3,572	0,001905

4) Хлористый алюминій, $AlCl_3$ тверд. ? жидк. 2,208

p	$s^{15°}_{4°}$	δ	C
3,83	1,0263	0,545	0,001480
7,66	1,0544	1,049	0,001483
15,32 ↑	1,1143	1,948	0,001501
22,98 ↓	1,1788	—	—
30,64	1,2479	3,162	0,001488
38,3	1,3230	3,510	0,001485

5) Хлористый стронцій, $SrCl_2$ тверд. 3,054; жидк. 2,9905

p	$s^{15°}_{4°}$	δ	C
5	1,0444	1,002	0,002104
10	1,0920	1,844	0,002049
15 ↑	1,1429	2,602	0,002042
20	1,1978	—	—
25 ↓	1,2570	3,870	0,002064
30	1,3209	4,382	0,002086

6) Хлористый барій, $BaCl_2$ тверд. 3,85; жидк. 3,824

p	$s^{15°}_{4°}$	δ	C
5	1,0450	0,697	0,001467
10 ↑	1,0942	1,305	0,001450
15	1,1475	1,837	0,001441
20 ↓	1,2051	—	—
25	1,2685	2,758	0,001471

7) Хлористый кальцій, $CaCl_2$ — тверд. 2,216; жидк. 2,149

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
5	1,0417	1,411	0,002971
10 ↑	1,0860	2,653	0,002948
15	1,1326	3,760	0,002949
20 ↓	1,1812	—	—
25	1,2325	5,561	0,002966
30	1,2868	6,309	0.003004
35	1,3412	6,787	0,002983

8) Хлористый магній, $MgCl_2$ — тверд. 2,177; жидк. 1,8925

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
5	1,0413	1,692	0,003562
10 ↑	1,0850	3,194	0,003549
15	1,1301	4,521	0,003546
20 ↓	1,1770	5,678	—
25	1,2264	6,730	0,003589
30	1,2783	7,682	0,003692

9) Двухлористое олово. $Sn\,Cl_2$ — тверд. ?; жидк. 3,404

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
16,78	1,1432	0,750	0,0005370
29,36	1,2768	1,010	0,0004870
33,56 ↑	1,3286	1,085	0,0004866
46,14 ↓	1,5093	1,210	—
58,72	1,7437	1,220	0,0005033
67,11	1,9438	1,180	0,0005346

10) Хлористый кадмій. $Cd\,Cl_2$ — тверд. 3,938; жидк. 3,992

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
10	1,0908	0,91	0,001011
20 ↑	1,1967	1,61	0,001006
30	1,3266	2,192	0,001009
40 ↓	1,4740	—	—
50	1,6657	2,53	0,001012

11) Азотнокислый натрій. $Na\,NO_3$ — тверд. 2,24; жидк. 2,0623

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
5	1,0336	0,745	0,001568
10	1,0692	1,399	0,001554
20 ↑	1,1449	2,524	0,001577
30	1,2281	3,221	0,001542
40 ↓	1,3191	—	—
45	1,3690	3,83	0,001548

12) Азотнокислый калій. KNO_3 — тверд. 2,092; жидк. 1,906

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
5	1,0312	0,733	0,001543
10 ↑	1,0643	1,366	0,001518
15 ↓	1,0989	—	—
20	1,1350	2,462	0,001538

13) Сѣрнокислый калій. K_2SO_4 — тверд. 2,647; жидк. 1,795

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
1	1,0073	0,367	0,003707
3 ↑	1,0236	1,059	0,003639
5	1,0402	1,733	0,003648
7 ↓	1,0570	—	—
9	1,0741	2,993	0,003654

14) Сѣрнокислый натрій. $Na_2\,SO_4$ — тверд. 2,629; жидк. 1,5432

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
2	1,0176	1,106	0,005643
4 ↑	1,0359	2,142	0,005578
6	1,0545	3,140	0,005567
10 ↓	1,0924	—	—
15	1,1417	7,20	0,005647

15) Сѣрнокислый аммоній. $(NH_4)_2SO_4$ тверд. 1,762 жидк. 1,324

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
10	1,0582	3,132	0,003479
15 ↑	1,0869	4,396	0,003448
20	1,1160	—	—
25 ↓	1,1444	6,562	0,003500
30	1,1733	7,476	0,003560

16) Сѣрнокислый магній. $Mg SO_4$ тверд. 2,65 жидк. 2,2435

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
5	1,0506	2,128	0,004478
10 ↑	1,1043	3,987	0,004430
15	1,1612	5,636	0,004424
20 ↓	1,2210	—	—
25	1,2837	8,308	0,004428

17) Сѣрномагнезіальнокал. соль. $MgK_2(SO_4)_2$ тверд. безводн.? жидк. 1,319

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
3,43	1,0303	2,19	0,006611
5,14 ↑	1,0464	—	—
6,86	1,0620	4,26	0,006667
10,28 ↓	1,0954	6,21	0,006765
15,43	1,1467	9,12	0,006990

18) Сѣрнокислый цинкъ. $Zn SO_4$ тверд. 3,68 жидк. 3,66

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
5,61	1,0584	1,523	0,002876
11,22	1,1226	2,849	0,002860
16,83 ↑	1,1923	3,960	0,002829
22,44	1,2698	5,000	0,002872
28,05 ↓	1,3520	—	—
33,66	1,4440	6,325	0,002833

19) Углекислый натрій. Na_2CO_3 тверд. 2,476 жидк. 1,225

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
2	1,02014	1,692	0,008633
4 ↑	1,0411	3,296	0,008583
6	1,0622	4,833	0,008569
8	1,0834	6,312	0,008576
10 ↓	1,1048	—	—
12	1,1264	9,097	0,008598
14	1,1485	10,43	0,008662

20) Углекислый калій. $K_2 CO_3$ тверд. 2,29 жидк. 2,0956

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
5	1,0448	1,756	0,003697
10	1,0919	3,268	0,003631
20 ↑	1,1919	5,714	0,003571
30	1,3002	7,466	0,003555
40 ↓	1,4175	—	—
50	1,5429	9,087	0,003635

21) Бромистый аммоній. NH_4Br. тверд. 2,327 жидк. 1,291

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
5	1,0326	2,029	0,004271
10	1,0652	3,87	0,004300
15	1,0960	5,375	0,004216
20	1,1285	—	—
30	1,1921	9,15	0,004352

22) Бромистый калій. K Br. тверд. 2,69 жидк. 2,447

p	$s^{15^\circ}_{4^\circ}$	δ	c
10 ↑	1,0750	1,146	0,001276
20 ↓	1,1602	—	—
30	1,2569	2,575	0,001226
35	1,3076	2,867	0,001261

23) Уксуснокислый калій. $C_2H_3KO_2$ тверд. ? жидк. 1,581

p	$s^{17,5^0}_{4^0}$	δ	c
10	1,0475	0,995	0,001106
20	1,0992	1,764	0,001103
30	1,1531	2,335	0,001112
40 ↑	1,2082	2,64	0,001100
50	1,2670	2,755	0,001102
60 ↓	1,3270	2,637	—

24) Щавелокислый калій. $C_2K_2O_4$ тверд. безвод. ? жидк. 1,253

p	$s^{17,5^0}_{4^0}$	δ	c
4,5	1,0337	2,462	0,005728
9,0 ↑	1,0656	4,45	0,005434
13,5	1,0977	6,28	0,005379
18,0 ↓	1,1306	—	—
22,5	1,1638	9,58	0,005494

25) Винная кислота. $C_4H_6O_6$. тверд. 1,739 жидк. 1,650

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
10	1,0460	0,54	0,0006000
20 ↑	1,0960	0,95	0,0005938
30	1,1495	1,25	0,0005952
40 ↓	1,2068	1,425	—
50	1,2685	1,507	0,0006028

26) Лимонная кислота. $C_6H_8O_7$. тверд. безвод. ? жидк. 1,588

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
9,1	1,0383	0,40	0,0004835
18,2	1,0796	—	—
27,3	1,1234	0,94	0,0004736
36,4	1,1699	1,09	0,0004708
45,5	1,2193	1,18	0,0004745

27) Хромовая кислота. $Cr\ O_3$ тверд. 2,74 жидк. 2,661

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
5	1,036	0,405	0,0008527
10	1,076	0,860	0,0009556
15	1,119	1,294	0,001015
20 ↑	1,166	1,747	0,001092
30	1,268	2,356	0,001120
40 ↓	1,383	—	—
50	1,510	2,41	0,0009649

28) Фосфорная кислота. H_3PO_4 тверд. 1,884 жидк. 1,873

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
10	1,0548	0,614	0,0006822
20	1,1151	1,068	0,0006706
30	1,1808	1,387	0,0006605
50	1,3328	1,705	0,0006820
70	1,5155	1,417	0,0006748
80	1,6196	1,000	0,0006250

29) Ѣдкое кали KOH. тверд. 2,04 жидк. 1,678

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
4,19	1,0381	2,057	0,005124
8,42 ↑	1,0777	—	—
16,78	1,1588	7,494	0,005334
25,11 ↓	1,2431	9,481	0,005042
33,33	1,3303	11,423	0,005141
41,7	1,4263	13,09	0,005262

30) Сѣрнокислая мѣдь. $CuSO_4$

p	$s^{15^0}_{4^0}$	δ	c
3,2	1,0326	1,003	0,003201
6,4	1,0680	1,954	0,003262
9,6	1,1050	2,863	0,003291
12,8	1,1433	—	—
16	1,1838	4,388	0,003265

Въ практическомъ отношеніи представлялось чрезвычайно важнымъ построить на основаніи изложеннаго закона общую формулу, выражающую зависимость между процентнымъ составомъ раствора и его плотностью. Выше было показано, что

$$\delta=C(100-p)p \qquad (1)$$

и $$\delta=\frac{100-p}{\sigma}+\frac{p}{\partial}-\frac{100}{s} \qquad (3)$$

Соединивъ эти два выраженія въ одно, получимъ

$$\frac{100-p}{\sigma}+\frac{p}{\partial}-\frac{100}{s}=C(100-p)p$$

или

$$s\left\{cp^2+\left(\frac{1}{\partial}-\frac{1}{\sigma}-100c\right)p+\frac{100}{\sigma}\right\}=100 \qquad (4)$$

Послѣ передѣлокъ въ формулѣ (4), получаемъ слѣдующее болѣе простое выраженіе

$$p^2+\alpha p+\beta=\frac{\gamma}{s} \qquad (5)$$

гдѣ

$$\alpha=\frac{1}{C}\left(\frac{1}{\partial}-\frac{1}{\sigma}-100c\right)$$

$$\beta=\frac{100}{C\sigma}$$

$$\gamma=\frac{100}{c}$$

Для растворовъ данной соли величины α, β, γ вычисляются напередъ по изображенному выше методу.

Если корни многочлена 2-й степени, составляющаго лѣвую часть выраженія (5), будутъ мнимыми, то они представятся со-

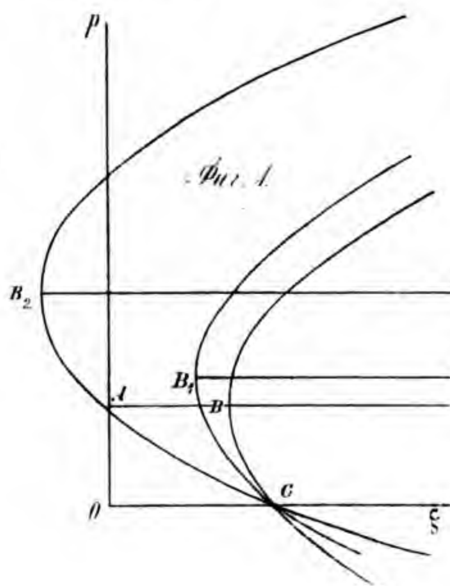
пряженными комплексными величинами вида $\varphi \pm \psi\sqrt{-1}$; въ случаѣ дѣйствительныхъ корней множитель $\sqrt{-1}$ отсутствуетъ и слѣдовательно уравненіе (5) можно привести къ такому виду:

$$(p-\varphi)^2 \pm \psi^2 = \frac{\gamma}{s} \tag{6}$$

откуда

$$s = \frac{\gamma}{(p-\varphi)^2 \pm \psi^2} \tag{7}$$

Знакъ (+) въ случаѣ мнимыхъ корней, знакъ (—) въ случаѣ дѣйствительныхъ.



Если $\frac{1}{s}$ обозначимъ чрезъ ξ и примемъ за абсциссу точки, а p за ея ординату, то выраженіе (6) можетъ быть представлено посредствомъ слѣдующей параболы (фиг. 1). Ось этой параболы проходитъ параллельно оси абсциссы на разстояніи $AO=\varphi$; вершина B лежитъ справа относительно оси ординатъ на разстояніи $AB=\frac{\psi^2}{\gamma}$. Точка пересѣченія параболы съ осью абсциссъ лежитъ на разстояніи $OC=\frac{\varphi^2+\psi^2}{\gamma}$, означающемъ обратную величину плотности воды при 15°, т. е. $\frac{1}{\sigma}$. Такъ напр. для растворовъ KCl при 15° имѣемъ слѣдующую формулу

$$s = \frac{54201}{(p-172)^2+24663},$$

слѣдов. уравненіе параболы будетъ такое

$$(p-172)^2+24663=54201\xi.$$

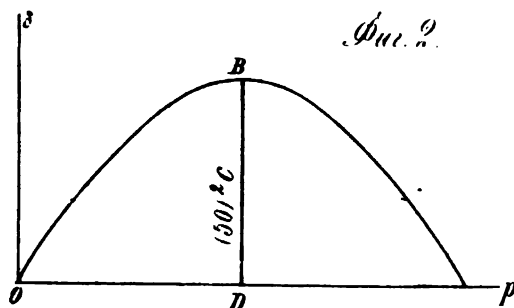
Для *Na Cl*

$$s=\frac{37037}{(p-132)^2+19645},$$

а уравн. параболы слѣд.

$$(p-132)^2+19645=37037\xi.$$

Формула (1), выражающая общій законъ сжатія водныхъ растворовъ солей, также можетъ быть представлена посредствомъ параболы, если p будемъ разсматривать какъ абсциссу, а δ какъ



ординату точки. Эта парабола (фиг. 2) пересѣкаетъ ось абсциссъ въ двухъ точкахъ $p=o$ и $p=100$. Вершинѣ параболы соотвѣтствуютъ абсцисса $p=50$ и ордината $\delta=(50)^2C$.

Изъ формулы (1)

$$\delta=C(100-p)p \qquad (1)$$

нетрудно вывести законъ сжатія для какихъ угодно количествъ воды и соли. И въ самомъ дѣлѣ, если m есть масса воды, а m_1 масса соли, то ясно, что $p=100\frac{m_1}{m+m_1}$, а $100-p=100\frac{m}{m+m_1}$. Подставляя эти выраженія въ формулу (1), имѣемъ

$$\delta_{100}=C(100)^2\frac{m.m_1}{(m+m_1)^2}$$ для 100 граммовъ раствора;

слѣдов. для массы $m+m_1$ сжатіе получимъ, умноживъ δ_{100} на отношеніе $\frac{m+m_1}{100}$.

$$\delta_1 = C.100\frac{m.m_1}{m+m_1} = A\frac{m.m_1}{m+m_1} \quad (8)$$

Въ заключеніе считаю долгомъ заявить, что при изложеніи математической стороны предмета я воспользовался нѣкоторыми указаніями проф. Н. А. Умова, за что выражаю ему мою сердечную благодарность.

Одесса, 6-го мая
1888 года.

Литература объ удѣльномъ вѣсѣ изслѣдованныхъ мною растворовъ.

Gerlach. Specifische Gewichte der gebräuchlichsten Salzlösungen. Freiberg. 1859. Отсюда взяты растворы $NaCl$, NH_4Cl, $AlCl_3$, $MgCl_2$, $BaCl_2$, $CaCl_2$, $SrCl_2$, KNO_3 K_2SO_4, $MgSO_4$, Na_2CO_3, K_2CO_3, винной кисл. и лимонной кислоты.

Онъ-же. Zeitschr. f. Analyt. Chemie. VIII Jahrgang, p. 245. 1869. Растворы $ZnSO_4$ и $SnCl_2$.

Онъ-же. Die chemische Industrie 1886, p. 241. Растворы уксуснокаліевой соли.

F. Kohlrausch und *Grotrian.* Pogg. Ann. Bd. 154, p. 215; 1875. Растворы KCl.

Kohlrausch. Wied. Ann. Bd. 6. 1879. Раств. $(NH_4)_2SO_4$ и KBr.

Kohlrausch. München. Akad. Ber. 1875. 5 Math. phys. Klasse, p. 284. Растворы H_3PO_4.

Kremers. Pogg. Ann. Bd. 96. Растворы $NaNO_3$.

Hugo Schiff. Liebig's Ann. Bd. 133, p. 183. 1860. Растворы H_3PO_4 и $MgK_2(SO_4)_2$.

Benno Franz. Journ. f. pract. Chemie, Bd. 5, p. 274; 1872. Растворы средней щавелево-каліевой соли.

Ostwald. Journ. f. pract. Chemie. Bd. 22, p. 305; 1880. Растворы Na_2SO_4.

Eder. Sitzungsberichte der Wiener Akad. Abth. II. Bd. 82, p. 1284; 1881. Растворы NH_4Br.

Graham-Otto's Chemie. Bd. II. Abth. III, p. 871; 1884. Растворы $CaSO_4$ (данныя Герлаха).

Менделѣевъ. Изслѣдованіе водн. растворовъ по ихъ удѣльному вѣсу. 1887 г. Стр. 373. Растворы CrO_3. Удѣльн. вѣсъ при 15° найденъ по даннымъ Цеттнова чрезъ сравненіе съ растворами соляной кисл. равнаго содержанія.

Поправка къ статьѣ Герича «Объ общемъ законѣ сжатія водныхъ растворовъ солей».

Напечатано:	*Должно быть:*
стр. 4	
$\frac{100-p}{\sigma}+\frac{p}{d}-\frac{100}{s}=$	$\frac{\frac{100-p}{\sigma}+\frac{p}{d}-\frac{100}{s}}{(100-p)p}=$
$=\frac{100-p_1}{\sigma}+\frac{p}{d}-\frac{100}{s_1}$.	$=\frac{\frac{100-p_1}{\sigma}+\frac{p_1}{d}-\frac{100}{s_1}}{(100-p_1)p_1}$.

Стр. 10.

Въ строкѣ 21-й послѣ словъ «на разстояніи $AB=\frac{\psi^2}{\gamma}$» слѣдуетъ читать: въ случаѣ мнимыхъ корней, подобно параболамъ B и B_1, изъ коихъ первая соотвѣтствуетъ раств. $NaCl$, а вторая раств. KCl. Въ случаѣ-же дѣйствительныхъ корней вершина параболы будетъ лежать слѣва, подобно параболѣ B_2, соотвѣтствующей растворамъ $BaCl_2$, для которыхъ $s=\frac{68965}{(p-305)^2-24001}$, и потому уравн. пароболы слѣдующее:

$$(p-305)^2-24001=68965\,\xi.$$

О сходимости непрерывныхъ дробей.

И. Слешинскаго.

Изъ безконечныхъ формъ, которыми въ анализѣ выражаются функціи, разсматривается преимущественно одна — безконечный рядъ. Безконечныя произведенія легко приводятся къ рядамъ. Что-же касается безконечныхъ непрерывныхъ дробей, то выполненіе аналитическихъ дѣйствій надъ ними неудобно и потому имъ посвящается менѣе вниманія. Изслѣдованія, принадлежащія къ этой области, относятся чаще всего къ приложеніямъ непрерывныхъ дробей. Хотя въ извѣстныхъ мнѣ работахъ Seidel'a, Stern'a, Thomé и др. встрѣчаются также вопросы, относящіеся къ сходимости дробей, авторы этихъ работъ ограничиваются, однако, лишь вещественными числами или разсматриваютъ весьма частные случаи. Ввиду этого мнѣ кажутся заслуживающими нѣкотораго вниманія ниже изложенные результаты, относящіеся къ весьма общему случаю.

Каждая аналитическая функція, для которой $x=o$ не представляетъ существенно особеннаго значенія, можетъ быть, какъ извѣстно, выражена рядомъ, расположеннымъ по возрастающимъ степенямъ перемѣнной; притомъ такъ, что разности показателей будутъ числами цѣлыми. Поэтому такая функція можетъ быть формально развернута въ непрерывную дробь вида:

$$\cfrac{a_0 x^{p_0}}{1+\cfrac{a_1 x^{p_1}}{1+\cfrac{a_2 x^{p_2}}{1+\ddots}}},$$

гдѣ p_1, p_2,. . . — цѣлыя положительныя числа, а p_0 можетъ быть нулемъ, положительнымъ или отрицательнымъ, цѣлымъ или дробнымъ числомъ. Обратимъ вниманіе на случай, въ которомъ

$$p_0 = o\ ,\ p_1 = p_2 = ... \qquad = 1.$$

Должно замѣтить, что отъ обращенія безконечнаго ряда въ безконечную дробь, пока коэффиціенты ряда остаются независимыми, получается дробь послѣдняго вида. Между тѣмъ какъ дробь перваго вида получается лишь при существованіи нѣкоторыхъ зависимостей между коэффиціентами ряда.

Мы будемъ разсматривать дальше дробь втораго вида т. е.:

$$\cfrac{a_0}{1+\cfrac{a_1 x}{1+\cfrac{a_2 x}{1+\ddots}}}$$

предполагая, что a_0, a_1, a_2,... представляютъ какія либо данныя комплексныя числа, а перемѣнное x можетъ принимать также комплексныя значенія. Обращаясь къ изслѣдованію области сходимости этой дроби, мы прежде всего замѣчаемъ, что сходимость обусловливается значеніями a_n при n безконечно возрастающемъ. Поэтому представляется естественнымъ изслѣдовать прежде всего

случаи, въ которыхъ $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ существуетъ. Оказывается, что случай $\lim\limits_{n=\infty} a_n=o$ требуетъ отдѣльнаго изслѣдованія. Условіе $\lim\limits_{n=\infty} a_n=o$, повидимому, не даетъ ничего опредѣленнаго. Но, если предположимъ столь быстрое убываніе количествъ a_n, что рядъ

$$|a_1|+|a_2|+\ldots \quad *)$$

сходится, то оказывается, что въ такомъ случаѣ непрерывная дробь сходится для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной и изображаетъ трансцендентную функцію съ одной существенно особенной точкой въ ∞. Переходя къ случаю $\lim\limits_{n=\infty} a_n=a\gtrless o$, встрѣчаемъ нѣкоторую трудность въ нахожденіи достаточнаго условія сходимости. Если обратимъ здѣсь вниманіе на величины $b_n=1-\frac{a_n}{a}$, которыя имѣютъ предѣлъ o, и предположимъ, что рядъ

$$|b_1|+|b_2|+\ldots$$

сходится, то приходимъ къ слѣдующей весьма общей теоремѣ, въ которой содержится, какъ предѣльный случай, и предыдущая. При вышеизложенныхъ условіяхъ непрерывная дробь сходится для всѣхъ конечныхъ значеній x, за исключеніемъ значеній, лежащихъ на продолженіи прямой, соединяющей точки o и $-\frac{1}{4a}$. Нѣкоторыя трудности, встрѣчающіяся при доказательствѣ этого

*) $|a|$ означаетъ абсолютную величину или модуль комплекснаго числа a

предложенія, устраняются при помощи извѣстнаго преобразованія перемѣнной:

$$z=\frac{1-\sqrt{1+4ax}}{1+\sqrt{1+4ax}}$$

Предыдущія теоремы предполагаютъ такую сходимость нѣкоторыхъ рядовъ, которая не нарушается отъ замѣны членовъ ихъ абсолютными значеніями. Въ прибавленіи изложено изслѣдованіе одного случая, въ которомъ это условіе не выполняется между тѣмъ дробь сходится для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной.

Въ слѣдующей статьѣ будетъ изложено другое рѣшеніе того-же вопроса. Новый пріемъ представляется значительно менѣе прямымъ, но имѣетъ то преимущество, что можетъ быть легко распространенъ и на такіе случаи, въ которыхъ $\lim\limits_{n=\infty} a_n$ не существуетъ.

18 іюня 1888 г.

I.

1. Будемъ разсматривать дробь:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{\gamma_1 x}{1+\cfrac{\gamma_2 x}{1+\ddots}}} \tag{1}$$

гдѣ γ—положительныя числа и рядъ

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots.. \tag{2}$$

сходится.

Обозначивъ знаменателей послѣдовательныхъ подходящихъ дробей чрезъ

$$\Omega_0,\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ldots \quad ,$$

имѣемъ:

$$\Omega_0=1;\ \Omega_1=1+\gamma_1 x;\ \Omega_2=1+(\gamma_1+\gamma_2)x;$$

$$\Omega_3=1+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)x+\gamma_1\gamma_3 x^2;\ldots$$

Вообще

$$\Omega_n=\Omega_{n-1}+\gamma_n x\Omega_{n-2} \quad , \tag{3}$$

причемъ Ω_n есть цѣлая функція степени $\frac{n}{2}$ при n четномъ и $\frac{n+1}{2}$ при n нечетномъ.

Положивъ

$$\Omega_n = 1 + \Gamma_{n,1} x + \Gamma_{n,2} x^2 + \ldots\ldots, \qquad (4)$$

находимъ изъ (3):

$$\Gamma_{n,1} = \Gamma_{n-1,1} + \gamma_n$$

$$\Gamma_{n,2} = \Gamma_{n-1,2} + \gamma_n \Gamma_{n-2,1}$$

$$\Gamma_{n,3} = \Gamma_{n-1,3} + \gamma_n \Gamma_{n-2,2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Gamma_{n,p} = \Gamma_{n-1,p} + \gamma_n \Gamma_{n-2,p-1}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Отсюда, замѣтивъ что

$$\Gamma_{2n,n+1} = o, \ \Gamma_{2n,n+2} = o, \ldots$$

$$\Gamma_{2n+1,n+2} = o, \ \Gamma_{2n+1,n+3} = o, \ldots$$

легко получаемъ слѣдующія равенства

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_{n,1} &= \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\ldots + \gamma_n \\
\Gamma_{n,2} &= \gamma_3 \Gamma_{1,1} + \gamma_4 \Gamma_{2,1} + \ldots + \gamma_n \Gamma_{n-2,1} \\
\Gamma_{n,3} &= \gamma_5 \Gamma_{3,2} + \ldots\ldots + \gamma_n \Gamma_{n-2,2} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\Gamma_{n,p} &= \gamma_{2p-1} \Gamma_{2p-3,p-1} + \ldots + \gamma_n \Gamma_{n-2,p-1} \text{ и т. д.}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

2. Первое изъ равенствъ (5) показываетъ, что $\Gamma_{n,1}$ представляетъ сумму первыхъ n членовъ ряда (2). Такъ какъ этотъ

рядъ, по предположенію, сходится, то $\lim\limits_{n=\infty} \Gamma_{n,1}$ существуетъ. Обозначимъ этотъ предѣлъ чрезъ Γ_1 Итакъ имѣемъ

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_{n,1}=\Gamma_1$$

Далѣе замѣчаемъ, что $\Gamma_{n,1}$—величина положительная и возрастаетъ съ увеличеніемъ n. Поэтому Γ_1—также величина положительная. Разсмотримъ теперь второе изъ равенствъ (5). Члены выраженія $\Gamma_{n,2}$ отличаются отъ членовъ ряда (2) лишь множителями $\Gamma_{1,1}$ $\Gamma_{2,1}$, $\Gamma_{3,1}$... Такъ какъ эти множители, по только что доказанному, имѣютъ конечный предѣлъ Γ_1, то рядъ котораго n—3 первыхъ члена составляютъ $\Gamma_{n,2}$, долженъ сходиться. Поэтому существуетъ

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_{n,2}=\Gamma_2$$

Такимъ-же образомъ приходимъ къ общему заключенію, что для всякаго p существуетъ

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_{n,p}=\Gamma_p;$$

причемъ всѣ $\Gamma_{n,p}$ и Γ_p—числа положительныя.

3. Разсмотримъ теперь тотъ безконечный рядъ, въ который обращается формально $\Omega_n(x)$ при безконечно большомъ n; т. е. рядъ

$$1+\Gamma_1 x+\Gamma_2 x^2+\ldots. \tag{7}$$

Имѣемъ

$$\Gamma_{n,p}=\gamma_{2p-1}\Gamma_{2p-3,p-1}+\gamma_{2p}\Gamma_{2p-2,p-1}+\ldots+\gamma_n\Gamma_{n-2,p-1}$$

Полагая здѣсь $n=\infty$, получимъ

$$\Gamma_p=\gamma_{2p-1}\Gamma_{2p-3,p-1}+\gamma_{2p}\Gamma_{2p-2,p-1}+\ldots.$$

Отсюда видимъ, что $\Gamma_{n,p}$ представляетъ лишь сумму $n-2p+2$ членовъ ряда, выражающаго Γ_p.

Поэтому:

$$\Gamma_{n,p}<\Gamma_p$$

или

$$\frac{\Gamma_{n,p}}{\Gamma_p}<1, \qquad (8)$$

Поэтому

$$\Gamma_p=\gamma_{2p-1}\Gamma_{2p-1,p-1}+\ldots.<(\gamma_{2p-1}+\ldots.)\Gamma_{p-1}$$

или

$$\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{p-1}}<\gamma_{2p-1}+\gamma_{2p}+\ldots.$$

Такъ какъ выраженіе, стоящее справа, представляетъ остатокъ сходящагося ряда, то изъ этого неравенства слѣдуетъ

$$\lim_{p=\infty}\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{p-1}}=o.$$

Слѣдовательно рядъ (7) сходится для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной.

4. Въ справедливости послѣдняго заключенія можно убѣдиться еще слѣдующимъ образомъ. Изъ формулъ (5) при $n=\infty$ слѣдуетъ, что Γ_p представляетъ сумму всѣхъ различныхъ произведеній изъ всѣхъ γ по p, за исключеніемъ тѣхъ, въ кото-

рыя входятъ двѣ или болѣе буквъ съ равными или на единицу разнящимися указателями. Сравнимъ Γ_p съ Γ_1^p, которое содержитъ всѣ такія произведенія и притомъ каждое съ цѣлымъ коэффиціентомъ. Каждый членъ выраженія Γ_1^p, содержащій лишь различныя γ имѣетъ, какъ извѣстно, коэффиціентъ $p!$. Поэтому

$$\Gamma_1^p > p!\Gamma_p \text{ или } \Gamma_p < \frac{\Gamma_1^p}{p!} .$$

Отсюда слѣдуетъ, что при всякомъ x

$$1+|\Gamma_1 x|+|\Gamma_2 x^2|+\ldots.$$
$$<1+|\Gamma_1 x|+\frac{1}{2!}|\Gamma_1 x|^2+\frac{1}{3!}|\Gamma_1 x|^3+\ldots.$$

т. е.

$$<e^{|\Gamma_1 x|}$$

т. е. остается конечнымъ. Поэтому рядъ

$$1+|\Gamma_1 x|+|\Gamma_2 x^2|+\ldots.$$

сходится для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной x, а вмѣстѣ съ нимъ сходится для тѣхъ-же значеній x и рядъ

$$1+\Gamma_1 x+\Gamma_2 x^2+\ldots.$$

Замѣтимъ еще, что изъ (5) можно вывести также заключеніе

$$\Gamma_{n,p} < \frac{1}{p!}\Gamma_{n,1}^{\ p}$$

Откуда, такъ какъ $\Gamma_{n,1}$ имѣетъ конечный предѣлъ при $n=\infty$, слѣдуетъ, между прочимъ, что $\Gamma_{n,p}$ съ увеличеніемъ n и p до безконечности стремится къ o.

5. Итакъ $\Omega_n(x)$ обращается формально при $n=\infty$ въ постоянно сходящійся рядъ

$$\Omega(x)=1+\Gamma_1 x+\Gamma_2 x^2+\dots. \tag{9}$$

Остается изслѣдовать будетъ-ли

$$\lim_{n=\infty} \Omega_n(x)=\Omega(x).$$

Для этого разсмотримъ разность

$$\Omega(x)-\Omega_n(x)=(\Gamma_1-\Gamma_{n,1})x+(\Gamma_2-\Gamma_{n,2})x^2+\dots$$

$$=(\Gamma_1-\Gamma_{n,1})x+(\Gamma_2-\Gamma_{n,2})x^2+(\Gamma_m-\Gamma_{n,m})x^m+R_{n,m}$$

$$=S_{n,m}+R_{n,m}, \text{ гдѣ}$$

$$R_{n,m}=(\Gamma_{m+1}-\Gamma_{n,m+1})x^{m+1}+(\Gamma_{m+2}-\Gamma_{n,m+2})x^{m+2}+\dots$$

$$=\left(1-\frac{\Gamma_{n,m+1}}{\Gamma_{m+1}}\right)\Gamma_{m+1}x^{m+1}+\left(1-\frac{\Gamma_{n,m+2}}{\Gamma_{m+2}}\right)\Gamma_{m+2}x^{m+2}+\dots$$

Замѣтивъ, что по (8) всегда

$$\frac{\Gamma_{n,p}}{\Gamma_p}<1,$$

а потому также

$$1-\frac{\Gamma_{n,p}}{\Gamma_p}<1,$$

получаемъ:

$$|R_{n,m}|\leq\left(1-\frac{\Gamma_{n,m+1}}{\Gamma_{m+1}}\right)|\Gamma_{m+1}x^{m+1}|+\left(1-\frac{\Gamma_{n,m+2}}{\Gamma_{m+2}}\right)|\Gamma_{m+2}x^{m+2}|+\dots$$

$$<|\Gamma_{m+1}x^{m+1}|+|\Gamma_{m+2}x^{m+2}|+\dots$$

Выраженіе

$$\Gamma_{m+1}x^{m+1}+\Gamma_{m+2}x^{m+2}+\ldots.$$

представляетъ остатокъ сходящагося ряда. Поэтому, увеличивая m, можно сдѣлать сумму

$$|\Gamma_{m+1}x^{m+1}|+|\Gamma_{m+2}x^{m+2}|+\ldots.$$

а, слѣдовательно, и величину $|R_{n,m}|$, при всякомъ n, сколь угодно малой. Выберемъ m такъ, чтобы $|R_{n,m}|<\frac{\delta}{2}$. Вслѣдъ затѣмъ обратимся къ выраженію $S_{n,m}$. Оно представляетъ сумму m членовъ, изъ коихъ каждый обращается въ o при $n=\infty$. Поэтому можно выбрать теперь n столь большимъ, чтобы было $|S_{n,m}|<\frac{\delta}{2}$. Тогда будетъ

$$|\Omega(x)-\Omega_n(x)|\leqq|R_{n,m}|+|S_{n,m}|<\delta$$

при сколь угодно маломъ δ. И такъ

$$\lim_{n=\infty}\Omega_n(x)=\Omega(x)$$

6. Изъ формулъ, выражающихъ законъ образованія числителей $\Pi_n(x)$ послѣдовательныхъ подходящихъ дробей, видно, что функція $\Omega_n(x)$ обращается въ $\Pi_n(x)$, если положить $\gamma_1=o$. Поэтому для функціи Π_n имѣетъ мѣсто результатъ, найденный выше для Ω_n т. е. при безконечновозрастающемъ n функція $\Pi_n(x)$ имѣетъ предѣлъ $\Pi(x)$, представляющій также нѣкоторую цѣлую трансцендентную функцію.

Поэтому подходящая дробь $\frac{\Pi_n(x)}{\Omega_n(x)}$ имѣетъ предѣлъ $\frac{\Pi(x)}{\Omega(x)}$, представляющій трансцендентную функцію съ одной существенно особенной точкой въ ∞.

7. Перейдемъ теперь къ общему случаю. Разсмотримъ дробь:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{c_1x}{1+\cfrac{c_2x}{1+\ddots}}} \qquad (10),$$

гдѣ $c_1, c_2, \ldots$ —произвольныя комплексныя числа, выполняющія условіе сходимости ряда

$$|c_1|+|c_2|+|c_3|+ \qquad (11)$$

Знаменателей и числителей послѣдовательныхъ подходящихъ дробей назовемъ соотвѣтственно чрезъ

$$Q_0, \ Q_1, \ Q_2, \ldots$$

$$P_0, \ P_1, \ P_2, \ldots$$

Положивъ

$$Q_n(x)=1+C_{n,1}x+C_{n,2}x^2+\ldots.$$

найдемъ, какъ въ членѣ 1,

$$\left.\begin{array}{l} C_{n,1}=c_1+c_2+\ldots+c_n \\ C_{n,2}=c_2C_{1,1}+c_4C_{2,1}+\ldots+c_nC_{n-2,1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_{n,p}=c_{2p-1}C_{2p-3,p-1}+\ldots+c_nC_{n-2,p-1} \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Изъ сходимости ряда (11) слѣдуетъ, что и рядъ $c_1+c_2+\ldots$ сходится. Поэтому $C_{n,1}$ имѣетъ предѣлъ. Положимъ $\lim\limits_{n=\infty} C_{n,1}=C_1$.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Къ теоріи дѣйствительныхъ газовъ.

---

§ *1*. Первая попытка теоріи дѣйствительныхъ газовъ принадлежитъ Фанъ-деръ-Ваальсу [1]). Заключительная формула, къ которой онъ приходитъ, формула, выражающая связь между объемомъ, давленіемъ и температурой данной массы дѣйствительнаго газа, во многихъ отношеніяхъ удовлетворительно согласуется съ опытомъ. Но нельзя не сознаться, что формула эта представляетъ скорѣе результатъ остроумной догадки, чѣмъ плодъ строгаго математическаго анализа.

Послѣ улучшенія, внесеннаго Лоренцомъ [2]) въ анализѣ Фанъ-деръ-Ваальса, противъ этого анализа все еще можно сдѣлать нѣсколько возраженій, которыя и будутъ сейчасъ приведены. Нѣкоторые недостатки теоріи Фанъ-деръ-Ваальса, какъ видно будетъ изъ дальнѣйшаго, на результатъ не вліяютъ; другіе отзываются на заключительной формулѣ, которую поэтому нельзя считать вполнѣ вѣрной. Уже однимъ этимъ можно было-бы объяснить то обстоятельство, что помянутая теорія ведетъ къ заключеніямъ, противорѣчащимъ закону Авогадро: основанныя на ней опредѣленія чиселъ молекулъ въ единицѣ объема для разныхъ газовъ, находящихся въ одинаковыхъ условіяхъ, даютъ числа не только

---

[1]) «Over de continuïteit van den g"s- en vloeistoftoestand». Leiden. 1873.

[2]) «Ueber die Anwendung des Satzes vom Virial...» Wied. Ann. Bd. XII.

не равныя между собой, какъ надлежало-бы по закону Авогадро, но даже разныхъ порядковъ. Впрочемъ на это, какъ увидимъ, есть еще и другая причина.

Возраженія, которыя можно сдѣлать противъ теоріи Фанъ-деръ Ваальса—Лоренца и нѣкоторыхъ, выводимыхъ изъ нея, заключеній, суть слѣдующія.

I) Примѣняя къ газовой массѣ, заключенной въ нѣкоторую оболочку, уравненіе Клаузіуса

$$-\Sigma(Xx+Yy+Zz)=\Sigma m\omega^2,$$

Фанъ-деръ-Ваальсъ разумѣетъ подъ X, Y, Z *не только силы, непрерывно дѣйствующія*, каковы суть силы взаимнаго притяженія между молекулами, *но и силы мгновенныя*, силы, развивающіяся при ударахъ молекулъ въ стѣнки оболочки. Лоренцъ разумѣетъ сверхъ того подъ X, Y, Z также и силы, развивающіяся при соудареніи между собой молекулъ, которыя онъ разсматриваетъ какъ совершенно упругіе однородные шары.

А между тѣмъ уравненіе Клаузіуса выводится изъ уравненій движенія

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

которыя теряютъ смыслъ, ели мы вздумаемъ разумѣть подъ X, Y, Z силы мгновенныя.

Вскорѣ мы увидимъ, что затрудненіе это легко устранимо: приведенное возраженіе теряетъ силу при весьма простой переформировкѣ вывода. Возраженіе это указываетъ лишь на недостатокъ метода, недостатокъ, на результаты теоріи не вліяющій.

II) Фанъ-деръ-Ваальсъ принимаетъ, что силы молекулярныхъ притяженій дѣйствуютъ лишь на молекулы, которыя находятся въ весьма тонкомъ слоѣ, прилежащемъ къ оболочкѣ; отъ притяженій, могущихъ дѣйствовать на молекулы, которыя находятся въ извѣстномъ удаленіи отъ оболочки, онъ отвлекается. Доводъ, приводимый имъ въ

оправданіе этого допущенія, состоитъ въ томъ, что молекула, находящаяся въ извѣстномъ удаленіи отъ оболочки, *должна притягиваться одинаково во всѣ стороны, т. е., что равнодѣйствующая притяженій, испытываемыхъ такой молекулой, должна равняться нулю.*

Этотъ доводъ былъ-бы вполнѣ вѣренъ, если-бы молекулы газа были неподвижны и распредѣлены въ пространствѣ равномѣрно. Но не трудно усмотрѣть, что онъ теряетъ свою силу при томъ воззрѣніи на газъ, которое лежитъ въ основѣ кинетической теоріи. Кинетическая теорія разсматриваетъ газовыя молекулы какъ тѣльца, движущіяся свободно и съ весьма большими скоростями. Если подъ столкновеніемъ двухъ молекулъ будемъ, ради большей общности, разумѣть сближеніе ихъ до извѣстнаго разстоянія, весьма малаго сравнительно съ среднимъ разстояніемъ между двумя сосѣдними молекулами, то, разъ мы считаемъ движеніе молекулъ свободнымъ, мы должны тѣмъ самымъ признать *возможность* столкновеній; мало того, такъ какъ молекулярныя скорости весьма велики, мы въ правѣ ожидать, что *столкновенія происходятъ часто.* Дѣйствительно, изъ сравненія кинетической теоріи вязкости газовъ съ опытомъ слѣдуетъ, что среднее число столкновеній газовой молекулы съ другими молекулами въ теченіе секунды измѣряются тысячами милліоновъ.

Итакъ молекулярныя столкновенія весьма часты; при столкновеніи двѣ молекулы значительно сближаются между собой; несомнѣнно, съ другой стороны, что молекулярныя притягательныя силы возрастаютъ весьма быстро съ уменьшеніемъ разстояній между молекулами. Ясно слѣдовательно, что столкновенія молекулъ нарушаютъ тотъ принципъ, который желалъ установить Фанъ-деръ-Ваальсъ по отношенію къ молекуламъ, достаточно удаленнымъ отъ оболочки; а такъ какъ столкновенія между молекулами чрезвычайно часты, то у насъ должно возникнуть серьезное сомнѣніе относительно законности допущенія Фанъ-деръ-Ваальса, въ силу котораго онъ вычисляетъ виріалъ притягательныхъ молекулярныхъ силъ лишь для весьма тонкаго поверхностнаго слоя, пренебрегая

притягательными силами, развивающимися внутри газовой массы при столкновеніяхъ молекулъ между собой.

Промахъ теоріи Фанъ-деръ-Ваальса, о которомъ только что была рѣчь, оказываетъ, какъ увидимъ, вліяніе на результаты этой теоріи.

III) Лоренцово исправленіе теоріи Фанъ-деръ-Ваальса состоитъ, какъ извѣсно, въ томъ, что Лоренцъ возстановляетъ нарушенное въ анализѣ Фанъ-деръ-Ваальса единство метода, находя поправку на *размѣры* молекулъ изъ тѣхъ-же соображеній, которыя даютъ поправку на «силу сцѣпленія», т. е. вычисляя виріалъ силъ, развивающихся при *соудареніи* молекулъ; молекулы Лоренцъ разсматриваетъ какъ совершенно упругіе однородные шары; число столкновеній такихъ шаровъ въ единицу времени получаетъ онъ *тѣмъ-же пріемомъ разсужденія, которымъ пользуются обыкновенно для идеальныхъ газовъ,* и въ основѣ котораго лежитъ предположеніе, что каждая молекула движется въ промежутокъ времени между двумя столкновеніями прямолинейно и равномѣрно. Кромѣ того Лоренцъ допускаетъ, что въ моментъ соударенія двухъ молекулъ относительная ихъ скорость обладаетъ такой-же величиной, какъ если-бы притягательныхъ силъ между молекулами совсѣмъ не было.

Строго говоря, допущенія Лоренца не основательны: очевидно, что, какъ число молекулярныхъ столкновеній, такъ и относительная скорость двухъ молекулъ при соудареніи, находятся въ зависимости отъ притягательныхъ силъ, дѣйствующихъ между молекулами.

Но нельзя-ли принять, что допущенія Лоренца суть приближенія, достаточныя для вывода извѣстной поправки? У Лоренца не находимъ отвѣта на этотъ вопросъ; это — слабая сторона его исправленія Фанъ-деръ-Ваальсовой теоріи.

Мы увидимъ изъ дальнѣйшаго, что помянутыя допущенія Лоренца можно оправдать лишь въ качествѣ грубыхъ приближеній. Эти допущенія составляютъ новую слабую сторону разбираемой теоріи, отозвавшуюся на конечныхъ ея результатахъ.

IV) Фанъ-деръ-Ваальсъ отвлекается отъ взаимодѣйствія на разстояніи между твердой оболочкой, содержащей газъ, и его молекулами. А между тѣмъ весьма вѣроятно, что стѣнки сосудовъ, содержащихъ газы, дѣйствуютъ на разстояніи на молекулы этихъ последнихъ. Такимъ образомъ возникаетъ еще одно сомнѣніе относительно сравнимости формулы Фанъ-деръ-Ваальса съ формулами эмпирическими и, слѣдовательно, относительно законности основанныхъ на подобныхъ сравненіяхъ вычисленій размѣровъ молекулъ, числа молекулъ въ единицѣ объема и т. д.

V) Противъ заключеній, которыя дѣлаются обыкновенно на основаніи сравненія формулы Фанъ-деръ-Ваальса — Лоренца съ эмпирической формулой Реньо, можно возразить слѣдующее.

Теорія Фанъ-деръ-Ваальса—Лоренца ведетъ къ формулѣ

$$pv+\frac{a}{v}-\frac{1}{3}\frac{bMG^2}{v}=\frac{1}{3}MG^2 \qquad (1)$$

(a, b суть нѣкоторыя постоянныя. M—масса газа, G^2—среднее квадрата молекулярной скорости). Итакъ уравненіе изотермы $0°C$ будетъ

$$pv+\frac{a-\frac{1}{3}bMG_0^2}{v}=\frac{1}{3}MG_0^2, \qquad (2)$$

гдѣ G_0—значеніе G при температурѣ $0°C$.

Уравненіе (2) не вполнѣ совпадаетъ съ эмпирической формулой Реньо

$$pv+\frac{A+2B}{v}-\frac{B}{v^2}=1+A+B; \qquad (3)$$

оно отличается отъ формулы Реньо отсутствіемъ члена втораго порядка малости, каковымъ является въ этой послѣдней членъ

$$\frac{B}{v^2}.$$

Если отвлечься отъ величинъ 2-го порядка малости, сравненіе формулъ (2) и (3) даетъ уравненія

$$a-\tfrac{1}{3}bMG_0^2=A+2B,\quad \tfrac{1}{3}MG_0^2=1+A+B,$$

которыхъ *недостаточно* для опредѣленія b, а слѣдовательно и для вычисленія молекулярныхъ размѣровъ.

Итакъ, по правдѣ сказать, *теорія Фанъ-деръ-Ваальса—Лоренца не даетъ возможности дѣлать какія-либо заключенія о размѣрѣ молекулъ, о числѣ ихъ въ единицѣ объема и т. д.* Чтобы получить возможность дѣлать такія заключенія, прибѣгаютъ обыкновенно къ слѣдующей непозволительной уловкѣ. Уравненіе (2) представляютъ въ видѣ

$$\frac{pv+\frac{a}{v}}{1+\frac{b}{v}}=\tfrac{1}{3}MG_0^2,$$

или, *пренебрегая* величинами $\frac{b^2}{v^2}$, $\frac{b^3}{v^3}$, ... передъ единицей, въ видѣ

$$\left(pv+\frac{a}{v}\right)\left(1-\frac{b}{v}\right)=\tfrac{1}{3}MG_0^2,$$

или

$$pv+\frac{a}{v}-bp-\frac{ab}{v^2}=\tfrac{1}{3}MG_0^2. \qquad (4)$$

Если выбрать единицу объема также, какъ это дѣлаетъ Реньо при установленіи формумы (3), то, *пренебрегая опять-таки величинами втораго порядка малости,* можемъ замѣнить членъ bp уравненія (4) черезъ $\frac{b}{v}$. Тогда уравненіе (4) обращается въ

$$pv+\frac{a-b}{v}-\frac{ab}{v^2}=\tfrac{1}{3}MG_0^2. \qquad (5)$$

Изъ сравненія этого послѣдняго уравненія съ (3) и опредѣляютъ b.

Недоразумѣніе состоитъ въ томъ, что при опредѣленіи b играетъ роль членъ $\frac{ab}{v^2}$ уравненія (5)—членъ 2-го порядка малости; а между тѣмъ при выводѣ уравненія (5) величины 2-го порядка были пренебрегаемы.

Итакъ, если даже допустить вѣрность формулы Фанъ-деръ-Ваальса—Лоренца (формулы (1)), вычисленія молекулярныхъ размѣровъ на ней основанныя все-же слѣдуетъ признать иллюзіей.

§ 2. Покажу теперь, какъ можетъ быть обойдено затрудненіе, о которомъ была рѣчь въ возраженіи 1-мъ.

Положимъ, что мы имѣемъ газъ, не подверженный дѣйствію внѣшнихъ силъ (напримѣръ тяжести) и заключенный въ нѣкоторую твердую оболочку. Положимъ, что молекулы его дѣйствуютъ одна на другую нѣкоторыми притягательными силами и кромѣ того испытываютъ притяженіе со стороны твердой оболочки. Самыя молекулы будетъ разсматривать какъ совершенно упругіе шары; силы упругости, развивающіяся при соударѣніяхъ молекулъ между собой и при ударахъ ихъ въ оболочку, будемъ считать игновенными.

Уравненія движенія одной изъ молекулъ разсматриваемой газовой массы будутъ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X\,,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y\,,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z\,, \qquad (1)$$

гдѣ m—масса молекулы, x, y, z—координаты ея центра, X, Y, Z — слагающія дѣйствующей на нее въ данный моментъ t силы, *силы, обусловливаемой дѣйствіемъ на разсматриваемую молекулу оболочки и остальныхъ молекулъ.*

Въ моменты удара молекулы въ оболочку, или при соударѣніи ея съ другими молекулами, величины $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ претерпѣваютъ нарушеніе непрерывности, получая игновенно конечныя приращенія; къ этимъ моментамъ уравненія (1) не приложимы; но они имѣютъ точный смыслъ въ моменты безконечно близкіе къ моментамъ удара.

Умножимъ первое изъ уравненій (1) на xdt и возьмемъ затѣмъ сумму отъ обѣихъ частей его, распространяя суммованіе на всѣ элементы времени dt, лежащіе въ промежуткѣ между $t=0$ и $t=\tau$ (τ — промежутокъ времени, въ теченіе котораго каждая молекула притерпѣваетъ весьма много столкновеній), *за исключеніемъ, впрочемъ, тѣхъ элементовъ времени, въ теченіе которыхъ происходятъ удары разсматриваемой молекулы въ оболочку или о другія молекулы.*

Обозначая это суммованіе знакомъ S_0^τ, будемъ имѣть:

$$mS_0^\tau x\frac{d^2x}{dt^2}dt=S_0^\tau Xxdt\,,$$

или

$$mS_0^\tau d\left(x\frac{dx}{dt}\right)-mS_0^\tau\left(\frac{dx}{dt}\right)^2dt=S_0^\tau Xxdt. \qquad (2)$$

Пусть будетъ P_x мгновенное приращеніе, которое получаетъ величина $\frac{dx}{dt}$ при нѣкоторомъ ударѣ нашей молекулы въ оболочку или о другую молекулу. Очевидно, что въ силу условія, сдѣланнаго нами относительно значенія символа S_0^τ,

$$S_0^\tau d\left(x\frac{dx}{dt}\right)=\Big|_0^\tau\left(x\frac{dx}{dt}\right)-\sum_0^\tau(xP_x)\,,$$

при чемъ $\sum\limits_0^\tau$ означаетъ суммованіе, распространенное на всѣ удары (въ оболочку или о другія молекулы), которымъ подвергается разсматриваемая молекула въ теченіе времени τ.

Уравненіе (2) можетъ быть, слѣдовательно, переписано такъ:

$$-S_0^\tau Xxdt-m\sum_0^\tau(xP_x)+m\Big|_0^\tau\left(x\frac{dx}{dt}\right)=mS_0^\tau\left(\frac{dx}{dt}\right)^2dt.$$

Сложимъ это послѣднее уравненіе съ двумя аналогичными, относящимися къ координатамъ y и z, при чемъ обозначимъ че-

резъ P_y и P_z величины, играющія по отношенію къ $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ такую-же роль, какую P_x играетъ по отношенію къ $\frac{dx}{dt}$. Будемъ имѣть:

$$-S_0^\tau(Xx+Yy+Zz)dt-m\sum_0^\tau(xP_x+yP_y+zP_z)+$$

$$+m\Big|_0^\tau\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)=mS_0^\tau\omega^2dt. \tag{3}$$

гдѣ

$$\omega^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

есть квадратъ скорости, которой обладаетъ наша молекула въ данный моментъ.

Сложимъ уравненіе (3) съ подобными ему уравненіями, относящимися ко всѣмъ остальнымъ молекуламъ газовой массы. Обозначая суммованіе, распространенное на всѣ молекулы, знакомъ Σ, будемъ имѣть:

$$-\Sigma S_0^\tau(Xx+Yy+Zz)dt-m\Sigma\sum_0^\tau(xP_x+yP_y+zP_z)+$$

$$+m\Sigma\Big|_0^\tau\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)=m\Sigma S_0^\tau\omega^2dt \tag{4}$$

(я принимаю, что мы имѣемъ дѣло съ газомъ однороднымъ, такъ что всѣ молекулы его обладаютъ одной и той-же массой m).

Очевидно, что знакъ Σ можетъ помѣняться мѣстомъ со знакомъ $\Big|_0^\tau$. Вслѣдствіе этого третій членъ лѣвой части уравненія (4) можно представить такъ:

$$\frac{m}{2}\Big|_0^\tau\Sigma\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2),$$

или

$$\frac{m}{2}\Big|_0^\tau\frac{d}{dt}\Sigma(x^2+y^2+z^2). \tag{5}$$

Положимъ, что разсматриваемый газъ находится въ состояніи видимаго покоя. Въ такомъ случаѣ движеніе его молекулъ стаціонарно, а потому величина

$$\Sigma(x^2+y^2+z^2)$$

близка къ постоянству и, слѣдовательно, величина

$$\frac{d}{dt}\Sigma(x^2+y^2+z^2)$$

близка къ нулю.

Итакъ выраженіе (5) представляетъ величину малую, во всякомъ-же случаѣ не возрастающую безпредѣльно съ возрастаніемъ τ. А между тѣмъ всѣ остальные члены уравненія (4) представляютъ величины, которыя, какъ не трудно усмотрѣть, пропорціональны τ. Отсюда слѣдуетъ, что, стоитъ только принять τ достаточно большимъ, и мы будемъ въ правѣ принебречь третьимъ членомъ лѣвой части уравненія (4) передъ остальными его членами.

Замѣтимъ еще слѣдующее. Величины X, Y, Z, x, y, z не претерпѣваютъ нарушенія непрерывности въ моменты ударовъ; величина ω измѣняется при ударахъ скачками, но скачками *конечными* (въ *дѣйствительности* не бываетъ случаевъ, чтобы молекула обладала безконечно большой скоростью; законъ Максвелла воплощаетъ эту мысль въ томъ, что даетъ для безконечно большой молекулярной скорости безконечно малую вѣроятность). Если присовокупить къ сказанному еще то соображеніе, что любая молекула претерпѣваетъ въ теченіе конечнаго промежутка времени τ *конечное число ударовъ*, то намъ станетъ понятно, что интегралы

$$\int_0^\tau (Xx+Yy+Zz)dt \quad \text{и} \quad \int_0^\tau \omega^2 dt$$

имѣютъ вполнѣ опредѣленный смыслъ и представляютъ величины, безконечно близкія къ

$$S_0^\tau(Xx+Yy+Zz)dt \text{ и } S_0^\tau\omega^2 dt.$$

Очевидно, что

$$\Sigma\int_0^\tau \omega^2 dt = \tau v N G^2,$$

гдѣ v—объемъ, занимаемый газомъ, N—число молекулъ въ единицѣ объема, G^2—среднее квадрата молекулярной скорости.

На основаніи вышесказаннаго можемъ переписать уравненіе (4) такъ:

$$-\Sigma\int_0^\tau(Xx+Yy+Zz)dt - m\Sigma\sum_0^\tau(xP_x+yP_y+zP_z) = \tau v N m G^2. \quad (6)$$

Въ этомъ уравненіи первый членъ лѣвой части выражаетъ дѣйствіе силъ сцѣпленія и притяженій, оказываемыхъ оболочкой на газовыя молекулы; второй членъ представляетъ дѣйствіе ударовъ молекулъ въ оболочку и одной о другую. Мы увидимъ въ дальнѣйшемъ, что, если принять вышеупомянутыя допущенія Фанъ-деръ-Ваальса и Лоренца, то уравненіе (6) приведетъ насъ къ формулѣ, тождественной съ Фанъ-деръ-Ваальсовой. Уравненіе (6) есть видоизмѣненное «уравненіе виріала», при выводѣ коего обойдено затрудненіе, упомянутое въ возраженіи 1-мъ.

§ 3. Вычислимъ ту часть виріала

$$-m\Sigma\sum_0^\tau(xP_x+yP_y+zP_z), \quad (1)$$

которая относится къ ударамъ молекулъ въ оболочку, содержащую газъ.

Разсмотримъ сначала ту часть выраженія (1), которая относится къ одному безконечно малому элементу внутренней поверхности оболочки, элементу, взятому при точкѣ (x, y, z). Очевидно, что эта часть выраженія (1) можетъ быть представлена такъ:

$$-m(\bar{x}\sum_0'P_x+\bar{y}\sum_0'P_y+\bar{z}\sum_0'P_z), \quad (2)$$

гдѣ $\sum\limits_{0}^{\tau}{}'$ означаетъ суммованіе, распространенное на всѣ молекулярные удары, которымъ подвергается разсматриваемый элементъ поверхности въ теченіе времени τ.

Обозначимъ поверхность этого элемента черезъ $d\sigma$; внутреннюю нормаль къ нему назовемъ n.

При ударѣ совершенно упругаго шара въ твердую неподвижную стѣну, слагающая скорости его, параллельная стѣнѣ, остается, какъ извѣстно, безъ измѣненія; слагающая скорости, нормальная къ стѣнѣ, измѣняется при ударѣ прерывно, а именно мѣняетъ мгновенно свой знакъ.

Положимъ, что при ударѣ, характеризуемомъ данными P_x, P_y, P_z, слагающая скорости молекулы по нормали n получила приращеніе P; ясно, что P есть величина положительная, равная удвоенной абсолютной величинѣ помянутой слагающей до удара; очевидно кромѣ того, что

$$P_x = P.\cos(n,x),\quad P_y = P.\cos(n,y),\quad P_z = P.\cos(n,z).$$

Выраженіе (2) представится теперь такъ:

$$-\{x\cos(n,x)+y\cos(n,y)+z\cos(n,z)\}\sum_{0}^{\tau}{}'mP. \qquad (3)$$

Ясно, что

$$\sum_{0}^{\tau}{}'mP = \tau p d\sigma,$$

гдѣ p есть отнесенное къ единицѣ поверхности давленіе газа на элементъ $d\sigma$; далѣе

$$x\cos(n,x)+y\cos(n,y)+z\cos(n,z) = r\cos(n,r),$$

гдѣ r означаетъ разстояніе точки (x, y, z) отъ начала координатъ, при чемъ *за положительное направленіе вектора r принимается направленіе отъ начала координатъ къ точкѣ* (x, y, z).

Итакъ выраженіе (3) обращается въ

$$-\tau p r\cos(n,r)d\sigma. \qquad (4)$$

Чтобы отъ выраженія (4) перейти къ выраженію (1), поскольку это послѣднее относится къ ударамъ молекулъ въ оболочку, надо просуммировать выраженіе (4), распространяя суммованіе на всѣ элементы поверхности оболочки.

Итакъ искомая нами часть выраженія (1) равна

$$-\tau p \int r \cos(n,r) d\sigma\,, \tag{5}$$

гдѣ $\int$ выражаетъ интеграцію, распространенную на всю внутреннюю поверхность оболочки

Не трудно усмотрѣть, что

$$-\int r \cos(n,r).d\sigma = 3v,$$

гдѣ v—занимаемый газомъ объемъ, а потому выраженіе (5) обращается окончательно въ

$$3\tau p v.$$

§ 4. Перейдемъ теперь къ вычисленію той части выраженія (1) § 3, которая относится къ ударамъ молекулъ одной о другую.

Обратимъ наше вниманіе на одно изъ такихъ соудареній. Пусть въ моментъ удара координаты центровъ соударяющихся молекулъ будутъ x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2. Если слагающія скорости первой молекулы возрастутъ вслѣдствіе удара на

$$P_x,\ P_y,\ P_z,$$

то слагающія скорости второй получатъ приращенія

$$-P_x, -P_y, -P_z;$$

это вытекаетъ изъ закона сохраненія количествъ движенія при ударѣ совершенно упругихъ шаровъ.

Слѣдовательно сумма выраженій $xP_x+yP_y+zP_z$, относящихся къ двумъ разсматриваемымъ молекуламъ, представится такъ:

$$(x_1-x_2)P_x+(y_1-y_2)P_y+(z_1-z_2)P_z. \tag{1}$$

Обозначимъ черезъ u_1 и u_2 значенія $\frac{dx}{dt}$ для первой и второй молекулы непосредственно передъ ударомъ; пусть величины u_1 и u_2 обращаются вслѣдствіе удара въ U_1 и U_2; тогда

$$P_x = U_1 - u_1 = -(U_2 - u_2),$$

или

$$P_x = \tfrac{1}{2}(U_1 - U_2) - \tfrac{1}{2}(u_1 - u_2).$$

Аналогичныя выраженія получимъ для P_y и P_z, и выраженіе (1) приметъ такой видъ:

$$\tfrac{1}{2}\{(x_1-x_2)[(U_1-U_2)-(u_1-u_2)]+(y_1-y_2)[(V_1-V_2)-(v_1-v_2)]+$$
$$+(z_1-z_2)[(W_1-W_2)-(w_1-w_2)]\},$$

или

$$-\tfrac{1}{2}\rho(\Xi-\xi), \qquad (2)$$

гдѣ ρ есть діаметръ молекулы, ξ—слагающая по линія центровъ скорости первой молекулы относительно второй непосредственно передъ ударомъ, а Ξ—та-же слагающая непосредственно послѣ удара; при этомъ *за положительное направленіе линіи центровъ принято направленіе отъ центра первой молекулы къ центру второй.*

Изъ теоріи удара извѣстно, что

$$\Xi = -\xi.$$

Изъ опредѣленія ξ слѣдуетъ, что оно положительно и равно абсолютной величинѣ того значенія, которое имѣетъ непосредственно передъ ударомъ производная $\frac{dr}{dt}$ (черезъ r я обозначаю разстояніе центровъ двухъ разсматриваемыхъ молекулъ). Обозначая помянутую абсолютную величину черезъ $\left(\frac{dr}{dt}\right)$, можемъ представить выраженіе (2) такъ:

$$\rho\left(\frac{dr}{dt}\right). \qquad (3)$$

Чтобы перейти отъ выраженія (3) къ выраженію (1) § 3, по скольку это послѣднее относится къ соудареніямъ молекулъ, надо, очевидно, взять сумму всѣхъ выраженій, подобныхъ (3), и относящихся ко всѣмъ соудареніямъ, происходящимъ въ теченіе времени τ въ объемѣ, занятомъ газомъ. Итакъ искомая нами часть выраженія (1) § 3 равна

$$-\tau v \rho m S\left(\frac{dr}{dt}\right), \tag{4}$$

гдѣ S означаетъ суммованіе, распространенное на всѣ столкновенія, происходящія въ единицу времени въ единицѣ объема. Мнѣ не удалось до сихъ поръ получить выраженія для

$$S\left(\frac{dr}{dt}\right) \tag{5}$$

въ предположеніи, что движеніе молекулъ дѣйствительнаго газа значительно уклоняется отъ прямолинейнаго и равномѣрнаго. Поэтому я сдѣлаю теперь допущеніе, которое дѣлаютъ Фанъ-деръ-Ваальсъ и Лоренцъ, т. е. приму, что при вычисленіи выраженія (5) можно разсматривать движеніе молекулъ какъ прямолинейное и равномѣрное. Въ такомъ случаѣ, если удовольствоваться способомъ разсужденія Лоренца, для

$$S\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

получится такое выраженіе:

$$\frac{2\pi}{3}\rho^2 N^2 G^2.$$

Выраженіе это требуетъ нѣкоторой поправки. Дѣло въ томъ, что при выводѣ его Лоренцъ беретъ для числа столкновеній молекулы въ единицу времени выраженіе, вѣрное лишь въ томъ предположеніи, что ρ исчезаетъ сравнительно со среднимъ разстояніемъ между двумя смежными молекулами. Предположеніе это

не вѣрно для дѣйствительнаго газа, и Клаузіусомъ[1]) было найдено выраженіе для числа молекулярныхъ столкновеній, свободное отъ этого предположенія. Правда, Клаузіусъ приписываетъ всѣмъ молекуламъ газа одну и ту-же по абсолютной величинѣ скорость; но, опираясь на его основную идею, можно, какъ увидимъ сейчасъ, вывести интересующую насъ формулу и для того случая, когда скорости распредѣлены на отдѣльныя молекулы газа по закону Максвелла.

Вообразимъ нѣкоторое пространство, вполнѣ ограниченное поверхностью произвольнаго вида. Положимъ, что элементы этой поверхности движутся, вслѣдствіе чего поверхность постоянно измѣняетъ свою форму, но измѣняетъ ее такъ, что объемъ пространства, ограничиваемаго деформирующейся поверхностью, остается неизмѣннымъ. Представимъ себѣ внутри этого пространства точку, движущуюся со скоростью ω; пусть всевозможныя положенія точки внутри пространства равновѣроятны, также, какъ и всевозможныя направленія ея движенія. Спросимъ себя: какова вѣроятность, чтобы точка натолкнулась на поверхность въ теченіе безконечно малаго промежутка времени dt? Найдемъ сначала вѣроятность, чтобы точка наткнулась на какой-нибудь элементъ dS поверхности.

Пусть будетъ dl длина пути, который пройдетъ точка въ теченіе времени dt *относительно* даннаго элемента dS. Представимъ себѣ точку неподвижной, а элементъ dS подвинувшимся на встрѣчу точкѣ на dl. Тогда искомая вѣроятность окажется равной вѣроятности, чтобы наша точка лежала внутри призматическаго пространства, описаннаго элементомъ dS при упомянутомъ его перемѣщеніи; а эта послѣдняя вѣроятность равна дроби, у которой числителемъ служитъ объемъ помянутаго призматическаго пространства, а знаменателемъ—объемъ всего разсматриваемаго нами пространства.

Обозначимъ черезъ ϑ уголъ между направленіемъ воображаемаго нами перемѣщенія элемента dS и нормалью къ этому по-

[1]) Ueber den Satz vom mittleren Ergal. Sitzungsberichte der Niederrheinischen Ges. für Naturkunde. 1874

Разсматривая рядъ

$$|c_3||C_{1,1}|+|c_4||C_{2,1}|+\ldots\qquad,$$

видимъ, что члены его различаются отъ членовъ сходящагося ряда положительныхъ чиселъ (11) лишь множителями $|C_{1,1}|,|C_{2,1}|\ldots$ Но эти множители, какъ только что доказано, имѣютъ конечный предѣлъ C_1. Слѣдовательно разсматриваемый рядъ сходится. Поэтому рядъ

$$c_3C_{1,1}+c_4C_{2,1}+\ldots$$

также сходится и слѣдовательно по (12) $C_{n,2}$ имѣетъ предѣлъ. Такимъ же образомъ убѣждаемся, что при всякомъ p существуетъ

$$\lim_{n=\infty} C_{n,p}=C_p,$$

гдѣ C_p—конечная величина.

8. Рядъ, въ который обращается формально $Q_n(x)$ при $n=\infty$, будетъ

$$1+C_1x+C_2x^2+\ldots\qquad(13)$$

Изслѣдуемъ сходимость этого ряда. Для этой цѣли обозначимъ c_k чрезъ γ_k, а выраженіе, въ которое обращается $C_{n,p}$ отъ замѣны каждаго c_k чрезъ γ_k, обозначимъ чрезъ $\Gamma_{n,p}$. Такъ какъ система (12) имѣетъ видъ тотъ-же какъ и (5), то ясно, что функціи $\Gamma_{n,k}$, вводимыя нами, будутъ тѣже, что и въ членахъ 1—6. Сравнимъ теперь рядъ (13) съ рядомъ, отвѣчающимъ величинамъ γ (форм. 9). Изъ (12) слѣдуетъ:

$$|C_{n,1}|\leqq|c_1|+|c_2|+\ldots+|c_n|$$

т. е.

$$|C_{n,1}|\leqq\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n$$

Или

$$|C_{n,1}| \leqq \Gamma_{n,1}$$

Далѣе на основаніи (12)

$$|C_{n,2}| \leqq |c_3||C_{1,1}| + |c_4||C_{2,1}| + \ldots + |c_n||C_{n-2,1}|$$

Поэтому

$$|C_{n,2}| \leqq \gamma_3 \Gamma_{1,1} + \gamma_4 \Gamma_{2,1} + \ldots + \gamma_n \Gamma_{n-2,1}$$

т. е.

$$|C_{n,2}| \leqq \Gamma_{n,2}$$

Вообще

$$|C_{n,p}| \leqq \Gamma_{n,p} \tag{14}$$

Поэтому и

$$|C_p| \leqq \Gamma_p \tag{15}$$

Такъ какъ рядъ (9) сходится для всѣхъ конечныхъ значеній x, то рядъ

$$1 + \Gamma_1|x| + \Gamma_2|x|^2 + \ldots$$

также сходится для конечныхъ значеній x. Но по (15) рядъ

$$1 + |C_1||x| + |C_2||x|^2 + \ldots$$

состоитъ изъ меньшихъ членовъ, слѣдовательно и этотъ рядъ долженъ сходиться. Поэтому будетъ сходиться также рядъ

$$Q(x) = 1 + C_1x + C_2x^2 + \ldots$$

при всякомъ конечномъ x.

9. Займемся теперь вопросомъ, приближается-ли $Q_n(x)$ съ увеличеніемъ n къ функціи $Q(x)$. Для этого разсмотримъ раз-

ность $Q(x)-Q_n(x)$. Она состоитъ изъ членовъ вида $(C_p-C_{n,p})x^p$. Раздѣлимъ ихъ на двѣ группы. Всѣ члены отъ начала до члена, отвѣчающаго $p=m$ пусть составляютъ одну группу, всѣ остальные—другую. Для каждаго члена имѣемъ:

$$|C_p-C_{n,p}|\leqq|C_p|+|C_{n,p}|$$

Слѣдовательно на основаніи (14) и (15)

$$|C_p-C_{n,p}|\leqq\Gamma_p+\Gamma_{n,p}$$

и, наконецъ, по (8)

$$|C_p-C_{n,p}|<2\Gamma_p.$$

Поэтому остатокъ разсматриваемаго ряда меньше по абсолютной величинѣ, чѣмъ двойной остатокъ сходящагося ряда $1+\Gamma_1|x|+\Gamma_2|x|^2+\ldots$. Слѣдовательно, увеличивая m, можемъ уменьшить его сколь угодно. Возьмемъ m столь большимъ, чтобы абсолютная величина остатка была меньше $\frac{\delta}{2}$. Выберемъ затѣмъ n столь большимъ, чтобы первая группа была также меньше $\frac{\delta}{2}$. Тогда будетъ $|Q-Q_n|<\delta$ и слѣдовательно будетъ величиной произвольно малой. Отсюда заключаемъ, что $Q_n(x)$ имѣетъ предѣлъ $Q(x)$. Также убѣждаемся въ существованіи предѣла $P(x)$ функціи $P_n(x)$. Поэтому предѣлъ функціи $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ будетъ $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Такимъ образомъ получается слѣдующая теорема:

Безконечная непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{c_1x}{1+\cdots}}$$

сходится при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x и представляетъ

аналитическую функцію съ одной существенно особенной точкой въ ∞, если рядъ

$$|c_1|+|c_2|+|c_3|+\dots.$$

сходится.

II.

10. Разсмотримъ теперь дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{1+\ddots}}} \qquad (1),$$

гдѣ a_n имѣетъ при $n=\infty$ конечный, неравный нулю, предѣлъ. Введемъ обозначенія:

$$\lim_{n=\infty} a_n=a \qquad (2)$$

$$1-\frac{a_n}{a}=c_n \qquad (3)$$

По условію (2) будетъ

$$\lim_{n=\infty} c_n=o.$$

Мы сдѣлаемъ теперь предположеніе, что рядъ

$$|c_1|+|c_2|+\dots.$$

сходится.

11. Имѣемъ здѣсь

$$Q_0=1\ ;\ Q_1=1+a_1x \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$Q_n(x)=Q_{n-1}(x)+a_nxQ_{n-2}(x) \tag{5}$$

Степень функціи Q_n выражается числомъ $\frac{n}{2}$ или числомъ $\frac{n+1}{2}$, смотря потому будетъ ли n четнымъ или нечетнымъ числомъ. Воспользуемся преобразованіемъ перемѣнной

$$z=\frac{1-\sqrt{1+4ax}}{1+\sqrt{1+4ax}}\ ;\ x=-\frac{z}{a(1+z)^2} \qquad (6),$$

гдѣ корень квадратный имѣетъ положительную вещественную часть. Вслѣдствіе этого преобразованія $Q_n(x)$ обратится въ дробь. Положимъ

$$Q_n(x)=\frac{q_n(z)}{(1+z)^{n+1}} \tag{7}$$

или

$$q_n(z)=(1+z)^{n+1}Q_n(x)$$

При четномъ n высшій знаменатель въ Q_n будетъ $[(1+z)^2]^{\frac{n}{2}}$ т. е. $(1+z)^n$; при n—нечетномъ высшій знаменатель будетъ $[(1+z)^2]^{\frac{n+1}{2}}$ т. е. $(1+z)^{n+1}$. Поэтому $q_n(z)$ при всякомъ n будетъ цѣлой функціей степени $n+1$. Изъ (5), при помощи (7) и (3), получаемъ

$$q_n(z)=(1+z)q_{n-1}(z)-(1-c_n)zq_{n-2}(z)$$

Отсюда

$$q_0(z)=1+z$$

$$q_1(z)=1+(1+c_1)z+z^2$$

$$q_2(z)=1+(1+c_1+c_2)z+(1+c_1+c_2)z^2+z^3 \text{ и т. д.}$$

Если положимъ

$$q_n(z)=C_{n,0}+C_{n,1}z+C_{n,2}z^2+\ldots+C_{n,n}z^n+C_{n,n+1}z^{n+1},$$

то найдемъ

$$C_{0,0}=1\ ;\ C_{0,1}=1$$

$$C_{1,0}=1\ ;\ C_{1,1}=1+c_1\ ;\ C_{1,2}=1 \text{ и т. д.}$$

Причемъ вообще

$$C_{p,q}=o \text{ при } q>p+1 \text{ или } p-q>1.$$

Далѣе

$$C_{n,0}=1\ ;\ C_{n,1}=1+c_1+c_2+\ldots+c_n.$$

$$C_{n,p}-C_{n-1,p}=C_{n-1,p-1}-C_{n-2,p-1}+c_nC_{n-2,p-1}$$

Уменьшая въ этомъ равенствѣ q разъ указатель n на 1 и складывая съ нимъ почленно всѣ полученныя такимъ образомъ равенства, найдемъ

$$C_{n,p}-C_{n-q-1,p}=C_{n-1,p-1}-C_{n-q-2,p-1}$$

$$+c_nC_{n-2,p-1}+c_{n-1}C_{n-3,p-1}+\ldots+c_{n-q}C_{n-q-2,p-1}.$$

Возьмемъ теперь $q=n-p+1$. Коэффиціентъ $C_{p,q}$ равенъ нулю всякій разъ, когда разность между вторымъ и первымъ указателемъ больше чѣмъ 1. Поэтому получимъ:

$$C_{n,p}=C_{n-1,p-1}+c_pC_{p-2,p-1}+c_{p+1}C_{p-1,p-1}+\ldots$$
$$+c_{n-1}C_{n-3,p-1}+c_nC_{n-2,p-1} \qquad (8)$$

12. Обозначимъ $|c_k|$ чрезъ γ_k, а то выраженіе, въ которое обращается C_v вслѣдствіе замѣнивъ c_k чрезъ γ_k, назовемъ чрезъ Γ_v. Тогда будемъ имѣть

$$\Gamma_{n,1}=1+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n \tag{9}$$

$$\Gamma_{n,p}=\Gamma_{n-1,p-1}+\gamma_p\Gamma_{p-2,p-1}+\gamma_{p+1}\Gamma_{p-1,p-1}+\ldots+\gamma_n\Gamma_{n-2,p-1} \tag{10}$$

$$\Gamma_{n,p}-\Gamma_{n-1,p}=\Gamma_{n-1,p-1}-\Gamma_{n-2,p-1}+\gamma_n\Gamma_{n-2,p-1} \tag{11}$$

Такъ что $\Gamma_{n,p}$ выражается помощью различныхъ Γ, которыхъ второй указатель равенъ $p-1$. Непосредственно видимъ, что $\Gamma_{n,1}$ — величина положительная. Отсюда слѣдуетъ, при помощи (10), что $\Gamma_{n,2}$—также положительная величина. Такимъ-же образомъ убѣждаемся, что каждая $\Gamma_{n,p}$ — величина положительная.

По предположенію рядъ

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots$$

сходится. Отсюда слѣдуетъ, что $\Gamma_{n,1}$ имѣетъ предѣлъ. Обозначимъ его чрезъ Γ_1. Тогда.

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_{n,1}=\Gamma_1.$$

Разсмотримъ теперь равенство (10) при $p=2$. Это равенство выражаетъ $\Gamma_{n,2}$ помощью $\Gamma_{n-1,1}$ и ряда членовъ, которые отличаются отъ членовъ сходящагося ряда $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\ldots$ лишь множителями, имѣющими конечный предѣлъ Γ_1. Новый рядъ будетъ поэтому также сходящимся. Слѣдовательно $\Gamma_{n,2}$ имѣетъ также предѣлъ Γ_2. Продолжая подобныя разсужденія, найдемъ, что для всякаго p существуетъ

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_{n,p}=\Gamma_p.$$

13. Разсмотримъ теперь рядъ

$$1+\Gamma_1 z+\Gamma_2 z^2+\Gamma_3 z^3+\ldots.$$

Изслѣдуемъ сходимость этого ряда. Съ этой цѣлью обратимъ вниманіе на слѣдующія свойства коэффиціентовъ $\Gamma_{n,p}$. Такъ какъ всѣ $\Gamma_{n,p}$ и всѣ γ_k положительны, то изъ (10) слѣдуетъ, что

$$\Gamma_{n,p}>\Gamma_{n-1,p-1} \qquad (12)$$

Далѣе имѣемъ

$$\Gamma_{n,p}>\Gamma_{n-1,p} \qquad (13)$$

Въ самомъ дѣлѣ, для $p=1$ это справедливо, ибо $\Gamma_{n,1}=\Gamma_{n-1,1}+\gamma_n$. Если-же предположимъ, что это справедливо для $p-1$, то по (11) оно окажется справедливымъ также для p. Отсюда слѣдуетъ, между прочимъ, что

$$\Gamma_{n,p}<\Gamma_p \qquad (14)$$

Обратимся теперь къ равенству (10). Такъ какъ на основаніи (13), будетъ

$$\Gamma_{p-2,p-1}<\Gamma_{p-1,p-1}\ldots.<\Gamma_{n-2,p-1}<\Gamma_{n-1,p-1},$$

то изъ (10) находимъ

$$\Gamma_{n,p}<(1+\gamma_p+\gamma_{p+1}+\ldots.+\gamma_n)\Gamma_{n-1,p-1}$$

или, на основаніи (12)

$$\Gamma_{n-1,p-1}<\Gamma_{n,p}<(1+\gamma_p+\ldots.+\gamma_n)\Gamma_{n-1,p-1}$$

Или

$$1<\frac{\Gamma_{n,p}}{\Gamma_{n-1,p-1}}<1+\gamma_p+\gamma_{p+1}+\ldots.+\gamma_n$$

Если n будетъ возрастать безконечно, то отношеніе $\frac{\Gamma_{n,p}}{\Gamma_{n-1,p-1}}$ будетъ стремиться къ предѣлу $\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{p-1}}$, а $\gamma_p+\gamma_{p-1}+\ldots+\gamma_n$ обратится въ безконечный рядъ. Поэтому $\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{p-1}}$ должно содержаться между 1 и $1+\gamma_p+\gamma_{p+1}\ldots$. Слѣдовательно:

$$\lim_{p=\infty}\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{p-1}}=1,$$

такъ какъ $\gamma_p+\gamma_{p+1}+\ldots$ представляетъ остатокъ сходящагося ряда. Итакъ разсматриваемый рядъ сходится внутри круга радіуса 1.

14. **Имѣемъ:**

$$C_{n,1}=1+c_1+c_2+\ldots+c_n,$$

По предположенію рядъ

$$|c_1|+|c_2|+\ldots$$

сходится. Поэтому рядъ

$$1+c_1+c_2+\ldots$$

также сходится, т. е. существуетъ

$$\lim_{n=\infty} C_{n,1}=C_1$$

Далѣе по (8) при $p=2$

$$C_{n,2}=C_{n-1,1}+c_2C_{0,1}+c_3C_{1,1}+\ldots+c_nC_{n-2,1}$$

Члены ряда

$$|c_2||C_{0,1}|+|c_3||C_{1,1}|+\ldots.$$

отличаются отъ членовъ сходящагося ряда

$$|c_2|+|c_3|+\ldots.$$

лишь множителями

$$|C_{0,1}|,\ |C_{1,1}|,\ldots. \qquad ,$$

имѣющими, конечный предѣлъ $|C_1|$. Поэтому рядъ этотъ сходится. Слѣдовательно сходится также и рядъ

$$c_2C_{0,1}+c_3C_{1,1}+\ldots.$$

Поэтому существуетъ

$$\lim_{n=\infty} C_{n,2}=C_2$$

и т. д. Вообще существуетъ

$$\lim_{n=\infty} C_{n,p}=C_p$$

15. Функція $q_n(z)$ обращается формально при $n=\infty$ въ безконечный рядъ

$$1+C_1z+C_2z^2+\ldots.$$

Сравнимъ этотъ рядъ съ рядомъ:

$$1+\Gamma_1z+\Gamma_2z^2+\ldots. \qquad ,$$

котораго сходимость разсмотрѣна въ членѣ 13. Къ этой цѣли ведутъ слѣдующія соображенія. Имѣемъ

$$C_{n,1}=1+c_1+c_2+\ldots.+c_n$$

Поэтому

$$|C_{n,1}| \leqq 1+|c_1|+|c_2|+\ldots+|c_n|$$

т. е.

$$|C_{n,1}| \leqq 1+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n$$

Или

$$|C_{n,1}| \leqq \Gamma_{n,1}$$

Допустивъ, что это справедливо для $p-1$, видимъ изъ (8), что оно справедливо также для p. Въ самомъ дѣлѣ, изъ (8) въ этомъ предположеніи слѣдуетъ

$$|C_{n,p}| \leqq \Gamma_{n-1,p-1}+\gamma_p\Gamma_{p-2,p-1}+\ldots+\gamma_n\Gamma_{n-2,p-1}$$

т. е. по (10)

$$|C_{n,p}| \leqq \Gamma_{n,p} \tag{15}$$

что и тр. д.

Поэтому также

$$|C_p| \leqq \Gamma_p \tag{16}$$

Такъ какъ рядъ

$$1+\Gamma_1 z+\Gamma_2 z^2+\ldots$$

при $|z|<1$ сходится, то для такихъ z сходится также рядъ

$$1+\Gamma_1|z|+\Gamma_2|z|^2+\ldots$$

Поэтому на основаніи (16) сходится рядъ

$$1+|C_1||z|+|C_2||z|^2+\ldots$$

а вмѣстѣ съ нимъ и рядъ

$$q(z)=1+C_1z+C_2z^2+\dots.$$

для всѣхъ z, для которыхъ $|z|<1$.

16. Остается рѣшить вопросъ будетъ ли $q(z)$ предѣломъ $q_n(z)$. Рѣшеніе этого вопроса ничѣмъ не отличается отъ рѣшенія подобнаго-же вопроса, которое изложено въ членахъ 5 и 9, потому что зависимости

$$\Gamma_{n,p}<\Gamma_p \tag{14}$$

$$|C_{n,p}|\leqq\Gamma_{n,p} \tag{15}$$

$$|C_p|\leqq\Gamma_p \tag{16}$$,

на которыхъ тамъ основано доказательство, здѣсь также имѣютъ мѣсто. Такимъ образомъ доказано, что

$$\lim_{n=\infty} q_n(z)=1+C_1z+C_2z^2+\dots.$$

при $|z|<1$.

17. Возвращаясь теперь къ первоначальной функціи $Q_n(x)$, имѣемъ по (7)

$$Q_n(x)=\frac{q_n(z)}{(1+z)^{n+1}}$$

Совершенно также можно положить

$$P_n(x)=\frac{p_n(z)}{(1+z)^{n+1}}$$

гдѣ $P_n(x)$ выражаетъ числителя $n+1^{\text{ой}}$ подходящей дроби. Но $P_n(x)$ получается изъ $Q_n(x)$, если положимъ $a_1=o$. Поэтому для $P_n(x)$ справедливо доказанное для $Q_n(x)$. Итакъ $p_n(z)$ также имѣетъ предѣлъ при $n=\infty$ для $|z|<1$. Отсюда слѣдуетъ, что

отношеніе $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{p_n(z)}{q_n(z)}$ имѣетъ предѣлъ для тѣхъ-же значеній z. Въ силу преобразованія (6) значеніямъ $|z|<1$ отвѣчаютъ всѣ значенія x, за исключеніемъ тѣхъ, которыя лежатъ на продолженіи прямой, соединяющей o съ $\frac{-1}{4a}$. Отсюда вытекаетъ

Теорема. Непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{1+\ldots}}},$$

гдѣ $\lim_{n=\infty} a_n=a$ сходится для всѣхъ значеній x внѣ извѣстнаго прямолинейнаго отрѣзка, если сходится рядъ

$$|c_1|+|c_2|+\ldots.$$

гдѣ

$$c_n=1-\frac{a_n}{a}.$$

Прибавленіе.

Въ членѣ 9 мы пришли къ общей теоремѣ о сходимости непрерывной дроби въ случаѣ, когда $\lim_{n=\infty} c_n = o$. Изъ этой теоремы видимъ, что сходимость ряда:

$$|c_1| + |c_2| + \ldots$$

является достаточнымъ условіемъ сходимости дроби для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной. Естественнымъ является вопросъ, не будетъ-ли это условіе также необходимымъ для такой сходимости. На этотъ вопросъ должно отвѣтить отрицательно. Извѣстно разложеніе

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{x}{1}}{1 + \cfrac{\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1 + \ldots}}}}$$

гдѣ $c_1 = -1$; $c_2 = \frac{1}{2}$; $c_3 = -\frac{1}{6}$; $c_4 = \frac{1}{6}$; $c_5 = -\frac{1}{10}$; $c_6 = \frac{1}{10} \ldots$

Здѣсь рядъ

$$|c_1| + |c_2| + \ldots$$

расходится, между тѣмъ какъ дробь сходится во всей плоскости. Займемся этой особенностью разсматриваемаго случая. Прежде всего замѣчаемъ, что здѣсь $a_{2n-1} + a_{2n} = o$, начиная съ $n = 2$.

Такъ какъ сходимость дроби не зависитъ отъ первыхъ звеньевъ, то вмѣсто разсматриваемой дроби мы можемъ взять другую

$$\frac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1-\ddots}}},$$

въ которой числители звеньевъ отъ начала удовлетворяютъ условію $a_{2n-1}+a_{2n}=o$.

Далѣе, мы можемъ значительно объобщить разсматриваемый случай, предполагая, что количества a_n связаны лишь условіями

$$a_{2n-1}+a_{2n}=o \text{ и } \lim_{n=\infty} a_n=o.$$

Иначе говоря, мы предположимъ, что

$$a_{2n}=-a_{2n-1}$$

и что

$$a_1, a_3, a_5, \ldots .$$

представляетъ произвольный рядъ чиселъ, убывающихъ до o. Тогда окажется, что вмѣсто ряда

$$a_1+a_2+a_3+\ldots .$$

для рѣшенія вопроса о сходимости дроби можно взять рядъ

$$a_1a_3+a_3a_5+a_5a_7+\ldots .$$

Можетъ случиться, что рядъ этотъ сходится при замѣнѣ членовъ ихъ абсолютными значеніями, между тѣмъ какъ $|a_1|+|a_2|+\ldots$ расходится. Это обстоятельство имѣетъ мѣсто въ нашемъ примѣрѣ, гдѣ новый рядъ будетъ:

$$\frac{1}{6^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{14^2}+\ldots.$$

т. е. сходится.

Итакъ возьмемъ дробь

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{1+\ddots}}}$$

гдѣ

$$a_{2n-1}+a_{2n}=o \qquad (1)$$

при

$$n=1,2,3,\ldots.$$

Приложимъ къ этой дроби формулы члена 1, измѣняя лишь обозначенія, а именно: вводя вмѣсто употребленныхъ тамъ буквъ γ, Γ, Ω—соотвѣтственно: a, A и Q. Знаменатель $n+1^{\text{ой}}$ подходящей дроби будетъ теперь

$$Q_n(x)=1+A_{n,1}x+A_{n,2}x^2+\ldots.$$

На основаніи (1), находимъ

$$A_{2n,1}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\ldots+(a_{2n-1}+a_{2n})=o$$

т. е.

$$A_{2n,2p-1}=o \qquad (2)$$

при $p=1$. Допустимъ, что это справедливо для всякихъ значеній p до $p=v$ при всякомъ n. Тогда изъ зависимости

$$A_{2n,2n}=A_{2n-1,2v}+a_{2n}A_{2n-2,2v-1}$$

такъ какъ, по допущенію, $A_{2n-2,2v-1}=0$, имѣемъ

$$A_{2n,2v}=A_{2n-1,2v} \tag{3}$$

Далѣе изъ зависимости

$$A_{2n,2v-1}=A_{2n-1,2v-1}+a_{2n}A_{2n-2,2v-2},$$

въ силу допущенія $A_{2n,2v-1}=0$, имѣемъ

$$A_{2n-1,2v-1}=-a_{2n}A_{2n-2,2v-2}$$

или, по (1)

$$A_{2n-1,2v-1}=a_{2n-1}A_{2n-2,2v-2} \tag{4}$$

Послѣднее изъ равенствъ (5) въ членѣ 1 даетъ

$$A_{2n,2v+1}=a_{4v+1}A_{4v-1,2v}+a_{4v+2}A_{4v,2v}+a_{4v+3}A_{4v+1,2v}+\ldots+a_{2n}A_{2n-2,2v}$$

Но по (3)

$$A_{4v-1,2v}=A_{4v,2v}$$

$$A_{4v+1,2v}=A_{4v+2,2v} \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно

$$A_{2n,2v+1}=(a_{4v+1}+a_{4v+2})A_{4v,2v}+\ldots+(a_{2n-1}+a_{2n})A_{2n-2,2v}$$

или, по (1)

$$A_{2n,2v+1}=0$$

т. е. (2) справедливо и при $p=v+1$. Итакъ равенство (2), а вмѣстѣ съ нимъ (3) и (4) доказаны для всякихъ указателей. Отсюда заключаемъ, что функція Q_{2n} содержитъ лишь четныя степени x. Функція Q_{2n-1} содержитъ тѣ и другія степени, но коэффиціенты ихъ ($A_{2n-1,2v-1}$ и $A_{2n-1,2v}$) выражаются очень просто помощью коэффиціентовъ функціи Q_{2n} (зависимости (3)

и (4)). Поэтому все сводится къ разсмотрѣнію этихъ послѣднихъ.

Съ этой цѣлью обратимся къ равенству

$$A_{2n+1,2p}=A_{2n,2p}+a_{2n+1}A_{2n-1,2p-1}.$$

По (3)

$$A_{2n+1,2p}=A_{2n+2,2p}.$$

По (4)

$$A_{2n-1,2p-1}=a_{2n-1}A_{2n-2,2p-2}$$

Поэтому изъ взятаго равенства слѣдуетъ

$$A_{2n+2,2p}=A_{2n,2p}+a_{2n+1}a_{2n-1}A_{2n-2,2p-2}$$

Обозначимъ на время $A_{2n+2,2p}$ черезъ $\Gamma_{n,p}$ и $a_{2n+1}a_{2n-1}$ черезъ γ_n. Тогда получимъ:

$$\Gamma_{n,p}=\Gamma_{n-1,p}+\gamma_n\Gamma_{n-2,p-1}$$

При $p=1$

$$\Gamma_{n,1}=\Gamma_{n-1,1}+\gamma_n,$$

потому что

$$\Gamma_{n-2,0}=A_{2n+2,0}=1.$$

Система равенствъ, опредѣляющихъ количества Γ ничѣмъ не разнится отъ системы въ членѣ 1, причемъ рядъ

$$\gamma_1+\gamma_2+\ \ldots$$

въ данномъ случаѣ есть,

$$a_1a_3+a_3a_5+a_5a_7+\ \ldots$$

Если теперь предположимъ, что рядъ этотъ сходится при замѣнѣ членовъ ихъ абсолютными величинами, то сходимость его будетъ достаточнымъ условіемъ существованія $\lim\limits_{n=\infty} Q_{2n}(x)$ для всѣхъ конечныхъ значеній x. Далѣе, такъ какъ

$$Q_{2n}=Q_{2n-1}+a_{2n}xQ_{2n-2}$$

т. е.

$$Q_{2n-1}=Q_{2n}-a_{2n}xQ_{2n-2}$$

то $\lim\limits_{n=\infty} Q_{2n-1}$ также существуетъ для всѣхъ конечныхъ значеній x. Сверхъ того, такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty} a_{2n}=o$, то

$$\lim_{n=\infty} Q_{2n}=\lim_{n=\infty} Q_{2n-1}$$

Итакъ $\lim\limits_{n=\infty} Q_n$ существуетъ для всѣхъ конечныхъ значеній x.

Далѣе имѣемъ

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_0}{Q_0}+\left(\frac{P_1}{Q_1}-\frac{P_0}{Q_0}\right)+\ldots+\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$$

Отношеніе послѣдующаго къ предыдущему въ этомъ ряду, какъ легко видѣть, равно

$$1-\frac{Q_n}{Q_{n+1}}$$

Въ нашемъ случаѣ это отношеніе стремится, на основаніи доказаннаго, къ предѣлу o при $n=\infty$. Отсюда слѣдуетъ, что безконечный рядъ раціональныхъ функцій, въ который обращается правая часть послѣдняго равенства при $n=\infty$, сходится и слѣд. $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n}$ существуетъ при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x.

Доказательство существованія нѣкоторыхъ предѣловъ.

И. Слешинскаго.

Лемма 1.*) Если рядъ

$$\sum_{k=o}^{\infty} \frac{a_{k+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_k},$$

гдѣ a—положительныя числа, и p—цѣлое положительное число, сходится, то сходится также рядъ

$$\sum_{k=o}^{\infty} a_k$$

Доказательство. Такъ какъ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots.$$

для всѣхъ конечныхъ значеній x, то при $x>o$, имѣемъ

$$e^x>1+x.$$

Поэтому

$$e^{\frac{a_{n+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_n}}>1+\frac{a_{n+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_n}$$

---

*) Ср. Abel. Note sur un mémoire de M. L. Olivier etc. Oeuvres. 1881. T. I. стр. 399.

и подавно

$$e^{\frac{a_{n+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_n}}>1+\frac{a_{n+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_{n+p-1}}$$

т. е.

$$e^{\frac{a_{n+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_n}}>\frac{a_0+a_1+\ldots+a_{n+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_{n+p-1}}$$

Придавая въ этомъ неравенствѣ числу n послѣдовательно значенія $0, 1, 2, \ldots k$ и перемножая полученныя неравенства, находимъ

$$e^{\frac{a_p}{a_0}+\frac{a_{p+1}}{a_0+a_1}+\ldots+\frac{a_{p+k}}{a_0+a_1+\ldots+a_k}}>\frac{a_0+a_1+\ldots+a_{k+p}}{a_0+a_1+\ldots+a_{p-1}}$$

Отсюда

$$a_0+a_1+\ldots+a_{k+p}<(a_0+a_1+\ldots+a_{p-1})\, e^{\frac{a_p}{a_0}+\frac{a_{p+1}}{a_0+a_1}+\ldots+\frac{a_{p+k}}{a_0+a_1+\ldots+a_k}}$$

Предположимъ теперь, что k возрастаетъ до ∞. Тогда показатель степени e будетъ, по предположенію, стремиться къ конечному предѣлу. Поэтому сумма $a_0+a_1+\ldots+a_{k+p}$ будетъ оставаться меньше конечнаго числа и, такъ какъ она съ увеличеніемъ k возрастаетъ, то ясно, что рядъ $a_0+a_1+\ldots$ сходится.

Лемма 2. Если рядъ

$$\sum_{k=o}^{\infty} a_k$$

гдѣ a — положительныя числа, расходится, то расходится также рядъ

$$a_0+\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+1}-a_k z_k)\ ,$$

гдѣ z положительныя числа, не превосходящія нѣкоторой правильной дроби ε.

Доказательство. Имѣемъ

$$a_0+(a_1-a_0z_0)+(a_2-a_1z_1)+\ldots\ldots+(a_n-a_{n-1}z_{n-1})=$$
$$(1-z_0)a_0+(1-z_1)a_1+\ldots\ldots+(1-z_{n-1})a_{n-1}+a_n\geqq$$
$$(1-\varepsilon)(a_0+a_1+\ldots\ldots+a_n)$$

Отсюда непосредственно явствуетъ справедливость предложенія. Кромѣ того видно, что, хотя нѣкоторые члены втораго ряда могутъ быть отрицательными, сумма всякаго числа членовъ остается положительной и стремится къ $+\infty$.

Лемма 3. При всякомъ цѣломъ положительномъ p изъ сходимости ряда

$$\frac{a_p}{a_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+p}-a_{k+p-1}z_{k+p-1}}{a_0+a_1+\ldots\ldots+a_k}\ ,$$

гдѣ a и z имѣютъ тоже значеніе, что и въ леммѣ 2-й вытекаетъ сходимость ряда $a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots$

Доказательство. Дано, что рядъ

$$\frac{a_p}{a_0}+\frac{a_{p+1}-a_pz_p}{a_0+a_1}+\frac{a_{p+2}-a_{p+1}z_{p+1}}{a_0+a_1+a_2}+\ldots\ldots \qquad (1)$$

сходится. Сравнимъ его съ рядомъ

$$\frac{a_p}{a_0}+\left(\frac{a_{p+1}}{a_0+a_1}-\frac{a_p}{a_0}z_p\right)+\left(\frac{a_{p+2}}{a_0+a_1+a_2}-\frac{a_{p+1}}{a_0+a_1}z_{p+1}\right)+\dots \quad (2)$$

Разность между k членомъ ряда (1) и k членомъ ряда (2) равна

$$\frac{a_{p+k-2}z_{p+k-2}}{a_0+a_1+\dots+a_{k-2}}-\frac{a_{p+k-2}z_{p+k-2}}{a_0+a_1+\dots+a_{k-1}}$$

т. е. равна положительной величинѣ. Поэтому, обозначая сумму n членовъ ряда (1) чрезъ S'_n, а сумму n членовъ ряда (2) чрезъ S''_n, найдемъ

$$S'_n=\Delta_n+S''_n, \quad (3)$$

гдѣ Δ_n—положительная величина, возрастающая вмѣстѣ съ n. Теперь легко видѣть, что рядъ $a_0+a_1+\dots$ не можетъ расходиться. Въ самомъ дѣлѣ: если-бы этотъ рядъ расходился, то, по леммѣ 1-й, расходился-бы также рядъ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+p}}{a_0+a_1+\dots+a_k}$$

Далѣе по леммѣ 2-й расходился-бы рядъ (2) и притомъ такъ, что сумма n членовъ его т. е. S''_n стремилась-бы къ $+\infty$. Поэтому на основаніи (3) количество S'_n также возрастало-бы безпредѣльно т. е. расходился-бы рядъ (1), что противорѣчитъ условію.

Лемма 4. Если рядъ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{p+k}-a_{p+k-1}\zeta_{p+k-1}}{a_0+a_1+\dots+a_k},$$

гдѣ α — какія-либо числа и $|\zeta_n|$ не превосходитъ нѣкоторой правильной дроби, сходится абсолютно*), то рядъ $\alpha_0+\alpha_1+\ldots$ также сходится абсолютно.

Доказательство Дано, что рядъ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\alpha_{p+k}-\alpha_{p+k-1}\zeta_{p+k-1}}{\alpha_0+\alpha_1+\ldots\ldots+\alpha_k}\right|$$

сходится. Введемъ обозначенія

$$|\alpha_n|=a_n \quad , \quad |\zeta_n|=z_n$$

Тогда имѣемъ

$$\left|\frac{\alpha_{p+k}-\alpha_{p+k-1}\zeta_{p+k-1}}{\alpha_0+\alpha_1+\ldots\ldots+\alpha_k}\right| \geqq \frac{|a_{p+k}-a_{p+k-1}z_{p+k-1}|}{a_0+a_1+\ldots\ldots+a_k}.$$

Поэтому рядъ

$$\frac{a_p}{a_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_{p+k}-a_{p+k-1}z_{p+k-1}|}{a_0+a_1+\ldots\ldots+a_k}$$

также сходится. Слѣдовательно и подавно сходится рядъ

$$\frac{a_p}{a_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{p+k}-a_{p+k-1}z_{p+k-1}}{a_0+a_1+\ldots\ldots+a_k}$$

Отсюда при помощи леммы 3 видно, что сходится также рядъ $a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots$ т. е. рядъ $|\alpha_0|+|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots$

Теорема 1. Если въ непрерывной дроби

$$D\left(1+\frac{c_n x}{1+c_{n+1}x}\right)$$

*) т. е. не перестаетъ сходиться при замѣнѣ членовъ ихъ абсолютными величинами.

количества c_n таковы, что рядъ $|c_1|+|c_2|+\dots$ сходится, то числители и знаменатели подходящихъ дробей имѣютъ предѣлы для всякаго конечнаго значенія x.

Доказательство. Числители и знаменатели подходящихъ дробей удовлетворяютъ уравненію

$$R_n=R_{n-1}+c_n x R_{n-2}$$

Отсюда

$$\frac{R_n-R_{n-1}}{R_{n-2}}=c_n x \tag{1}$$

Но

$$R_n=R_0+(R_1-R_0)+(R_2-R_1)+\dots+(R_n-R_{n-1})$$

Положимъ

$$R_0=\alpha_0;\ R_k-R_{k-1}=\alpha_k \text{ при } k>o$$

и по ряду $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\dots$ построимъ рядъ

$$\sum_{k=o}^{\infty}\frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_k}$$

Получимъ рядъ

$$\frac{R_2-R_1}{R_0}+\frac{R_3-R_2}{R_1}+\dots$$

т. е., въ силу (1), рядъ

$$x\sum_{k=2}^{\infty}c_k$$

Отсюда слѣдуетъ, что между рядомъ, коего первые n членовъ выражаютъ R_n, и рядомъ $c_2+c_3+\dots$ существуетъ зависимость, доказанная въ леммѣ 4 (при $p=2$ и $\zeta_n=o$) т. е. если рядъ $|c_2|+|c_3|+\dots$ сходится, то сходится и рядъ $|R_0|+|R_1-R_0|+|R_2-R_1|+\dots$, и слѣдовательно сходится также рядъ $R_0+(R_1-R_0)+(R_2-R_1)+\dots$ т. е. существуетъ $\lim\limits_{k=\infty} R_k$

Примѣчаніе*). Если непрерывная дробь такова, что

$$c_n + c_{n-1} = 0$$

т. е.

$$c_2 + c_1 = 0 \ , \ c_4 + c_3 = 0 \ldots .$$

или

$$c_1 + c_0 = 0 \ , \ c_3 + c_2 = 0, \ldots .$$

то изъ зависимости между R_n, R_{n-2} и R_{n-4}

$$R_n = [1 + (c_n + c_{n-1})x]R_{n-2} - c_{n-1}c_{n-2}x^2R_{n-4}$$

слѣдуетъ

$$R_n = R_{n-2} - c_{n-1}c_{n-2}x^2R_{n-4}$$

при $n=2, 4, 6, \ldots$ или при $n=1, 3, 5, \ldots$ Для этихъ значеній n

$$\frac{R_n - R_{n-2}}{R_{n-4}} = -c_{n-1}c_{n-2}x^2$$

и слѣдовательно, помощью вышеприведенныхъ разсужденій можно убѣдиться, что сходимость ряда

$$\sum |c_{n-1}c_{n-2}|$$

гдѣ $n=2, 4, 6, \ldots$ или $n=1, 3, 5, \ldots$ достаточна для существованія предѣла R_n при n четномъ или при n нечетномъ. Такъ какъ при всякомъ n

$$R_{n-1} = R_n - c_n x R_{n-2} \ ,$$

то R съ четнымъ или нечетнымъ указателемъ выражается помощью двухъ R съ нечетными или четными соотвѣтственно указателями. Поэтому сходимость вышеназваннаго ряда достаточна

*) Ср. прибавленіе въ статьѣ моей «о сходимости непр. дробей» въ VIII томѣ записокъ Мат. Отд. Новор. Общ. Естеств.

для существованія предѣла R_n при всякомъ цѣломъ n, возрастающемъ безпредѣльно.

Теорема 2. Если въ непрерывной дроби

$$D\left(1+\frac{c_n x}{1+c_{n+1}x}\right)$$

количества c_n таковы, что существуетъ $lim\ c_n=c\gtrless o$ при $n=\infty$ и рядъ $|d_1|+|d_2|+\ldots.$, гдѣ $d_n=1-\frac{c_n}{c}$, сходится, то $n^{\text{-ая}}$ подходящая дробь имѣетъ предѣлъ при $n=\infty$ для всѣхъ значеній x внѣ продолженія прямой линіи, соединяющей o съ $\frac{-l}{4c}$.

Доказательство. Въ членѣ 11 моей статьи «о сходимости дробей»*) показано, что съ помощью преобразованія

$$z=\frac{1-\sqrt{1+4cx}}{1+\sqrt{1+4cx}}$$

доказательство этой теоремы приводится къ доказательству существованія при $|z|<1$ предѣла функціи r_n, опредѣляемой уравненіемъ

$$r_n=(1+z)r_{n-1}-(1-d_n)zr_{n-2}$$

Это уравненіе можно написать такъ

$$\frac{r_n-r_{n-1}-(r_{n-1}-r_{n-2})z}{r_{n-2}}=zd_n$$

Если теперь по ряду $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\ldots.$, гдѣ $\alpha_0=r_0$, $\alpha_1=r_1-r_0$, $\alpha_2=r_2-r_1,\ldots.$, образуемъ рядъ:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}z}{\alpha_0+\alpha_1+\ldots.+\alpha_k},$$

*) l. c.

то получимъ

$$z\sum_{k=2}^{\infty} d_k$$

Такъ какъ рядъ $\sum_{k=2}^{\infty}|d_k|$, по условію, сходится, то, на основаніи леммы 4-й (при $p=2$ и $\zeta_n=z$ причемъ $|z|<1$), рядъ

$$|r_0|+|r_1-r_0|+|r_2-r_1|+\ldots.$$

также будетъ сходиться. Поэтому будетъ сходиться и рядъ

$$r_0+(r_1-r_0)+(r_2-r_1)+\ldots.$$

т. е. будетъ существовать $\lim_{n=\infty} r_n$ при $|z|<1$.

14-го Августа 1888 года.

ЗАДАЧА

для молодыхъ ученыхъ.

Проф. *В. Ермакова.*

Часто студенты обращаются къ профессору съ просьбою дать имъ вопросъ, надъ рѣшеніемъ котораго они могли бы испробовать свои силы. Но иногда въ данную минуту не находится темъ, которыя были бы по силамъ молодымъ людямъ. Съ другой стороны, каждый ученый при своихъ занятіяхъ встрѣчаетъ иногда побочные вопросы, которые имъ рѣшаются; но эти рѣшенія нигдѣ не помѣщаются, потому что сами вопросы не имѣютъ важнаго значенія. Иногда подобные вопросы остаются безъ рѣшенія или по своей трудности, или, чаще, по недосугу. Мнѣ кажется, что помѣщеніе подобныхъ задачъ въ нашихъ математическихъ журналахъ можетъ принести весьма большую пользу молодымъ ученымъ. Вотъ почему я осмѣливаюсь, въ видѣ опыта, предложить подобную задачу, которая состоитъ въ слѣдующемъ.

Даны три функціи P, Q и R трехъ перемѣнныхъ x, y и z. Требуется найти такую поверхность, чтобы интегралъ

$$\int (Pdx + Qdy + Rdz)$$

взятый между двумя данными точками по какой нибудь линіи, расположенной на искомой поверхности, не зависѣлъ отъ того пути, по которому берется интегралъ.

Задача приводится къ линейному дифференціальному уравненію съ частными производными перваго порядка, т. е. къ

нахожденію двухъ функцій U и V, послѣ чего произвольная зависимость между этими функціями дастъ общее рѣшеніе задачи.

Задача обладаетъ однимъ замѣчательнымъ свойствомъ: если дана функція U, то нахожденіе другой функціи V приводится къ квадратурамъ *).

Задача становится вполнѣ опредѣленною, если дана кривая линія, чрезъ которую должна проходить искомая поверхность.

Одинъ или два удачно подобранныхъ примѣра были бы весьма умѣстны.



***) Въ доказательствѣ этого свойства заключается вся сущность задачи.**

Протоколы засѣданій Математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей съ 20 февраля 1887 г. по 9 декабря 1888 г.

Засѣданіе 20 февраля 1887 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ проф. Умова, члены: Н. А. Умовъ, Ѳ. Н. Шведовъ, Ф. М. Каменскій, Р. А. Прендель, гр. Н. Я. Ростовцовъ, Н. А. Каминскій, А. Г. Геричъ, Ѳ. Н. Мелятицкій, П. С. Шестериковъ, В. Н. Габбе.

1. Членъ общества Х. Л. Гохманъ сдѣлалъ сообщеніе «о механическомъ международномъ вѣчномъ календарѣ и его значеніи въ практической жизни и въ исторической наукѣ».

2. Г. Г. Де-Метцъ (гость) сдѣлалъ сообщеніе о временномъ двойномъ преломленіи свѣта во вращающихся слояхъ жидкости; экспериментальное изслѣдованіе».

Засѣданіе 16 октября 1887 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Ѳ. Н. Шведовъ, А. В. Клоссовскій, И. В. Слешинскій, Н. С. Починскій, В. Н. Габбе.

1. Членъ Общества И. В. Слешинскій сдѣлалъ сообщеніе «о сходимости непрерывныхъ дробей».

2. С. Зейлигеръ (гость) сдѣлалъ два сообщенія: а) о центрахъ кривизны изогоналей и б) циркуль подобнаго треугольника.

Засѣданіе 13 апрѣля 1888 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Н. А. Умовъ, А. В. Клоссовскій, Г. Г. Де-Метцъ, А. Г. Геричъ, В. Н. Габбе, Х. Л. Гохманъ.

1. А. Г. Геричъ сдѣлалъ сообщеніе «объ общемъ законѣ сжатія соляныхъ растворовъ».

2. Г. Г. Де-Метцъ сдѣлалъ сообщеніе о послѣдней работѣ Кундта «Ueber die Brechungsexponenten der Metalle».

Засѣданіе 28 октября 1888 г.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ В. Н. Лигина, члены: Ѳ. Н. Шведовъ. А. В. Клоссовскій, И. В. Слешинскій. Г. Г. Де-Метцъ, И. М. Занчевскій, И. Ю. Тимченко, Х Л Гохманъ, Ѳ. Н. Мелятицкій, В. Н. Габбе.

1. Доложено слѣдующее предложеніе членовъ А. В. Клоссовскаго, И. В. Слешинскаго и И. М Занчевскаго о назначеніи постоянныхъ засѣданій Отдѣленія по вопросамъ элементарной математики и физики:

«Не подлежитъ сомнѣнію, что между наукой и элементарнымъ преподаваніемъ существуетъ тѣсная связь. Поэтому обсужденіе вопросовъ элементарнаго преподаванія вполнѣ умѣстно въ засѣданіяхъ нашего Общества.

Всякій, кто занимался, или занимается преподаваніемъ началъ математики, знаетъ, сколько вопросовъ возникаетъ въ этой области, начиная съ основныхъ понятій о величинѣ и числѣ и кончая общей системой и цѣлью преподаванія каждой вѣтви. Достаточно указать на вопросы о раціональной системѣ ариѳметики, основанной на свойствахъ дѣйствій, о правильной постановкѣ ученія объ отрицательныхъ, ирраціональныхъ и мнимыхъ числахъ, объ аксіомахъ геометріи, о значеніи геометрическихъ построеній. Относительно этихъ вопросовъ существуетъ огромное разнообразіе мнѣній, взглядовъ и точекъ зрѣнія. Каждый авторъ учебника и каждый преподаватель рѣшаетъ ихъ иначе, между тѣмъ какъ несомнѣнно желательно выработать

твердые основы въ этой области. Это возможно сдѣлать путемъ обсужденія и обмѣна мыслей между преподавателями.

Не менѣе настоятельна необходимость общенія и обмѣна мыслей между преподавателями физики и космографіи. Здѣсь существуетъ, какъ извѣстно, цѣлый рядъ вопросовъ, элементарное изложеніе которыхъ представляетъ значительныя трудности; только путемъ обстоятельнаго коллективнаго обсужденія возможно выработать наиболѣе цѣлесообразные пріемы для изложенія подобныхъ вопросовъ. Съ другой стороны, каждый изъ преподавателей вырабатываетъ постоянно рядъ чисто техническихъ пріемовъ, правилъ, способовъ экспериментированія. Въ высшей степени важно, чтобы болѣе опытные преподаватели могли дѣлиться своими практическими свѣдѣніями съ молодыми, только что начинающими своими товарищами, чтобы тѣ или другіе пріемы подвергались критикѣ и провѣркѣ. Далѣе, различныя учебныя заведенія, время отъ времени, получаютъ новые или усовершенствованные приборы; въ засѣданіяхъ по элементарной математикѣ и физикѣ умѣстна демонстрація этихъ приборовъ и общее ихъ изученіе. Въ засѣданіяхъ, наконецъ, можно выработать типы физическихъ кабинетовъ, наиболѣе подходящихъ къ требованіямъ среднихъ учебныхъ заведеній.

Вотъ почему въ Математическомъ Отдѣленіи Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей не разъ высказывалось желаніе включить вопросы элементарнаго преподаванія въ число предметовъ занятій Общества. Будучи твердо убѣждены въ полезности этого дѣла, мы вносимъ настоящее предложеніе о назначеніи отдѣльныхъ собраній по вопросамъ элементарной математики и физики для выслушиванія сообщеній, демонстраціи приборовъ и обмѣна мыслей по вопросамъ, возникающимъ при этомъ или заранѣе предложеннымъ. Въ виду глубокаго интереса, который способно возбудить обсужденіе вопросовъ, столь близкихъ каждому преподавателю, желательно, чтобы эти собранія происходили періодически, по крайней мѣрѣ одинъ разъ въ мѣсяцъ.

Опредѣлено: 1) признать осуществленіе заслушаннаго предложенія вполнѣ желательнымъ, 2) просить И. В. Слешинскаго принять на себя предсѣдательство въ постоянныхъ засѣданіяхъ по вопросамъ элементарной математики и 3) пригласить препо-

давателей мѣстныхъ среднихъ учебныхъ заведеній принимать участіе въ этихъ засѣданіяхъ.

2. Д. Н. Зейлигеръ сдѣлалъ сообщенія: 1) «о кривизнѣ поверхностей» и 2) «о сложеніи силъ».

Протоколы засѣданій по вопросамъ элементарной математики и физики.

Засѣданіе 25 ноября 1888 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ И. В. Слешинскаго, члены: П. Н. Бучинскій, В. Н. Габбе, И. М. Занчевскій, Ф. М. Каменскій, А. В. Клоссовскій, А. К. Кононовичъ, В. Н. Лигинъ, К. В. Май, Ѳ. Н. Милятицкій, Л. О. Немировскій, М. С. Панченко, Н. А. Покровскій, Г. З. Рябковъ, Г С. Смирновъ И. Ю. Тимченко, П. М. Усаневичъ, Ѳ. Н. Шведовъ, С. П Ярошенко и преподаватели математики и физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

1. Предсѣдатель сказалъ нѣсколько словъ въ разъясненіе и дополненіе предложенія, давшаго начало собраніямъ по вопросамъ элементарной математики и физики.

2. Предсѣдатель сообщилъ о предложеніи редактора-издателя журнала «Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики», г. Шпачинскаго, высылать Отдѣленію свои изданія и помѣщать въ журналѣ рефераты о засѣданіяхъ. *Постановлено*: выразить благодарность г Шпачинскому.

3. И. М. Занчевскій сдѣлалъ сообщеніе «объ отрицательныхъ числахъ». Окончаніе этого сообщенія и обсужденіе его отложено до слѣдующаго засѣданія

4. А. В. Клоссовскій демонстрировалъ гигрометры Аллюара и Крова.

Засѣданіе 9 декабря 1888 года.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ И. В. Слешинскаго, члены: В. Н. Габбе, Х. Л. Гохманъ, И. М. Занчевскій, А. В. Клоссовскій, А. К. Кононовичъ, В. Н. Лигинъ, К. В. Май, Ѳ. Н. Милятицкій, А. О. Немировскій, П. С. Панченко, Н. А. Покровскій, Г. З. Рябковъ, Г. А. Смирновъ, И. Ю. Тимченко, Ѳ. Н. Шведовъ, С. П. Ярошенко и преподаватели математики и физики въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ.

1. И. М. Занчевскій окончилъ сообщеніе «объ отрицательныхъ числахъ». Въ обсужденіе этого сообщенія, давшаго поводъ къ оживленному обмѣну мыслей, приняли участіе многіе изъ присутствовавшихъ.

2. Г. Г. Де-Метцъ демонстрировалъ приборъ Quincke для опредѣленія длины звуковой волны.

3. Въ виду имѣющагося въ готовности матеріала для сообщеній, постановлено собираться по пятницамъ, чрезъ каждыя двѣ недѣли.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ IX.



ОДЕССА.
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1889.

Изданія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей въ Одессѣ:

Томъ I и II. Распроданы.

Томъ III. Вып. 1-й и 2-й. (См. XII т. «Записокъ» и раньше).

Томъ IV. Вып. 1-й и 2-й (См. XIII т. «Записокъ» и раньше).

Томъ V. Вып. 1-й.

Вып. 2-й. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кислоты. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произведенной лѣтомъ 1877 г. въ Подольск. губ. *Л. Ришави.* Отчетъ объ экскурсіи въ Севастопольской бухтѣ въ 1878 г. *Р. Прендель.* Отчетъ о результатахъ экскурсіи, произвед. лѣтомъ 1878 г. по прибрежной полосѣ Абхазіи и Черноморскаго округа. 1879 г. Цѣна 75 коп.

Томъ VI. Вып. 1-й. *И. Синцовъ.* О мѣловыхъ губкахъ Сарат. губ. (съ 6 табл.). *О. Мечникова.* О тазовой и плечевой дугѣ хрящевыхъ рыбъ. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кисл. *В. Шманкевичъ.* Объ отношеніи нѣкоторыхъ безцвѣтныхъ Flagellata къ водорослямъ и грибамъ (съ табл. рис.) 1879 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й, *П. Забаринскій.* Дополненіе къ монографіи N. Kleinenberg'а «Hydra» (съ 2 табл.). *Ил. Мечниковъ.* Матеріалы къ ученію о вредныхъ насѣкомыхъ юга Россіи (личинка Anisoplia). *В. Репяховъ.* Къ морфологіи мшанокъ (съ 6 табл.). *С. Танатаръ.* О строеніи фумаровой и малеиновой кисл. 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Приложен. къ VI т. Записокъ: *Flora chersonensis E. Lindemann*'а. 2 т. Цѣна 1 и 2 т. 4 р.

Томъ VII. Вып. 1-й. *Л. Ришави.* Альгологическія изслѣдованія (съ табл.). *П. Спиро.* Матеріалы для изученія образованія желчи. *П. Меликовъ.* О производныхъ акрилевой кислоты. *И. Синцовъ.* Описаніе нѣкоторыхъ видовъ мезозойскихъ окаменѣлостей изъ Симбирской и Саратовской губерн. (съ 2 табл.). *Его-же.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи (съ табл.). 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *Л. Ришави.* Матеріалы для лихенологической флоры Крыма. *П. Бучинскій.* Къ вопросу о развитіи дождеваго червяка (съ 3 таблицами). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо-восточной части Херсонск. губ. (съ табл.) 1881 г. Цѣна 1 р.

Томъ VIII. Вып 1-й. *Д. Кожевниковъ.* Объ анатомическомъ строеніи лепестковыхъ цвѣточныхъ покрововъ (съ 6 табл.). *Р. Прендель.* Изслѣдованіе кристаллическихъ породъ, развитыхъ въ бассейнѣ р. Базавлука и въ верховьяхъ Саксагани (съ картой и 4 табл.). *А. Ковалевскій.* Къ исторіи развитія хитоновъ. *С. Танатаръ.* О хлорсубститутахъ фумаровой и малеиновой кисл. *И. Деппъ.* Замѣтки любителя о жизни Макроподъ. *А. Геричъ.* Объ электрическихъ явленіяхъ, наблюдаемыхъ при диффузіи нѣкоторыхъ жидкостей. *И. Красильщикъ.* Къ исторіи развитія и систематикѣ р. Polytoma Ehr. (съ 3 табл.). *В. Репяховъ.* О личинкѣ Polygordius flavocapitatus (съ табл.). 1882 г. Цѣна 3 руб.

Вып. 2-й. *Ф. Каменскій.* Матеріалы для морфологіи и біологіи Monotropa Hypopitis L. и нѣкоторыхъ другихъ сапрофитовъ (съ 3-мя таблиц.). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо-восточной части Херсонской губ. *Н. Головкинскій.* Результаты геологическихъ изысканій и развѣдокъ на ископаемый уголь въ окрестностяхъ Балаклавы (съ 5 рис. въ текстѣ, картой и 2 табл.). *П. Спиро.* О нѣкоторыхъ явленіяхъ такъ назыв. животнаго магнитизма (гипнотизма) съ 3 табл. 1883 г. Цѣна 2 руб.

Томъ IX. Вып. 1-й. *И. Синцовъ.* Описананій новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. Ст. 5-я (съ табл.). *И. Миклашевскій.* Матеріалы для геологіи Глуховскаго уѣзда. Черниговск. губ. (съ табл.). *Н. Андрусовъ.* Замѣтка о геологическихъ изслѣдованіяхъ въ окрестностяхъ г. Керчи. *А. Клоссовскій.* Инструкція для наблюденія осадковъ, грозъ и града. *С. Переяславцева.* О развитіи коловратокъ (съ табл.). 1884 г. Цѣна 1 р.

Вып. 2-й. *Н. Андрусовъ.* Геологическія изслѣдованія на Керченскомъ полуостровѣ, произведенныя въ 1882 и 1883 г. *Л. Рейнгардъ.* Альгологическія изслѣдованія. Матеріалы для морфологіи и систематики водорослей Чернаго моря съ 5 политипажами и атласомъ изъ 11 табл. рисунковъ. 1885 г. Цѣна 3 р.

ТЕОРІЯ ВИНТОВЪ

И

ПРИЛОЖЕНІЯ ЕЯ КЪ МЕХАНИКѢ.

Н. Занчевскаго.

ОДЕССА,
Типографія А. Шульце, Ланжероновская улица, домъ № 36.
1889.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВВЕДЕНІЕ.

Существенными моментами въ исторіи винтовъ слѣдуетъ, какъ намъ кажется, считать появленіе тѣхъ двухъ работъ Poinsot [1]), гдѣ впервые получила свое развитіе теорія паръ силъ и безконечно-малыхъ вращеній. Въ самомъ дѣлѣ, теорія паръ дала сложеніе силъ и вращеній въ самыхъ общихъ случаяхъ и, что крайне важно, въ ней сразу была поставлена на видъ аналогія между двумя съ перваго взгляда совершенно различными процессами: сложеніемъ силъ и сложеніемъ вращеній. Въ мемуарѣ 1804 года система силъ уже приведена къ каноническому виду, т. е. къ силѣ и парѣ, лежащей въ плоскости перпендикулярной къ силѣ. Если обозначимъ черезъ p отношеніе момента пары къ силѣ, то центральная ось силъ съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ равнымъ p и есть то, что называютъ винтомъ системы силъ. Тотъ-же процессъ сложенія приводитъ впослѣдствіе Poinsot къ теоремѣ, что всякая система безконечно-малыхъ вращеній, а слѣдовательно и всякое безконечно-малое перемѣщеніе эквивалентно вращенію вокругъ нѣкоторой оси сложенному съ

---

[1]) Poinsot, L. Sur la composition des moments et la composition des aires. Этотъ мемуаръ читанъ въ Парижской Академіи наукъ въ 1804 г. Онъ напечатанъ въ VI томѣ Journal de l'École Polytechnique 1806 г., а также въ видѣ приложенія къ Éléments de statique. Вторая изъ сказанныхъ въ текстѣ работъ Poinsot есть Théorie nouvelle de la rotation des corps. Liouville, Journ. an. 1851, появившаяся въ первомъ изданіи въ 1834 году.

поступательнымъ движеніемъ параллельнымъ оси вращенія, т. е. винтовому движенію. Обозначивъ черезъ p отношеніе поступательной слагающей винтоваго движенія къ вращательной и нанеся его въ видѣ отрѣзка на ось вращенія, мы получимъ то, что называютъ винтомъ въ кинематикѣ.

Правда, Chasles еще раньше [1]) доказалъ эквивалентность всякаго перемѣщенія нѣкоторому винтовому движенію, но его методъ доказательства ничего общаго съ методомъ сложенія не имѣетъ. Chasles разсматривалъ два подобныхъ тѣла, какъ-нибудь расположенныхъ въ пространствѣ и, переходя затѣмъ къ частному случаю двухъ равныхъ тѣлъ, получилъ указанную выше теорему кинематики. Вслѣдъ за Poinsot, Chasles [2]) и Möbius [3]) указываютъ на аналогіи между сложеніемъ силъ и вращеній, причемъ послѣдній въ обширномъ мемуарѣ [4]) развиваетъ ихъ съ достаточною подробностью. Такъ, здѣсь разобранъ случай сложенія вращеній вокругъ осей пересѣкающихся, и доказана теорема объ эквивалентности какого угодно числа безконечно-малыхъ вращеній двумъ вращеніямъ вокругъ осей не пересѣкающихся и непараллельныхъ. Въ Lehrbuch der Statik статика сдѣлала большой шагъ впередъ, оказавшій большое вліяніе и на развитіе кинематики. Наиболѣе важнымъ въ этомъ сочиненіи слѣдуетъ считать открытіе особаго рода взаимнаго соотвѣтствія или двойственности устанавливаемой каждой системой силъ между пространственными элементами, такъ называемаго инволюціоннаго положенія двухъ пространственныхъ системъ, по которому каждой точкѣ одной системы соотвѣтствуетъ плоскость, черезъ нее про-

---

[1]) Chasles, M. Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux, et placés d'une manière quelconque dans l'espace. Bullet. des sciences mathémat. p. Férussac, Novemb. 1830.

[2]) Chasles, M. Aperçu historique. Bruxelles. 1837, Note XXXIV.

[3]) Möbius, F. Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837, I. Th. p. 347.

[4]) Möbius, F. Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Crelle, Bd. XVIII, 1838.

ходящая, каждой плоскости—на ней лежащая точка, прямой —прямая Въ этой фокальной системѣ, или, какъ ее назвалъ Möbius, нуль-системѣ существуетъ безчисленное множество прямыхъ, сами себѣ сотвѣтствующихъ; это лучи линейнаго комплекса перваго порядка, опредѣленнаго тою-же системой силъ. Черезъ каждую точку пространства ихъ проходитъ пучекъ перваго порядка, лежащій въ фокальной плоскости точки, и въ каждой плоскости лежитъ такой-же пучекъ, имѣющій своимъ центромъ фокусъ плоскости. Ихъ статическое значеніе таково, что моментъ системы силъ относительно каждой изъ нихъ равенъ нулю. Прямыя, другъ другу соотвѣтствующія въ фокальной системѣ, суть направленія тѣхъ двухъ силъ, которыя вмѣстѣ эквивалентны данной системѣ.

Значеніе для кинематики результатовъ, полученныхъ Möbius'омъ, было указано Chasles'омъ [1]), и основной его теоремой въ этомъ отношеніи слѣдуетъ считать ту, по которой при всякомъ безконечно-маломъ перемѣщеніи нормали къ траэкторіямъ различныхъ точекъ распредѣляются по лучамъ комплекса перваго порядка. Нормали къ траэкторіямъ, пересѣкающія какую-либо прямую. пересѣкаютъ еще и другую, соотвѣтствующую первой въ фокальной системѣ. Chasles называетъ такія двѣ прямыя сопряженными и показываетъ ихъ многія геометрическія и кинематическія свойства.

Кромѣ нуль-системы и свойствъ полюсовъ и поляръ статика Möbius'а заключаетъ еще и другія очень цѣнныя вещи, касающіяся равновѣсія силъ. Такъ, тамъ даются условія, какимъ должны удовлетворять 4, 5, 6 прямыхъ пространства для того, чтобы можно было подыскать такія силы, которыя, дѣйствуя по этимъ прямымъ, уравновѣшивались-бы, и доказывается, что при большемъ числѣ прямыхъ такія си-

[1]) Chasles, M. Aperçu historique. Mémoire de Géométrie, § XXIV.

Его-же: Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide. Comptes rendus, T. XVI, an. 1843.

лы въ общемъ случаѣ всегда найдутся. Отсюда вытекаетъ, что каждую силу можно представить себѣ разложенной по шести прямымъ, напр. по ребрамъ тетраэдра, теорема, которой въ кинематикѣ соотвѣтствуетъ такая: всякое безконечно-малое вращеніе можетъ быть разложено на вращенія вокругъ шести осей, или въ нѣсколько иной формѣ: тѣло, могущее вращаться вокругъ шести осей, въ общемъ случаѣ можетъ вращаться вокругъ всякой седьмой, т. е. вполнѣ свободно. Möbius доказалъ, что шесть прямыхъ, вдоль которыхъ могутъ уравновѣшиваться шесть силъ, должны быть лучами одного и того-же линейнаго комплекса 1-го порядка. Sylvester [1]) характеризуетъ взаимное положеніе такихъ шести прямыхъ словомъ инволюція, показываетъ, какъ построить по пяти даннымъ прямымъ шестую, которая была-бы съ ними въ инволюціи, и даетъ уравненіе, которому должны удовлетворять параметры шести такихъ прямыхъ.

Всѣ вышеизложенныя изслѣдованія были произведены путемъ чисто-геометрическимъ, съ одной стороны благодаря характеру и происхожденію самихъ задачъ, съ другой стороны благодаря тому, что анализъ тогда еще не выработалъ удобныхъ пріемовъ для изслѣдованія распредѣленія въ пространствѣ прямыхъ, параметры которыхъ удовлетворяли-бы тѣмъ или другимъ условіямъ. Хотя Cayley въ одномъ мемуарѣ [2]), напечатанномъ въ 1860 году, и вводитъ координаты прямой для представленія уравненія конуса, но онъ не даетъ имъ надлежащихъ приложеній, а потому истиннымъ основателемъ геометріи прямой справедливо считаютъ Plücker'а. [3])

---

[1]) Sylvester, J. Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérés comme des axes de rotation. Comptes rendus, T. LII, p 741.

Его-же: Note sur l'involution des six lignes dans l'espace. Ibid. p. 815.

[2]) Cayley, A. On a new analytical representation of curves in space. The Quarterly Journ. Vol. III, 1860.

[3]) Plücker, J. On a new geometry of space. Phil. Trans. Vol. 155, 1865.

Его-же: Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, 1868.

За координаты прямой Plücker беретъ проэкціи (x_0 y_0 z_0) и моменты (l_0 m_0 n_0) какого-либо отрѣзка, лежащаго на этой прямой, или лучше сказать — ихъ отношенія. Такъ какъ между этими 6-ю величинами существуетъ соотношеніе

$$l_0 x_0 + m_0 y_0 + n_0 z_0 = 0,$$

то независимыхъ перемѣнныхъ въ результатѣ четыре, т. е. столько, сколько независимыхъ параметровъ въ уравненіяхъ прямой. Прямыя, координаты которыхъ удовлетворяютъ однородному линейному уравненію:

$$\Omega \equiv Lx_0 + My_0 + Nz_0 + Xl_0 + Ym_0 + Zn_0 = 0, \qquad (1)$$

образуютъ линейный комплексъ 1-го порядка. Каждому линейному комплексу 1-го порядка соотвѣтствуетъ одна прямая, ось комплекса, обладающая тѣмъ свойствомъ, что если принять ее за общую ось прямыхъ круглыхъ цилиндровъ перемѣнныхъ радіусовъ, и нанести на эти цилиндры обыкновенныя винтовыя линіи, то касательныя къ нимъ и будутъ лучи комплекса. Взявъ ось комплекса въ число координатныхъ осей, мы сможемъ представить его уравненіе въ наиболѣе простой формѣ, сдѣлать его зависящимъ отъ одной постоянной, параметра комплекса. Своимъ параметромъ и центральною осью комплексъ вполнѣ опредѣляется. Такимъ путемъ были опять обнаружены многія интересныя свойства, касающіяся распредѣленія самихъ лучей комплекса, полюсовъ, полярныхъ плоскостей и сопряженныхъ прямыхъ, свойства, извѣстныя уже ранѣе изъ работъ Möbius'а и Chasles'а. Но, какъ это обыкновенно бываетъ, новый методъ породилъ и новыя задачи. Отъ одного уравненія (1) Plücker переходитъ къ двумъ и тремъ такимъ уравненіямъ:

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \qquad (2)$$

$$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ \Omega_3 = 0, \qquad (3)$$

и изслѣдуетъ распредѣленіе прямыхъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ двумъ и тремъ такимъ уравненіямъ. Это приводитъ его къ разсмотрѣнію группъ комплексовъ:

$$\Omega_1 + \mu \Omega_2 = 0, \quad (4)$$

$$\Omega_1 + \mu \Omega_2 + \nu \Omega_3 = 0, \quad (5)$$

гдѣ μ и ν имѣютъ перемѣнное значеніе, и къ изслѣдованію распредѣленія осей комплексовъ группы. Въ первомъ случаѣ, для искомаго геометрическаго мѣста онъ получаетъ поверхность 3-го порядка, названную впослѣдствіе цилиндроидомъ и играющую въ новѣйшихъ работахъ такое выдающееся значеніе, во второмъ случаѣ, оси комплексовъ группы распредѣляются по гиперболоидамъ. Что касается до лучей общихъ двумъ комплексамъ, составляющихъ такъ называемую конгруенцію, то они пересѣкаются двумя дѣйствительными или мнимыми прямыми, осями особыхъ комплексовъ группы, т. е. тѣхъ, параметры которыхъ — нули; общіе же лучи трехъ комплексовъ суть производящія одного рода на томъ гиперболоидѣ, котораго производящія втораго рода суть оси особыхъ комплексовъ трехчленной группы.

Извѣстно, что Plücker имѣлъ намѣренье написать трактатъ по механикѣ, гдѣ координаты прямой и линейный комплексъ должны были найти себѣ обширное примѣненіе, но преждевременная смерть помѣшала ему въ этомъ. Въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ [1]) Plücker дѣлаетъ въ этомъ отношеніи кое-какія замѣчанія, изъ которыхъ ясны лишь приложенія линейнаго комплекса; что-же касается до группъ комплексовъ, то мы не знаемъ, какія приложенія имѣлъ въ виду Plücker, и намъ кажется сомнительнымъ, чтобы онъ имѣлъ въ виду ихъ приложенія даже къ сложенію системъ силъ,

---

[1]) Plücker, J. Fundamental views regarding mechanics. Phil. Transact. Vol. 156, 1866.

такъ что значеніе для механики цилиндроида и гиперболоидовъ въ трехчленной группѣ остается у него невыясненнымъ.

Слѣдуя пути, указанному Plücker'омъ, Cayley [1] и Zeuthen [2]) обобщаютъ координаты прямой, беря за нихъ моменты прямой относительно реберъ тетраэдра, мысль, непосредственно вытекающая изъ способа Möbius'а разложенія вращенія на шесть вращеній вокругъ реберъ того же тетраэдра. Cayley изслѣдуетъ распредѣленіе прямыхъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ однороднымъ линейнымъ уравненіямъ вида

$$l_n' x_0' + m_n' y_0' + n_n' z_0' + x_n' l_0' + y_n' m_0' + z_n' n_0' = 0, \quad (6)$$

и такихъ уравненій онъ беретъ отъ одного до пяти. Что касается до коэффиціентовъ этихъ уравненій, то это суть или координаты нѣкоторыхъ прямыхъ, или ихъ линейныя функціи. Въ послѣднемъ случаѣ уравненія имѣютъ у него видъ:

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z', & l', & m', & n' \\ x_1', & y_1', & z_1', & l_1', & m_1', & n_1' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n', & y_n', & z_n', & l_n', & m_n', & n_n' \end{vmatrix} = 0,$$

гдѣ члены, стоящія въ одной горизонтали, суть принятыя имъ координаты прямой. При $n=5$ имѣемъ одно уравненіе, и прямыя, координаты которыхъ ему удовлетворяютъ, образуютъ инволюцію Sylvester'а съ пятью прямыми $(x_1', y_1' \dots)$, $\dots (x_5', y_5', \dots)$, т. е. суть лучи одного съ ними комплекса. Въ заключеніе, Cayley прилагаетъ свои изслѣдованья къ случаямъ равновѣсія четырехъ, пяти и шести силъ въ пространствѣ.

---

[1]) Zeuthen, H. Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. Math. Ann. Vol. I, 1869.

[2]) Cayley, A. On the six Coordinates of a Line. Transact. of the Cambridge Phil. Soc. Vol XI, 1869.

Въ ур. (6) коэффиціенты $x_n', y_n', \ldots$ суть моменты нѣкоторой прямой относительно реберъ тетраэдра. Если обозначить черезъ $(x, y, \ldots)$ и $(x_n, y_n, \ldots)$ Плюкеровскія координаты прямой и одного изъ реберъ тетраэдра, то каждый изъ коэффиціентовъ будетъ имѣть видъ:

$$lx_n + my_n + nz_n + xl_n + ym_n + zn_n, \tag{7}$$

и шесть такихъ выраженій опредѣляютъ собою коэффиціенты ур. (6), а слѣдовательно могутъ быть приняты за координаты самого комплекса. Комплексъ состоитъ изъ лучей, пересѣкающихъ прямую $(x'y', \ldots)$, т. е. есть комплексъ особаго вида, и его уравненіе въ координатахъ Plücker'а есть:

$$lx_0 + my_0 + nz_0 + xl_0 + ym_0 + zn_0 = 0. \tag{8}$$

Съ другой стороны, шесть реберъ тетраэдра даютъ начало также шести особымъ комплексамъ:

$$l_n x_0 + m_n y_0 + n_n z_0 + x_n l_0 + y_n m_0 + z_n n_0 = 0; \tag{9}$$

ур. (7), (8) и (9) показываютъ, какимъ образомъ, имѣя шесть особыхъ комплексовъ составить координаты (7) любаго седьмаго комплекса. Возьмемъ теперь шесть какихъ либо комплексовъ:

$$L_n x + M_n y + N_n z + X_n l + Y_n m + Z_n n = 0, \tag{10}$$

и еще одинъ

$$Lx + My + Nz + Xl + Ym + Zn = 0; \tag{11}$$

тогда шесть выраженій

$$L_n X + M_n Y + N_n Z + X_n L + Y_n M + Z_n N, \tag{12}$$

или имъ пропорціональныя, опредѣляютъ собою всѣ коэффиціенты $L, M, \ldots$ въ уравненіи комплекса (11) и могутъ

быть приняты за его координаты. Такимъ путемъ связываются координаты Cayley и Zeuthen'a съ координатами комплекса F. Klein'a [1]). Если обозначимъ черезъ Δ_n кратчайшее разстояніе, черезъ φ_n уголъ между осями комплексовъ (10) и (11), черезъ p_n и p—ихъ параметры, то билинейная функція (12) для этихъ двухъ комплексовъ пропорціональна выраженію

$$\Delta_n \, Sin \, \varphi_n + (p_n + p) \cos \varphi, \tag{13}$$

названному Klein'омъ относительнымъ моментомъ двухъ комплексовъ; моменты какого-либо комплекса относительно шести основныхъ комплексовъ и суть собственно величины, принимаемыя имъ за координаты комплекса. При $p_n = 0$, $p = 0$ выраженіе (13) принимаетъ видъ $\Delta_n \, Sin \, \varphi_n$, т. е. обращается въ относительный моментъ двухъ прямыхъ. За шесть основныхъ комплексовъ оказывается наиболѣе удобнымъ взять шесть такихъ. чтобы относительный моментъ каждыхъ двухъ изъ нихъ равнялся нулю, т. е. находящихся въ инволюціи. Одинъ изъ своихъ мемуаровъ [2]) Klein посвящаетъ приложенію къ механикѣ, причемъ выясняетъ механическое значеніе относительнаго момента и показываетъ, что если въ уравненіи:

$$L\Xi + M\mathrm{H} + N\mathrm{Z} + X\Lambda + Y\mathrm{M} + Z\mathrm{N} = 0$$

принять Ξ, H.... за координаты безконечно-малаго перемѣщенія, то работа системы силъ (X, Y,....) при этомъ перемѣщеніи равна нулю.

Между тѣмъ какъ шло чисто геометрическое развитіе

---

[1]) Klein, F. Zur Theorie der Linien-Complexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. Bd. II, 1869, p. 198.

Его-же: Die allgemeine lineare Transformation der Linien Coordinaten. Ibid. p. 366.

[2]) Klein, F. Notiz betreffend der Zusammensetzung der Linien-Geometrie mit der Mechanik starrer Körper. Math. Ann. Bd. IV, 1871.

теоріи линейныхъ комплексовъ, Mannheim [1]) изучаетъ кинематику несвободной неизмѣняемой системы. Онъ показываетъ, что шести условій достаточно для того, чтобы такая система осталась неподвижной. При пяти условіяхъ перемѣщеніе системы вполнѣ опредѣлено, и точки описываютъ траэкторіи При четырехъ условіяхъ точки могутъ перемѣщаться по поверхностямъ, причемъ нормали къ послѣднимъ всѣ пересѣкаютъ однѣ и тѣ-же двѣ прямыя. Оси всѣхъ такихъ перемѣщеній лежатъ на цилиндроидѣ. При трехъ условіяхъ всѣ точки могутъ перемѣщаться по совершенно произвольнымъ направленіямъ, за исключеніемъ точекъ, лежащихъ на нѣкоторомъ гиперболоидѣ, которыя описываютъ поверхности. Эти результаты, въ связи съ методомъ нормалій, Mannheim примѣнилъ къ рѣшенію весьма многихъ геометрическихъ вопросовъ, даже такихъ, которые, по справедливому выраженію автора [2]), казалось, входили въ область анализа. Въ этомъ отношеніи достаточно упомянуть его работы, касающіяся опредѣленія радіусовъ кривизны, обобщеніе теоремы Meusnier и проч.

Мы обязаны Сомову [3]) указаніемъ связи, какая существуетъ между теоріей линейныхъ комплексовъ и кинематикой несвободнаго твердаго тѣла. Сомовъ показалъ, что каж-

---

[1]) Mannheim, A. Etude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Recueil des Memoires der Savants étrangers, t XX. Journal de l'école Polytechnique, cah. 43, p. 57.

Его же: Propriétés relatives aux déplacements infiniment petits d'un corps lorsque ces déplacements ne sont définis que par quatre conditions. Comptes rendus, T. LXXIII, 1871.

Его же: Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure de forme invariable dont le déplacement est assujetti à quatre conditions. Recueil des Savants étrangers, t. XXII.

[2]) Notice sur les travaux mathématiques de M. A. Mannheim. Paris, 1885, p. 8.

[3]) Somoff, J. Sur les vitesses virtuelles d'une figure invariable, assujetties à des équations de conditions quelconques de formes linéaire. Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg, 1872.

Его же: Раціональная механика, Кинематика. Петербургъ, 1872. стр. 368.

дому условному уравненію, стѣсняющему перемѣщеніе, соотвѣтствуетъ линейный комплексъ, обладающій тѣмъ свойствомъ, что возможное перемѣщеніе эквивалентно вращенію вокругъ двухъ какихъ-либо его лучей. Четыремъ условнымъ уравненіямъ соотвѣтствуютъ четыре комплекса, имѣющіе, какъ извѣстно, два общихъ луча. Такимъ образомъ всѣ возможныя перемѣщенія такой системы могутъ быть произведены вращеніями вокругъ двухъ прямыхъ. а отсюда непосредственно и вытекаетъ та теорема Mannheim'а, по которой нормали къ поверхностямъ, описаннымъ различными точками, должны пересѣчь эти двѣ прямыя.

Мы переходимъ теперь къ высшей степени замѣчательнымъ работамъ [1]) англійскаго ученаго R. S. Ball'я, собраннымъ въ его сочиненіи The Theorie of Screws, Dublin, 1876. Первыя восемь главъ этой книги посвящены соображеніямъ и теоремамъ, касающимся или вполнѣ свободнаго тѣла, или тѣла. обладающаго свободой всякой степени, въ остальныхъ шести главахъ разобраны болѣе детально случаи тѣла, обладающаго опредѣленными степенями свободы.

Всякое перемѣщеніе приводится къ его каноническому виду, т. е. къ винтовому движенію вокругъ нѣкоторой оси. Если $d\tau$ и $d\omega$ суть слагающія этого движенія, то величинами $p = \frac{d\tau}{d\omega}$ и $d\omega$, и положеніемъ оси винтоваго движенія перемѣщеніе вполнѣ опредѣляется. Ось съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ, равнымъ параметру p, называется винтомъ,

---

[1]) Ball, R. S. On the small oscillations of a Rigid Body about a fixed point. Trans. of the Royal Irisch Academy. Vol. XXIV, 1870.

Его-же: The Theory of screws—a geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a Rigid Body. Trans. of the Royal Irisch Acad. Vol. XXV, 1871.

Его-же: Researches in the Dynamics of a Rigid Body by the aid of the Theory of screws. Phil Trans. Vol. 164, 1874.

Его-же: Screw Coordinates and their applications to problems in the Dynamics of a Rigid Body. Trans. of the Royal Irisch Acad. Vol. XXV. 1874.

такъ что для полнаго опредѣленія перемѣщенія кромѣ винта нужно знать еще амплитуду $d\omega$ винтоваго движенія. Обозначивъ винтъ черезъ (Γ), мы будемъ обозначать всякое перемѣщеніе символомъ $(\Gamma, d\omega)$ [1]).

Всякая система силъ приводится къ ея канонической формѣ, т. е. къ силѣ R и парѣ момента G, ось которой параллельна силѣ. Ось пары съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ, равнымъ параметру $\frac{G}{R} = p$, называютъ винтомъ, и мы можемъ сказать, что всякая система силъ характеризуется винтомъ (C) и силой R, и будемъ обозначать ее символомъ (C, R) [2]).

Пусть на тѣло, обладающее перемѣщеніемъ $(\Gamma, d\omega)$ дѣйствуетъ система силъ (C, R); тогда, какъ это было показано еще Klein'омъ, работа силъ будетъ:

$$((p+\pi)\cos\varphi + \Delta\sin\varphi)R\,d\omega = R\,d\omega.2\Omega_{c,\Gamma}.$$

Символъ

$$2\Omega_{c,\Gamma} = (p+\pi)\cos\varphi + \Delta\sin\varphi$$

играетъ очень важную роль во всемъ сочиненіи и называется возможнымъ коэффиціентомъ. Онъ совершенно симметриченъ относительно обоихъ винтовъ, и равенство его нулю есть условіе равновѣсія силъ, приложенныхъ къ тѣлу, для котораго $(\Gamma, d\omega)$ есть единственно возможное перемѣщеніе. Два винта, возможный коэффиціентъ которыхъ равенъ нулю, называются взаимными.

Пусть тѣло несвободно, и (Γ_1) есть единственный винтъ вокругъ котораго оно можетъ вращаться; тогда говорятъ, что

[1]) Совокупность двухъ перемѣщеній $(\Gamma, d\omega)$, представляющую элементарное винтовое движеніе, Ball называетъ словомъ twist, которому нѣтъ соотвѣтствующаго въ русскомъ языкѣ.

[2]) Совокупность (C, R) Ball называетъ словомъ wrench, подобрать которому соотвѣтствующее въ русскомъ языкѣ еще труднѣе, чѣмъ слову twist

тѣло обладаетъ свободой 1-ой степени. Если кромѣ винта (Γ_1) есть еще одинъ (Γ_2), то тѣло обладаетъ свободой 2-ой степени. Но въ такомъ случаѣ есть еще безчисленное множество винтовъ, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться, и всѣ они лежатъ на цилиндроидѣ. Любые два винта цилиндроида служатъ для характеристики свободы тѣла и считаются независимыми. Продолжая также далѣе, Ball характеризуетъ всякую свободу движенія тѣла числомъ n независимыхъ винтовъ, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться; всѣ-же вообще винты, вокругъ которыхъ оно можетъ вращаться, образуютъ n-членную группу. Тѣло, обладающее свободой 6-ой степени, вполнѣ свободно.

Хотя для характеристики свободы движенія можно взять n любыхъ независимыхъ винтовъ, вокругъ которыхъ можетъ вращаться тѣло, однако вычисленія значительно упрощаются, если эти n винтовъ совзаимны. Выберемъ одну такую группу винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$; тогда всякому возможному перемѣщенію $(\Gamma, d\omega)$ соотвѣтствуетъ одна система величинъ $d\omega_1, \ldots d\omega_n$ такого свойства, что перемѣщеніе $(\Gamma, d\omega)$ эквивалентно совокупности перемѣщеній $(C_1, d\omega_1), \ldots (C_n, d\omega_n)$.

Всякая система силъ (C_0, R_0), приложенная къ несвободному тѣлу, разлагается на двѣ системы (C, R) и (C', R'), изъ которыхъ одной соотвѣтствуетъ винтъ (C), принадлежащій къ группѣ винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$, винтъ-же (C') другой системы принадлежитъ къ группѣ винтовъ, взаимныхъ съ винтами свободы. Система силъ (C', R') уничтожается реакціями связей, а система (C, R), называемая сведенной, можетъ быть разложена на n системъ $(C_1, R_1), \ldots (C_n, R_n)$. Величины $d\omega_1, \ldots d\omega_n$ называются косыми координатами перемѣщенія $(\Gamma, d\omega)$, а величины $R_1, \ldots R_n$—косыми координатами сведенной системы силъ (C, R).

Каждому винту (Γ) перемѣщенія соотвѣтствуетъ одинъ

винтъ (C), винтъ мгновенныхъ силъ, способныхъ въ теченіе элемента времени dt сообщить тѣлу, находящемуся въ покоѣ, то перемѣщеніе, которымъ оно обладаетъ. Въ тѣлѣ, обладающемъ свободой n-ой степени, есть n винтовъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что перемѣщенію вокругъ каждаго изъ нихъ соотвѣтствуетъ винтъ мгновенныхъ силъ тождественный съ винтомъ перемѣщенія. Такіе винты называются главными винтами инерціи. Въ случаѣ тѣла вполнѣ свободнаго, шесть главныхъ винтовъ инерціи лежатъ на осяхъ эллипсоида инерціи и имѣютъ параметры $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, если a, b, c главные радіусы инерціи. Принявъ главные винты инерціи за координатные винты (C_1), ... (C_n), мы представимъ кинетическую энергію какого-либо перемѣщенія въ видѣ суммы n квадратовъ.

Переходя затѣмъ къ дѣйствію непрерывныхъ силъ, Ball останавливается на случаѣ системы консервативной и, предполагая, что тѣло исходитъ изъ положенія устойчиваго равновѣсія, представляетъ потенціальную энергію въ видѣ квадратной функціи отъ координатъ перемѣщенія. Каждому перемѣщенію изъ положенія устойчиваго равновѣсія соотвѣтствуетъ кромѣ винта (I') перемѣщенія еще два винта: винтъ (C) мгновенныхъ силъ и винтъ (C') непрерывныхъ сведенныхъ силъ. Въ тѣлѣ, обладающемъ свободой n-ой степени, есть n винтовъ такого свойства, что, принявъ ихъ за винты перемѣщенія, мы получаемъ имъ соотвѣтствующіе винты непрерывныхъ силъ съ ними тождественными. Это—главные винты потенціала; принявъ главныя винты потенціала за координатные винты, Ball представляетъ потенціальную энергію перемѣщенія въ видѣ суммы n квадратовъ.

Кромѣ этой группы винтовъ есть еще другая—такого свойства, что, принявъ какой-либо изъ ея винтовъ за винтъ перемѣщенія, мы получимъ для винтовъ силъ непрерывныхъ и мгновенныхъ одинъ и тотъ-же винтъ; это—винты гармонич-

вые. Выведемъ тѣло изъ положенія устойчиваго равновѣсія, сообщивъ ему нѣкоторую амплитуду $d\omega$ вокругъ одного изъ гармоничныхъ винтовъ. Равновѣсіе нарушится, и явятся непрерывныя силы, которыя видоизмѣнятъ сообщенное тѣлу движеніе. Но такъ какъ винтъ этихъ непрерывныхъ силъ тождественъ съ винтомъ силъ мгновенныхъ, то онѣ будутъ вліять лишь на амплитуду, но никакъ не на самый винтъ перемѣщенія, такъ что тѣло будетъ продолжать вращаться вокругъ гармоничнаго винта, совершая вокругъ него малыя колебанія.

Пользуясь свойствами гармоничныхъ винтовъ, Ball строитъ и интегрируетъ общія дифференціальныя уравненія движенія тѣла, выходящаго изъ положенія устойчиваго равновѣсія, задача, рѣшенная въ иномъ видѣ еще Lagrange'емъ въ его Mécanique analytique.

Было-бы неумѣстно въ этомъ краткомъ обозрѣніи сообщать болѣе подробно содержаніе работъ Ball'я; намъ остается только отослать читателя или къ сочиненію The Theorie of Screws, или къ прекрасно написанному мемуару [1]) Fiedler'а гдѣ это сочиненіе излагается болѣе детально.

Что касается метода, которымъ пользуется Ball, то нужно сказать, что ничего общаго съ методомъ Plücker'а онъ не имѣетъ; существенную роль у него играетъ цилиндроидъ и понятіе о взаимныхъ винтахъ.

---

[1]) Fiedler, W. Geometrie und Geomechanik. Eine Uebersicht zur Kennzeichnung ihres Zusammenhanges nach seiner gegenwärtigen Entwickelung. Vierteljahrschrift der Züricher Naturforsch. Gesellchaft, Jahrg. 1876. См. также Liouville, Journal. 3-me serie t. IV. an 1878, гдѣ эта статья помѣщена въ переводѣ на французскій языкъ.

Наиболѣе существенныя черты теоріи Ball'я изложены также въ книгѣ Schell'я: Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig, 1880, Th. III, Cap. X, Th. IV, Cap. VIII.

Изъ всего вышеизложеннаго видно, что чисто геометрической теоріи винтовъ въ собственномъ смыслѣ этого слова не существуетъ.

Plücker далъ аналитическую теорію линейныхъ комплексовъ и такимъ путемъ окончательно связалъ кинематику съ статикой, но его теорія группъ осталась неясной для механики. Klein, продолжая работу Plücker'а, держится опять чисто геометрической стороны и только въ одномъ мемуарѣ указываетъ на механическое значеніе возможнаго коэффиціента. Съ другой стороны, Mannheim въ кинематикѣ несвободнаго твердаго тѣла получаетъ поверхности, найденныя Plücker'омъ, и хотя Сомовъ и разъясняетъ связь работъ Mannheim'а съ теоріей линейныхъ комплексовъ, но благодаря тому что понятіе о винтѣ установлено не было, эта связь не остается вполнѣ ясной. Наконецъ Ball въ своемъ сочиненіи ограничивается лишь замѣчаніями, что многія доказанныя имъ теоремы встрѣчаются и въ изслѣдованіяхъ Plücker'а и Klein'а.

Мы нисколько не думаемъ, что пробѣлы, которые такимъ образомъ оказываются въ теоріи винтовъ, въ смыслѣ отсутствія до конца проведенной ея связи съ теоріей линейныхъ комплексовъ, являлись-бы результатомъ трудности задачи. Но намъ казалось, что разъ такой пробѣлъ замѣчается, его слѣдуетъ пополнить, а потому мы и взяли на себя этотъ трудъ. Наконецъ полный недостатокъ сочиненій по теоріи винтовъ не только у насъ, но и за границей, подалъ намъ надежду на хотя нѣсколько снисходительную оцѣнку нашей работы.

Это сочиненіе разбивается на три главы, изъ коихъ послѣдняя посвящена приложеніямъ.

Въ главѣ I изложена по методу Plücker'а теорія векторовъ и линейнаго комплекса 1-го порядка. Тутъ-же дано понятіе о винтѣ, его координатахъ, координатахъ его оси, объ относительномъ моментѣ двухъ винтовъ и о связи, су-

ществующей между двумя системами векторовъ, опредѣляющихъ два взаимныхъ винта [1]).

Глава II посвящена группамъ винтовъ, причемъ § 21, составляющій какъ-бы введеніе, указываетъ на связь съ одной стороны между группами винтовъ и сложеніемъ системъ векторовъ, съ другой стороны между группой винтовъ и группой комплексовъ; здѣсь же дано условіе независимости n винтовъ. Въ теоріи группъ винтовъ мы остановились болѣе детально на группѣ трехчленной и разобрали нѣкоторые частные случаи, еще не разсмотрѣнные; группы четырехчленная и пятичленная, опущенныя Plücker'омъ, изслѣдованы его методомъ. Указавъ на связь между двумя группами взаимныхъ винтовъ, мы переходимъ къ косымъ координатамъ и доказываемъ затѣмъ свойства шести совзаимныхъ винтовъ, указанныя Klein'омъ и Ball'емъ. Остальные §§ этой главы посвящены n-членной группѣ; здѣсь дано условіе независимости n винтовъ группы въ косыхъ координатахъ и указано, какимъ образомъ изъ n-членной группы можно выбрать n совзаимныхъ винтовъ.

При изложеніи приложеній теоріи винтовъ, въ главѣ III, предпологались извѣстными лишь самыя элементарныя теоремы, каковы напр. правила параллелограмма силъ и вращеній, значеніе пары вращеній въ кинематикѣ и проч. Въ §§ 49 и 50 указано значеніе группъ винтовъ въ кинематикѣ несвободнаго тѣла и доказаны извѣстныя теоремы Chasles'а и Mannheim'а; въ остальныхъ §§ изложена теорія Ball'я, причемъ мы ограничились разсмотрѣніемъ лишь общаго случая тѣла, обладающаго свободой n-ой степени.

Теорема объ n главныхъ винтахъ инерціи въ § 53 доказана иначе чѣмъ у Ball'я по слѣдующимъ причинамъ. Ball доказываетъ ее два раза: въ первый разъ въ § 57, второй разъ—въ § 143. Первое изъ этихъ доказательствъ, основанное на разсчетѣ числа условій, которымъ должны удовлетворять n главныхъ винтовъ инерціи (они должны быть со-

[1]) Эта связь непосредственно вытекаетъ изъ работъ Сомова.

взаимны и сопряженны), можно считать только приблизительнымъ, такъ какъ легко могло-бы случиться, что только мнимые винты способны удовлетворить поставленнымъ условіямъ, между тѣмъ вопросъ идетъ о дѣйствительности такихъ винтовъ. Что касается до доказательства § 143, то съ одной стороны оно показало-бы, что такіе винты существуютъ, но существенныя ихъ свойства совзаимности и сопряженности не были-бы доказаны, съ другой стороны само доказательство страдаетъ въ двухъ отношеніяхъ. Во первыхъ, послѣ умноженія основныхъ уравненій на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и сложенія исчезновеніе членовъ $\sum \alpha_n \lambda_n$, $\sum \alpha_n \mu_n, \ldots$ объясняется взаимностью винтовъ α и λ, α и μ, между тѣмъ какъ условія взаимности этихъ винтовъ суть:

$$\sum p_n \alpha_n \lambda_n = 0, \quad \sum p_n \alpha_n \mu_n = 0, \ldots;$$

во вторыхъ, вопросъ приводится къ уравненію n-ой степени относительно h вида

$$\begin{vmatrix} A_{11} - p_1 h, & A_{12}, \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, & A_{n2}, \ldots & A_{nn} - p_n h \end{vmatrix} = 0, \qquad (14)$$

вещественность корней котораго требуетъ доказательства. Уравненіе такого вида встрѣчаются у Ball'я нѣсколько разъ (§ 71, § 75, § 85, § 143) и, можно сказать, есть основное уравненіе всей его теоріи, между тѣмъ объ условіяхъ вещественности корней его и о выполненіи этихъ условій въ каждомъ данномъ случаѣ не говорится ни слова. На стр. 68, гдѣ это уравненіе встрѣчается въ первый разъ, Ball въ выноскѣ замѣчаетъ, что корни его всѣ дѣйствительны, и ссылается при этомъ на § 44 Salmon's Higher Algebra, гдѣ идетъ рѣчь только о частномъ видѣ такого уравненія, именно объ уравненіи вѣковомъ, корни котораго всегда дѣйствительны, между тѣмъ достаточно взять уравненіе

$$\begin{vmatrix} 2-h\,, & 2 \\ 2 & , 1+h \end{vmatrix} = 0\,,$$

чтобы убѣдиться, что корни уравненія вида (14) могутъ быть и мнимы.

Въ теоріи алгебраическихъ уравненій намъ не приходилось встрѣчать условій, при которыхъ уравненіе (14) имѣетъ вещественные корни, но намъ извѣстна одна теорема Kronecker'а [1]), касающаяся пучка квадратичныхъ формъ, изъ которой эти условія непосредственно вытекаютъ.

Какую-либо квадратичную форму о n перемѣнныхъ:

$$f(x_1,\ldots x_n) = \sum_{i,k} A_{i,k}\, x_i x_k \tag{15}$$

называютъ опредѣленной, если она можетъ быть представлена въ видѣ

$$E_1 X_1^2 + \ldots + E_n X_n^2,$$

гдѣ $E_1,\ldots E_n$—всѣ одинаковыхъ знаковъ, а $X_1,\ldots X_n$ линейныя независимыя между собою функціи перемѣнныхъ $x_1,\ldots x_n$. Если f и φ суть двѣ квадратичныя формы однѣхъ и тѣхъ-же перемѣнныхъ, то

$$uf + v\varphi,$$

гдѣ u и v принимаютъ всѣ дѣйствительныя значенія, составляютъ пучекъ квадратичныхъ формъ.

Обозначимъ черезъ Δ инварьянтъ пучка; тогда

$$\Delta = 0$$

есть уравненіе n-ой степени относительно отношенія $v:u$. Теорема Kronecker'а говоритъ, что если это уравненіе имѣетъ хотя одинъ мнимый корень, то нѣтъ ни одной опредѣленной формы въ пучкѣ $uf + v\varphi$.

1) Kronecker, Zur Theorie der linearen und quadratischen Formen. Monatsberichte der Acad. der Wissenschaften zu Berlin J. 1868, p. 339.

Принявъ за f форму (15), а за φ форму

$$\varphi = \sum_{k=1}^{k=n} p_k x_k^2$$

получимъ пучекъ:

$$uf + v\varphi = (A_{11}u + p_1 v)x_1^2 + 2A_{12}ux_1x_2 + \ldots\ldots\ldots,$$

а обозначивъ $\frac{v}{u} = h$ и уравнявъ нулю инварьянтъ пучка, получимъ ур. (15). Допустимъ теперь, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} A_{11}, \ldots A_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}, \ldots A_{nn} \end{vmatrix}$$

и всѣ его главные миноры

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} A_{11}, \ldots A_{1i} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{i1}, \ldots A_{ii} \end{vmatrix}$$

положительны; тогда, такъ какъ форма f можетъ быть представлена въ видѣ[1])

$$f = \Delta_1 X_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} X_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} X_n^2,$$

то въ пучкѣ есть одна опредѣленная форма, соотвѣтствующая $v=0$, а слѣдовательно корни ур. (14) всѣ должны быть дѣйствительны. Эти условія всегда выполняются въ теоріи Ball'я, а потому результаты, полученные имъ, остаются въ силѣ.

И. Занчевскій.

Одесса, 15-го марта 1889 г.

---

[1]) Serret, Cours d'algèbre supérieure. Paris 1885. T. I, p. 561.

Глава I.

Теорія векторовъ. Линейный комплексъ. Винтъ.

§ 1. Въ векторѣ различаютъ его величину, направленіе, положеніе и знакъ. Направленіе вектора есть направленіе прямой, на которой онъ лежитъ; положеніе его опредѣляется положеніемъ этой прямой въ пространствѣ и положеніемъ его на этой прямой, знакъ — стрѣлкой, ведущей отъ начала его къ концу. Векторы AB и BA—противныхъ знаковъ.

Два вектора, имѣющіе одинаковые величины и знаки и лежащіе на параллельныхъ прямыхъ, называются геометрически равными; если параллельныя прямыя совпадаютъ, то векторы считаются однозначущими, или эквивалентными.

Два вектора, лежащіе на пересѣкающихся прямыхъ, могутъ быть сложены въ одинъ по правилу параллелограмма. Отсюда вытекаетъ правило сложенія двухъ параллельныхъ векторовъ, правило, непримѣнимое лишь въ томъ случаѣ, когда два параллельныхъ вектора равны по величинѣ, но противны по знаку. Такіе два вектора составляютъ неприводимую *пару*. Составивъ произведеніе изъ общей величины векторовъ, входящихъ въ пару, на ихъ взаимное разстояніе, отложимъ это произведеніе въ видѣ отрѣзка на нормали къ плоскости пары, по той ея сторонѣ, съ которой наблюдателю, стоящему ногами у по-

дошвы нормали и опирающемуся на эту нормаль, направленіе стрѣлокъ векторовъ, составляющихъ пару, кажется идущимъ по движенію часовой стрѣлки. Такой отрѣзокъ называется *моментомъ* пары. Двѣ пары, имѣющія геометрически равные моменты, эквивалентны. Двѣ пары могутъ быть сложены въ одну, моментъ которой получается сложеніемъ данныхъ моментовъ по правилу параллелограмма.

Все, изложенное до сихъ поръ, представляетъ отчасти опредѣленія, отчасти теоремы; надъ доказательствомъ послѣднихъ мы останавливаться не будемъ [1]).

§ 2. Возьмемъ гдѣ нибудь въ пространствѣ систему трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей координатъ $Oxyz$ (фиг. 1) и разсмотримъ какой либо векторъ A_1A; координаты точекъ A_1 и A пусть будутъ $(x_1 y_1 z_1)$ и (xyz). Разложивъ векторъ по тремъ направленіямъ, параллельнымъ осямъ координатъ, получимъ слагающія x_0, y_0 z_0. Разсмотримъ одну изъ нихъ, напр. z_0. Отложивъ на оси Oz, отъ точки O, два вектора, равныхъ по величинѣ z_0, но прямо противуположныхъ, получимъ вмѣсто вектора z_0, приложеннаго къ точкѣ A_1, ему геометрически равный, но приложенный къ точкѣ O, и пару момента $z_0.OB$. Этотъ моментъ лежитъ въ плоскости xOy и направленъ перпендикулярно къ OB въ сторону, указанную на чертежѣ стрѣлкой. Косинусы угловъ, образуемыхъ этимъ направленіемъ съ осями Ox и Oy, суть:

$$\frac{y_1}{OB}, \quad -\frac{x_1}{OB},$$

а потому слагающія момента по тѣмъ-же осямъ будутъ:

$$y_1 z_0, \quad -x_1 z_0;$$

точно также вмѣсто векторовъ x_0 и y_0, приложенныхъ къ точ-

[1]) См. W. Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig. 1879. Bd. I. Cap. I.

къ A_1, получимъ векторы x_0 и y_0, геометрически равные первымъ, но приложенные къ точкѣ O, и двѣ пары. Слагающія момента первой пары на осяхъ Oy и Oz суть:

$$z_1 x_0 \,, \quad -y_1 x_0 \,;$$

слагающія момента второй пары на осяхъ Oz и Ox равны:

$$x_1 y_0 \,, \quad -z_1 y_0 \,,$$

Складывая моменты, лежащіе на тѣхъ-же осяхъ, получаемъ:

$$l_0 = y_1 z_0 - z_1 y_0 \,, \quad m_0 = z_1 x_0 - x_1 z_0 \,, \quad n_0 = x_1 y_0 - y_1 x_0 \qquad (1)$$

Пара, моментъ которой имѣетъ своими слагающими по осямъ координатъ выраженія (1), и векторъ, геометрически равный вектору $A_1 A$, но проходящій черезъ точку O, эквивалентны вектору $A_1 A$. Если вмѣсто проэкцій x_0, y_0, z_0 введемъ разности соотвѣтствующихъ координатъ конца и начала вектора, то будемъ имѣть такихъ шесть выраженій:

$$\begin{array}{lll} x_0 = x - x_1 \,, & y_0 = y - y_1, & z_0 = z - z_1 \\ l_0 = y_1 z - z_1 y \,, & m_0 = z_1 x - x_1 z \,, & n_0 = x_1 y - y_1 x. \end{array} \qquad (2)$$

Между этими шестью величинами существуетъ тождественное соотношеніе:

$$l_0 x_0 + m_0 y_0 + n_0 z_0 = 0, \qquad (3)$$

означающее, что моментъ пары перпендикуляренъ къ вектору. Обратно, имѣя шесть величинъ:

$$x_0 \,, \; y_0 \,, \; z_0 \,, \; l_0 \,, \; m_0 \,, \; n_0 \qquad (4)$$

(изъ которыхъ три первыхъ не всѣ нули), удовлетворяющихъ соотношенію (3), мы можемъ построить векторъ, который по от-

винтъ (C), винтъ мгновенныхъ силъ, способныхъ въ теченіе элемента времени dt сообщить тѣлу, находящемуся въ покоѣ, то перемѣщеніе, которымъ оно обладаетъ. Въ тѣлѣ, обладающемъ свободой n-ой степени, есть n винтовъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что перемѣщенію вокругъ каждаго изъ нихъ соотвѣтствуетъ винтъ мгновенныхъ силъ тождественный съ винтомъ перемѣщенія. Такіе винты называются главными винтами инерціи. Въ случаѣ тѣла вполнѣ свободнаго, шесть главныхъ винтовъ инерціи лежатъ на осяхъ эллипсоида инерціи и имѣютъ параметры $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, если a, b, c главные радіусы инерціи. Принявъ главные винты инерціи за координатные винты (C_1), . . . (C_n), мы представимъ кинетическую энергію какого-либо перемѣщенія въ видѣ суммы n квадратовъ.

Переходя затѣмъ къ дѣйствію непрерывныхъ силъ, Ball останавливается на случаѣ системы консервативной и, предполагая, что тѣло исходитъ изъ положенія устойчиваго равновѣсія, представляетъ потенціальную энергію въ видѣ квадратной функціи отъ координатъ перемѣщенія. Каждому перемѣщенію изъ положенія устойчиваго равновѣсія соотвѣтствуетъ кромѣ винта (I') перемѣщенія еще два винта: винтъ (C) мгновенныхъ силъ и винтъ (C') непрерывныхъ сведенныхъ силъ. Въ тѣлѣ, обладающемъ свободой n-ой степени, есть n винтовъ такого свойства, что, принявъ ихъ за винты перемѣщенія, мы получаемъ имъ соотвѣтствующіе винты непрерывныхъ силъ съ ними тождественными. Это—главные винты потенціала; принявъ главныя винты потенціала за координатные винты, Ball представляетъ потенціальную энергію перемѣщенія въ видѣ суммы n квадратовъ.

Кромѣ этой группы винтовъ есть еще другая—такого свойства, что, принявъ какой-либо изъ ея винтовъ за винтъ перемѣщенія, мы получимъ для винтовъ силъ непрерывныхъ и мгновенныхъ одинъ и тотъ-же винтъ; это—винты гармонич-

ные. Выведемъ тѣло изъ положенія устойчиваго равновѣсія, сообщивъ ему нѣкоторую амплитуду $d\omega$ вокругъ одного изъ гармоничныхъ винтовъ. Равновѣсіе нарушится, и явятся непрерывныя силы, которыя видоизмѣнятъ сообщенное тѣлу движеніе. Но такъ какъ винтъ этихъ непрерывныхъ силъ тождественъ съ винтомъ силъ мгновенныхъ, то онѣ будутъ вліять лишь на амплитуду, но никакъ не на самый винтъ перемѣщенія, такъ что тѣло будетъ продолжать вращаться вокругъ гармоничнаго винта, совершая вокругъ него малыя колебанія.

Пользуясь свойствами гармоничныхъ винтовъ, Ball строитъ и интегрируетъ общія дифференціальныя уравненія движенія тѣла, выходящаго изъ положенія устойчиваго равновѣсія, задача, рѣшенная въ иномъ видѣ еще Lagrange'емъ въ его Mécanique analytique.

Было-бы неумѣстно въ этомъ краткомъ обозрѣніи сообщать болѣе подробно содержаніе работъ Ball'я; намъ остается только отослать читателя или къ сочиненію The Theorie of Screws, или къ прекрасно написанному мемуару [1]) Fiedler'а гдѣ это сочиненіе излагается болѣе детально.

Что касается метода, которымъ пользуется Ball, то нужно сказать, что ничего общаго съ методомъ Plücker'а онъ не имѣетъ; существенную роль у него играетъ цилиндроидъ и понятіе о взаимныхъ винтахъ.

---

[1]) Fiedler, W. Geometrie und Geomechanik. Eine Uebersicht zur Kennzeichnung ihres Zusammenhanges nach seiner gegenwärtigen Entwickelung. Vierteljahrschrift der Züricher Naturforsch. Gesellchaft, Jahrg. 1876. См. также Liouville, Journal. 3-me serie t. IV. an 1878, гдѣ эта статья помѣщена въ переводѣ на французскій языкъ.

Наиболѣе существенныя черты теоріи Ball'я изложены также въ книгѣ Schell'я: Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig, 1880, Th. III, Cap. X, Th. IV, Cap. VIII.

Въ формулахъ (2) дѣлаемъ слѣдующія подстановки:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$
$$z = z';$$

тогда получимъ:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \cos\varphi - y'_0 \sin\varphi \quad, & l_0 &= l'_0 \cos\varphi - m'_0 \sin\varphi \\ y_0 &= x'_0 \sin\varphi + y'_0 \cos\varphi \quad, & m_0 &= m'_0 \cos\varphi + l'_0 \sin\varphi \\ z_0 &= z'_0 \quad, & n_0 &= n'_0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Измѣняя въ круговомъ порядкѣ буквы x_0, y_0, z_0; l_0, m_0, n_0, получаемъ формулы преобразованія при вращеніи вокругъ осей Ox и Oy. Такъ, если повернемъ оси вокругъ Oy на уголъ ψ, то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \cos\psi + z'_0 \sin\psi \quad, & l_0 &= l'_0 \cos\psi + n'_0 \sin\psi \\ y_0 &= y'_0 \quad, & m_0 &= m'_0 \\ z_0 &= -x'_0 \sin\psi + z'_0 \cos\psi \,, & n_0 &= -l'_0 \sin\psi + n'_0 \cos\psi \end{aligned} \qquad (10)$$

§ 4. Подъ *относительнымъ моментомъ двухъ векторовъ* мы будемъ подразумѣвать шесть разъ взятый объемъ пирамиды, построенной на этихъ векторахъ, какъ на противуположныхъ ребрахъ, объемъ, взятый съ надлежащимъ знакомъ. Если обозначить черезъ r и r_1 величины векторовъ, черезъ d—кратчайшее разстояніе, черезъ φ — уголъ между ними, то получимъ для момента выраженіе:

$$r r_1 d . \sin\varphi, \qquad (11)$$

знакъ котораго опредѣляетъ знакъ момента. Съ другой стороны, если обозначить черезъ $(x_1\ y_1\ z_1)$ и $(x_2\ y_2\ z_2)$ координаты конца и начала одного изъ векторовъ, а черезъ $(x'_1\ y'_1\ z'_1)$ и $(x'_2\ y'_2\ z'_2)$—то-же для второго, то, какъ извѣстно [1]), шесть

[1]) Salmon—Fiedler. Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig. 1879. § 31

разъ взятый объемъ пирамиды, имѣющей эти точки своими вершинами, равенъ опредѣлителю:

$$\begin{vmatrix} x_1 , & y_1 , & z_1 , & 1 \\ x_2 , & y_2 , & z_2 , & 1 \\ x'_1 , & y'_1 , & z'_1 , & 1 \\ x'_2 , & y'_2 , & z'_2 , & 1 \end{vmatrix} .$$

Этотъ опредѣлитель можно написать въ иномъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 , & y_1 - y_2 , & z_1 - z_2 , & 0 \\ x_2 , & y_2 , & z_2 , & 1 \\ x'_1 - x'_2 , & y'_1 - y'_2 , & z'_1 - z'_2 , & 0 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 , & y_1 - y_2 , & z_1 - z_2 \\ x'_1 - x'_2 , & y'_1 - y'_2 , & z'_1 - z'_2 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_1 - x'_2 , & y'_1 - y'_2 , & z'_1 - z'_2 \\ x_1 - x_2 , & y_1 - y_2 , & z_1 - z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} .$$

Раскрывая каждый изъ полученныхъ опредѣлителей по элементамъ первой горизонтали, получимъ для момента выраженіе;

$$x_0 l'_0 + y_0 m'_0 + z_0 n'_0 + l_0 x'_0 + m_0 y'_0 + n_0 z'_0 , \qquad (12)$$

гдѣ $(x_0 y_0 \ldots .)$ и $(x'_0 y'_0 \ldots .)$—координаты двухъ векторовъ.

Въ выраженіи (11) множитель $d . sin \varphi$ зависитъ только отъ относительнаго положенія прямыхъ, на которыхъ лежатъ векторы, и называется *относительнымъ моментомъ двухъ прямыхъ*. Онъ получается слѣдовательно изъ момента двухъ векторовъ, раздѣленіемъ послѣдняго на произведеніе величинъ векторовъ. Обратно, если даны двѣ прямыя AB и CD, то для полученія ихъ момента нужно представить себѣ на нихъ отложенными (въ направленіи AB и CD) два вектора, оба равные единицѣ, и составить относительный моментъ этихъ векторовъ. Подъ мо-

ментомъ вектора r относительно прямой AB подразумѣвается относительный моментъ векторовъ r и другого, равнаго единицѣ, лежащаго на AB въ направленіи отъ A къ B.

Выраженіе $d.sin\,\varphi$ можетъ быть только тогда нулемъ, когда двѣ прямыя пересѣкаются или параллельны. Такимъ образомъ мы имѣемъ такое условіе пересѣченія (въ конечной или безконечно удаленной точкѣ) двухъ прямыхъ, координаты которыхъ суть $(x_0, y_0, \ldots)$ и $(x'_0, y'_0 \ldots)$:

$$l_0x'_0+m_0y'_0+n_0z'_0+x_0l'_0+y_0m'_0+z_0n'_0=0 \qquad (13)$$

§ 5. Пусть имѣемъ въ пространствѣ безчисленное множество векторовъ. Каждый изъ нихъ можетъ быть замѣненъ геометрически равнымъ ему векторомъ, но приложеннымъ къ точкѣ O, началѣ координатъ, и парой опредѣленнаго момента. Складывая затѣмъ векторы, приложенные къ точкѣ O, по *правилу многоугольника*, получимъ одинъ, такъ называемый, *главный векторъ* относительно точки O; складывая моменты паръ по тому-же правилу, получаемъ одинъ моментъ, называемый *главнымъ моментомъ* относительно точки O. Главный векторъ и главный моментъ суть *элементы приведенія* системы векторовъ къ точкѣ O. Если обозначимъ черезъ x_0, y_0, z_0, l_0, m_0, n_0 координаты одного какого-либо изъ нихъ, то

$$X=\Sigma x_0\,,\ Y=\Sigma y_0\,,\ Z=\Sigma z_0\,, \qquad (14)$$

гдѣ суммированье распространяется по всѣмъ векторамъ, будутъ проэкціи на осяхъ координатъ главнаго вектора; величина его равна

$$R=+\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad (15)$$

а косинусы угловъ, образуемыхъ имъ съ осями координатъ, суть:

$$\frac{X}{R},\ \frac{Y}{R},\ \frac{Z}{R};$$

точно также проэкціи главнаго момента на осяхъ координатъ суть:

$$L=\Sigma l_0\,,\ M=\Sigma m_0\,,\ N=\Sigma n_0\,; \qquad (16)$$

величина главнаго момента

$$G=+\sqrt{L^2+M^2+N^2}, \qquad (17)$$

а косинусы угловъ, образуемыхъ имъ съ координатными осями, равны:

$$\frac{L}{G}\,,\quad \frac{M}{G}\,,\quad \frac{N}{G}\,.$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть въ точкѣ O два отрѣзка, изъ коихъ одинъ—главный векторъ, другой — главный моментъ, наклоненные другъ къ другу подъ угломъ, опредѣляемымъ уравненіемъ:

$$R.G.\cos(R,G)=LX+MY+NZ=J \qquad (18)$$

Шесть суммъ

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N \qquad (19)$$

могутъ быть названы *координатами системы векторовъ*.

Двѣ системы векторовъ, имѣющія тѣ-же координаты, другъ другу эквиваленты.

Очевидно, какъ главный векторъ, такъ и главный моментъ не мѣняютъ своихъ значеній при измѣненіи направленія осей; остается поэтому посмотрѣть, какъ измѣняются эти величины при измѣненіи начала координатъ, но при сохраненіи направленія осей. Обозначивъ черезъ (a, b, c) координаты новаго начала, а черезъ X', Y',.... новыя координаты системы векторовъ, будемъ имѣть по формуламъ (14), (16) и (8):

$$X=X', \quad Y=Y', \quad Z=Z'$$
$$L=L'+bZ'-cY', \quad M=M'-aZ'+cX', \quad N=N'+aY'-bX';$$

отсюда:

При переходѣ отъ одной точки приведенія къ другой главный векторъ остается себѣ геометрически равнымъ; главный моментъ вообще мѣняетъ свою величину, однако при движеніи начала по прямой

$$a : b : c = X : Y : Z,$$

на которой лежитъ главный векторъ, главный моментъ остается также себѣ геометрически равнымъ.

Кромѣ того имѣемъ:

$$LX+MY+NZ=L'X'+M'Y'+N'Z',$$

т. е. выраженіе (18) не мѣняется при измѣненіи начала; а такъ какъ оно, будучи равно произведенію $RG\cos(RG)$, не мѣняется также при измѣненіи направленія осей, то называется поэтому *инварьянтомъ* системы векторовъ.

§ 6. Случаи, когда инварьянтъ равенъ нулю, могутъ быть слѣдующимъ образомъ классифицированы:

1) Если: $X=Y=Z=L=M=N=0$, то говорятъ, что данная система векторовъ эквивалентна нулю, что равносильно полному отсутствію векторовъ.

2) $X=Y=Z=0$, но изъ координатъ L, M, N не всѣ нули; въ этомъ случаѣ система векторовъ эквивалентна парѣ опредѣленнаго момента.

3) Сюда входятъ всѣ остальные случаи, при которыхъ J есть нуль. Такъ какъ координаты системы векторовъ удовлетворяютъ тому-же соотношенію (3), какое имѣетъ мѣсто между координатами вектора, то можно найти такой векторъ, координаты котораго равны:

$$x_0=X,\ y_0=Y,\ z_0=Z,\ l_0=L,\ m_0=M,\ n_0=N;$$

данная система векторовъ эквивалентна этому одному вектору. Ур. (18) показываетъ, что при этомъ или

$$G=0,$$

или главный векторъ перпендикуляренъ къ главному моменту, что бываетъ, напр., тогда, когда всѣ векторы лежатъ въ одной плоскости. Это-же имѣетъ мѣсто въ системѣ параллельныхъ векторовъ, когда главный векторъ отличенъ отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, направивъ ось Oz параллельно общему направленію векторовъ, будемъ имѣть:

$$X=0,\ Y=0,\ N=0,$$

а слѣдовательно и

$$LX+MY+NZ=0.$$

§ 7. Если взять сумму моментовъ векторовъ системы относительно одного и того-же вектора, то получимъ выраженіе

$$Lx_0+My_0+Nz_0+Xl_0+Ym_0+Zn_0, \qquad (20)$$

называемое *моментомъ системы* относительно вектора $(x_0, y_0, \ldots)$ Сумма трехъ первыхъ слагаемыхъ есть моментъ главнаго момента, а сумма трехъ послѣднихъ слагаемыхъ есть моментъ главнаго вектора относительно одного и того-же вектора. Положимъ въ уравненіи (20):

$$x_0=X,\ y_0=Y,\ z_0=Z,\ l_0=m_0=n_0=0;$$

тогда получимъ инварьянтъ J: инварьянтъ системы равенъ моменту системы векторовъ относительно главнаго вектора. Если предположимъ, что въ выраженіи (20) координаты $(x_0\ y_0\ z_0)$ удовлетворяютъ уравненію

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1, \qquad (21)$$

т. е. величина вектора равна единицѣ, то оно представитъ моментъ системы относительно прямой, на которой лежитъ векторъ.

Для того чтобы система векторовъ была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы моментъ системы относительно всякой прямой пространства былъ нуль.

Дѣйствительно, если при всѣхъ значеніяхъ x_0, y_0, z_0, удовлетворяющихъ уравненію (21), и при всякихъ l_0, m_0, n_0 имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$Lx_0+My_0+Nz_0+Xl_0+Ym_0+Zn_0=0,$$

то положимъ:

$$l_0=m_0=n_0=x_0=y_0=0, \quad z_0=1;$$

тогда получимъ:

$$N = 0.$$

Точно также убѣдимся, что

$$L=0,\ M=0,$$

а затѣмъ, что и остальные коэффиціенты суть нули (§ 6).

§ 8. Если инварьянтъ отличенъ отъ нуля, то система векторовъ не эквивалентна одному вектору. Но въ такомъ случаѣ можно найти два вектора, которые вмѣстѣ ей эквивалентны. Обозначая координаты ихъ черезъ $(x_0, y_0, \ldots)$ и $(x'_0, y'_0, \ldots)$, будемъ имѣть такихъ 8 уравненій между этими 12-ю перемѣнными:

$$\begin{aligned} &x_0+x'_0=X\ ,\ y_0+y'_0=Y\ ,\ z_0+z'_0=Z, \\ &l_0+l'_0=L\ ,\ m_0+m'_0=M\ ,\ n_0+n'_0=N; \end{aligned} \qquad (22)$$

$$l_0x_0+m_0y_0+n_0z_0=0\ ,\ l'_0x'_0+m'_0y'_0+n'_0z'_0=0. \qquad (23)$$

Послѣднее уравненіе, на основанія уравненія (22), можно написать:

$$(X-x_0)(L-l_0)+(Y-y_0)(M-m_0)+(Z-z_0)(N-n_0)=0,$$

или:

$$Lx_0+My_0+Nz_0+Xl_0+Ym_0+Zn_0=J; \;^{1)} \qquad (24)$$

такому-же уравненію будутъ очевидно удовлетворять и координаты втораго вектора. Такіе два вектора, которые вмѣстѣ эквивалентны данной системѣ векторовъ, названы *сопряженными* векторами. Сопряженныхъ векторовъ безчисленное множество. Уравненіе (24) выражаетъ, что моментъ системы относительно каждаго изъ сопряженныхъ векторовъ постояненъ, именно равенъ инварьянту.

Подставимъ въ уравненіе (24) вмѣсто L, M,.... ихъ значенія по формуламъ (22); тогда получимъ:

$$l'_0x_0+m'_0y_0+n'_0z_0+x'_0l_0+y'_0m_0+z'_0n_0=J; \qquad (25)$$

т. е. относительный моментъ каждой пары сопряженныхъ векторовъ равенъ также инварьянту, или: объемъ тетраэдра, построеннаго на каждой парѣ сопряженныхъ векторовъ, какъ на противуположныхъ ребрахъ, равенъ $^1/_6$ инварьянта, т. е. постояненъ (теорема Шаля); и такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ J отлично отъ нуля, то (§ 4) пара сопряженныхъ векторовъ лежитъ на непересѣкающихся и непараллельныхъ прямыхъ.

Всѣ векторы пространства, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію (24), составляютъ *комплексъ векторовъ*, притомъ *перваго порядка*, такъ какъ уравненіе (25) линейно относительно координатъ вектора.

---

[1]) I. Plücker. Fundamental Views regarding Mechanics. Phil. Transactions. 1866. Vol. 156. p. 369.

§ 9. Прежде чѣмъ заняться изученіемъ распредѣленія въ пространствѣ векторовъ, входящихъ въ комплексъ, преобразуемъ его уравненіе къ болѣе простому виду, воспользовавшись формулами (9), (10) и (8) преобразованія координатъ [1]). Однако мы будемъ сначала предполагать, что хотя одинъ изъ коэффиціентовъ X, Y, Z отличенъ отъ нуля, отложивъ разборъ того случая, когда главный векторъ равенъ нулю, до § 18. Повернемъ координатныя оси вокругъ оси Oz на уголъ φ. Чтобы получить уравненіе комплекса, отнесенное къ новымъ осямъ, нужно въ уравненіи (24) подставить вмѣсто координатъ вектора ихъ значенія по формулѣ (9); тогда получимъ, отбрасывая значки ($'$):

$$(L\cos\varphi+M\sin\varphi)x_0+(-L\sin\varphi+M\cos\varphi)y_0+Nz_0+$$
$$+(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)l_0+(-X\sin\varphi+Y\cos\varphi)m_0+Zn_0=J. \quad (26)$$

Опредѣлимъ уголъ φ такъ, чтобы коэффиціентъ при m_0 обратился въ нуль; для чего положимъ:

$$tg\varphi=\frac{Y}{X}; \quad (27)$$

тогда уравненіе (24) приметъ видъ:

$$L'x_0+M'y_0+N'z_0+X'l_0+Z'n_0=J, \quad (28)$$

гдѣ:

$$L'=\frac{LX+MY}{\sqrt{X^2+Z^2}},\quad M'=\frac{MX-LY}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad N'=N$$

$$X'=\sqrt{X^2+Y^2},\quad Z'=Z.$$

Повернемъ опять новыя оси вокругъ новой оси Oy на уголъ

[1]) Plücker. Neue Geometrie des Raumes. Leipzig. 1868. p. 40

ψ и воспользуемся уравненіями (10); тогда, отбросивъ значки (') при координатахъ прямой, получимъ:

$$(L'\cos\psi - N'\sin\psi)x_0 + (L'\sin\psi + N'\cos\psi)z_0 + M'y_0 +$$
$$+ (X'\cos\psi - Z'\sin\psi)l_0 + (X'\sin\psi + Z'\cos\psi)n_0 = J \quad (29)$$

Уголъ ψ выбираемъ такъ, чтобы:

$$tg\,\psi = \frac{X'}{Z'}; \quad (30)$$

тогда уравненіе (24) принимаетъ видъ:

$$L''x_0 + M''y_0 + N''z_0 + Z''n_0 = J, \quad (31)$$

гдѣ:

$$L'' = \frac{L'Z' - N'X'}{\sqrt{X'^2 + Z'^2}} = \frac{JZ - R^2 N}{R\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$M'' = M' = \frac{MX - LY}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad N'' = \frac{L'X' + N'Z'}{\sqrt{X'^2 + Z'^2}} = \frac{J}{R}$$

$$Z'' = R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Первое изъ сдѣланныхъ преобразованій невозможно, если имѣемъ одновременно:

$$X = Y = 0,$$

но тогда уравненіе (24) имѣетъ уже видъ уравненія (31).

Затѣмъ перенесемъ начало координатъ въ точку $(a, b, 0)$, для чего воспользуемся формулами (8); тогда получимъ:

$$(L'' - Z''b)x_0 + (M'' + Z''a)y_0 + N''z_0 + Z''n_0 = J; \quad (32)$$

положимъ:

$$a = -\frac{M''}{Z''} = -\frac{MX - LY}{R\sqrt{X^2+Y^2}},$$

$$b = \frac{L''}{Z''} = \frac{JZ - R^2 N}{R^2\sqrt{X^2+Y^2}};$$

тогда уравненіе (32) обратится въ такое:

$$J.z_0 + R^2.n_0 = J.R \tag{33}$$

Формулы, связующія новыя координаты (x_0', $y'_0 \ldots$) какой либо прямой со старыми, будутъ слѣдующія:

$$x_0 = (z'_0 \sin\psi + x'_0 \cos\psi)\cos\varphi - y'_0 \sin\varphi$$
$$y_0 = (z'_0 \sin\psi + x'_0 \cos\psi)\sin\varphi + y'_0 \cos\varphi$$
$$z_0 = z'_0 \cos\psi - x'_0 \sin\psi$$
$$l_0 = [(l'_0 + bz'_0)\cos\psi + (n'_0 + ay'_0 - bx'_0)\sin\psi]\cos\varphi - (m'_0 - az'_0)\sin\varphi$$
$$m_0 = (m'_0 - az'_0)\cos\varphi + [(l'_0 + bz'_0)\cos\psi - (n'_0 + ay'_0 - bx'_0)\sin\psi]\sin\varphi$$
$$n_0 = (n'_0 + ay'_0 - bx'_0)\cos\psi - (l'_0 + bz'_0)\sin\psi.$$

§ 10. Для полученія старыхъ координатъ новой оси Oz нужно въ этихъ формулахъ положить:

$$x'_0 = y'_0 = l'_0 = m'_0 = n'_0 = 0;$$

что касается до координаты z'_0, то ей можно приписать любое, отличное отъ нуля, значеніе, напр.

$$z'_0 = R;$$

тогда получимъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = z'_0 \sin\psi\cos\varphi = X,\ l_0 = (b\cos\psi\cos\varphi + a\sin\varphi)z'_0 = L - pX \\ y_0 = z'_0 \sin\psi\sin\varphi = Y,\ m_0 = -(a\cos\varphi - b\cos\psi\sin\varphi)z'_0 = M - pY \\ z_0 = z'_0 \cos\psi = Z,\ n_0 = -b\sin\psi . z'_0 = N - pZ \end{array}\right\} \tag{34}$$

$$p=\frac{J}{R}=\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}. \qquad (35)$$

Такъ какъ координаты z_0 и n_0 не мѣняются какъ при вращеніи координатныхъ осей вокругъ оси Oz, такъ и при перенесеніи начала въ какую-либо точку оси Oz, то отъ такихъ преобразованій не мѣняетъ своего вида и ур. (33), т. е: каждый векторъ комплекса останется таковымъ, если комплексъ векторовъ будетъ перемѣщенъ параллельно новой оси Oz или поворочевъ вокругъ этой оси на нѣкоторый уголъ.

Выбравъ сообразно этому оси координатъ, обозначимъ черезъ X', Y', Z'.... новыя координаты системы векторовъ; тогда моментъ системы относительно какого-либо изъ сопряженныхъ векторовъ будетъ:

$$J=L'x_0+M'y_0+N'z_0+X'l_0+Y'm_0+Z'n_0;$$

Но ур. (33) даетъ при тѣхъ-же осяхъ:

$$J=\frac{J}{R}z_0+R.n_0;$$

Сравнивая оба значенія инварьянта, получаемъ:

$$L'=0, \quad M'=0, \quad N'=\frac{J}{R},$$
$$X'=0, \quad Y'=0, \quad Z'=R.$$

Эти равенства показываютъ, что какъ главный векторъ, такъ и главный моментъ, направлены по оси Oz. Обозначивъ черезъ R_0 и G_0 главный векторъ и главный моментъ, соотвѣтствующіе новой оси Oz, будемъ имѣть по ур. (18):

$$J=G_0.R_0,$$

и ур. (33) можно написать:

$$G_0 z_0 + R_0 n_0 = G_0 R_0. \tag{36}$$

Новая ось Oz называется *центральною осью* системы векторовъ, и положеніе ея относительно произвольныхъ осей координатъ опредѣляется уравненіями (34).

§ 11. Переходя теперь къ вопросу о распредѣленіи сопряженныхъ векторовъ въ пространствѣ, замѣчаемъ, что если въ ур. (24) или въ ур. (36) подставимъ вмѣсто координатъ вектора ихъ выраженія (2), то получимъ уравненія:

$$L(x-x_1)+M(y-y_1)+N(z-z_1)+X(y_1 z-z_1 y)+$$
$$+Y(z_1 x-x_1 z)+Z(x_1 y-y_1 x)=J, \tag{37}$$

$$G_0(z-z_1)+R_0(x_1 y-y_1 x)=G_0 R_0, \tag{38}$$

линейныя относительно координатъ точки $(x\,y\,z)$; такъ-что, если, оставляя точку $(x_1 y_1 z_1)$ неподвижной, будемъ мѣнять положеніе точки $(x\ y\ z)$, то она опишетъ нѣкоторую плоскость, которую назовемъ буквою P, и уравненіе которой есть ур. (37) или ур. (38), если ось Oz направлена по центральной оси. Такимъ образомъ, черезъ каждую точку пространства проходитъ безчисленное множество векторовъ, которые могутъ быть приняты за одинъ изъ двухъ сопряженныхъ; концы ихъ лежатъ въ одной плоскости. Наименьшимъ изъ этихъ векторовъ, очевидно, будетъ тотъ, который направленъ по перпендикуляру изъ точки A_1 (фиг. 2) на плоскость P; длина его опредѣлится легко изъ ур. (38) и равна:

$$\frac{G_0 R_0}{\sqrt{(x_1^2+y_1^2)R_0^2+G_0^2}}.$$

Приравнявъ это выраженіе какой-либо постоянной, получимъ геометрическое мѣсто точекъ A_1, для которыхъ этотъ векторъ—minimum имѣетъ одно и то-же значеніе: это прямой круглый цилиндръ, ось котораго совпадаетъ съ центральной осью.

Отыщемъ положеніе вектора $A_2 B_2$, сопряженнаго вектору $A_1 B_1$, проходящему черезъ точку A_1. Обозначивъ черезъ r_1 длину вектора $A_1 B_1$, а черезъ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — углы его съ осями координатъ. получимъ слѣдующія значенія для его координатъ:

$$r_1 \cos\alpha_1 \quad , \quad r_1 \cos\beta_1 \quad , \quad r_1 \cos\gamma_1 ,$$
$$r_1(y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1) , r_1(z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1) , r_1(x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1).$$

Координаты вектора $A_2 B_2$ получимъ по формуламъ (22)

$$X - r_1 \cos\alpha_1 \quad , \quad Y - r_1 \cos\beta_1 \quad , \quad Z - r_1 \cos\gamma_1 ,$$
$$L - r_1(y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1) \; , \; M - r_1(z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1) ,$$
$$N - r_1(x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1).$$

Уравненія прямой, на которой лежитъ этотъ векторъ будутъ по формуламъ (5) слѣдующія:

$$y(Z - r_1 \cos\gamma_1) = z(Y - r_1 \cos\beta_1) + L - r_1(y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1),$$
$$z(X - r_1 \cos\alpha_1) = x(Z - r_1 \cos\gamma_1) + M - r_1(z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1),$$
$$x(Y - r_1 \cos\beta_1) = y(X - r_1 \cos\alpha_1) + N - r_1(x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1),$$

или

$$zY - yZ + L = r_1 \cos\gamma_1 (y_1 - y) - r_1 \cos\beta_1 (z_1 - z),$$
$$xZ - zX + M = r_1 \cos\alpha_1 (z_1 - z) - r \cos\gamma_1 (x_1 - x),$$
$$yX - xY + N = r_1 \cos\beta_1 (x_1 - x) - r_1 \cos\alpha_1 (y_1 - y).$$

Умноживъ эти уравненія послѣдовательно съ одной стороны на $(x_1 - x)$, $(y_1 - y)$, $(z_1 - z)$ и сложивъ, съ другой стороны — на $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ и опять сложивъ, получимъ искомую прямую, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей:

$$L(x - x_1) + M(y - y_1) + N(z - z_1) + X(y_1 z - z_1 y) +$$
$$+ Y(z_1 x - x_1 z) + Z(x_1 y - y_1 x) = 0 , \qquad (39)$$

$$L\cos\alpha_1+M\cos\beta_1+N\cos\gamma_1+X(y\cos\gamma_1-z\cos\beta_1)+$$
$$+Y(z\cos\alpha_1-x\cos\gamma_1)+Z(x\cos\beta_1-y\cos\alpha_1)=0\,; \quad (40)$$

изъ нихъ первая, проходящая черезъ точку A_1 и, какъ показываетъ сравненіе ея уравненія съ ур. (38), параллельная плоскости P, называется *полярною плоскостью* точки A_1; мы обозначимъ ее буквою P_1. Такъ какъ ур. (39) совершенно не зависитъ отъ угловъ α_1, β_1, γ_1, то мы можемъ сказать: векторы, сопряженные проходящимъ черезъ какую-либо точку, лежатъ въ одной плоскости, проходящей черезъ эту точку, полярной плоскости этой точки.

Какъ-бы дополняя эту теорему, ур. (40), зависящее только отъ направленія вектора A_1B_1, но не отъ координатъ его точекъ, говоритъ: векторы, сопряженные пучку параллельныхъ векторовъ лежатъ въ одной плоскости; и такъ какъ имѣемъ тождественно:

$$(Z\cos\beta_1-Y\cos\gamma_1)\cos\alpha_1+(X\cos\gamma_1-Z\cos\alpha_1)\cos\beta_1+$$
$$+(Y\cos\alpha_1-X\cos\beta_1)\cos\gamma_1=0,$$
$$(Z\cos\beta_1-Y\cos\gamma_1)X+(X\cos\gamma_1-Z\cos\alpha_1)Y+$$
$$(Y\cos\alpha_1-X\cos\beta_1)Z=0,$$

то эта плоскость параллельна какъ пучку параллельныхъ векторовъ, такъ и центральной оси; она можетъ быть поэтому разсматриваема какъ полярная плоскость безконечно удаленной точки вектора A_1B_1. Полярныя плоскости безконечно удаленныхъ точекъ параллельны центральной оси.

§ 12. Пусть $A_1M_1=R_1$ (фиг. 2) — перпендикуляръ на плоскость P, и $A'_1M'_1=R_2$—векторъ, сопряженный ему. Пріймемъ A_1M_1 за ось Oz, перпендикуляръ $A_1A'_1$—за ось Ox; абсциссу точки A'_1 назовемъ черезъ q; тогда, такъ какъ система векторовъ эквивалентна векторамъ A_1M_1 и $A'_1M'_1$, то

$$X=0,\ Y=R_2,\ Z=R_1,\ L=0,\ M=0,\ N=R_2q.$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (39) и (40) и положивъ въ нихъ кромѣ того: $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ и $z = 0$, мы приведемъ ихъ къ виду:

$$z=0,\quad R_2 q \cos\gamma_1 - R_2 x \cos\gamma_1 + R_1(x \cos\beta_1 - y \cos\alpha_1) = 0. \qquad (41)$$

Это суть уравненія прямой, по которой направленъ векторъ A_2B_2, сопряженный съ A_1B_1. Пусть A_1B_1 сохраняетъ свою величину, т. е. перемѣщается по конусу, ось котораго A_1M_1, а радіусъ основанія равенъ M_1B_1, тогда прямая A_2B_2 будетъ перемѣщаться въ плоскости P_1, обертывая коническое сѣченіе. Для доказательства, приписавъ къ ур. (41) соотношеніе:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 = \sin^2\gamma_1, \qquad (42)$$

продифференцируемъ ихъ, разсматривая α_1 и β_1, какъ перемѣнные параметры:

$$\sin\beta_1 \cos\beta_1 \,.\, d\beta_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 \,.\, d\alpha_1 = 0,$$

$$-x \sin\beta_1 \,.\, d\beta_1 + y \sin\alpha_1 \,.\, d\alpha_1 = 0;$$

исключивъ отсюда $d\alpha_1$ и $d\beta_1$, получаемъ уравненіе:

$$\begin{vmatrix} \cos\beta_1, & \cos\alpha_1 \\ -x, & y \end{vmatrix} = 0, \qquad (43)$$

которое вмѣстѣ съ ур. (41) и (42) послужатъ для опредѣленія искомой обертки. Ур. (41) и (43) даютъ:

$$\cos\alpha_1 = \frac{R_2 . y(q-x)\cos\gamma_1}{R_1(x^2+y^2)},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{-R_2 . x(q-x)\cos\gamma_1}{R_1(x^2+y^2)};$$

подставивъ эти значенія въ ур. (42), получимъ:

$$R_1^2 tg^2 \gamma_1 (x^2+y^2) - R_2^2 (q-x)^2 = 0. \qquad (44)$$

Такъ какъ $R_1 \, tg\gamma_1$ есть радіусъ основанія конуса, то это уравненіе представитъ эллипсъ или гиперболу, смотря по тому, которое изъ двухъ неравенствъ имѣетъ мѣсто:

$$M_1 B_1 > R_2 \text{ или } M_1 B_1 < R_2.$$

Оба ряда кривыхъ, соотвѣтствующихъ различнымъ γ_1, раздѣляются параболой, для которой

$$M_1 B_1 = R_1 tg \gamma_1 = R_2. \text{ [1]}$$

Ур. (44) отнесено къ одному изъ фокусовъ, какъ къ началу;

$$x = q \qquad (45)$$

есть уравненіе поляры начала, т. е директрисы, которая, какъ видимъ, совпадаетъ съ векторомъ R_2. Такимъ образомъ, система кривыхъ втораго порядка (44), соотвѣтствующихъ различнымъ γ_1, имѣетъ общую директрису и общій фокусъ.

При $\gamma_1 = 0$ коническое сѣченіе обращается въ прямую (45), которую можно разсматривать, какъ предѣлъ гиперболъ; при $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$ получаемъ начало координатъ, какъ предѣлъ эллипсовъ.

§ 13. Пріймемъ центральную ось за ось Oz; тогда между координатами двухъ сопряженныхъ векторовъ будутъ существовать соотношенія:

$$\left.\begin{array}{lll} x_0 + x'_0 = 0\ , & y_0 + y'_0 = 0\ , & z_0 + z'_0 = R_0 \\ l_0 + l'_0 = 0\ , & m_0 + m'_0 = 0\ , & n_0 + n'_0 = G_0 \end{array}\right\} \qquad (46)$$

[1]) I. Franke. Über geometrische Eigenschaften von Kräfte—und Rotationssystemen in Verbindung mit Linien-complexen. Sitzungsberichte der Mathem. classe der Akademie der Wissensch. Wien. 1882. Bd. LXXXIV. II Abth. p. 5⁰5.

Обозначивъ черезъ (a, b) и (a', b') координаты точекъ пересѣченія тѣхъ прямыхъ, на которыхъ лежатъ векторы, съ плоскостью (xOy), будемъ имѣть:

$$x_0 = x - a\ ,\quad l_0 = bz_0\ ;\quad x'_0 = x' - a'\ ,\quad l'_0 = b'z'_0\ ;$$
$$y_0 = y - b\ ,\quad m_0 = -az_0\ ;\quad y'_0 = y' - b'\ ,\quad m'_0 = -a'z'_0\ ;$$

откуда:

$$a = -\frac{m_0}{z_0},\qquad b = \frac{l_0}{z_0},$$
$$a' = -\frac{m'_0}{z'_0},\qquad b' = \frac{l'_0}{z'_0};$$

и на основаніи ур. (46)

$$a:b = a':b',$$

т. е. точки (a, b) и (a', b') лежатъ на одной прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Но начало координатъ можетъ лежать гдѣ-нибудь на оси Oz, слѣдовательно: *всякая* плоскость, перпендикулярная къ центральной оси, пересѣкаетъ оба сопряженныхъ вектора въ точкахъ, лежащихъ на прямой, пересѣкающей эту ось.

Изъ тѣхъ-же ур. (46) слѣдуетъ, что:

$$y_0 : x_0 = y'_0 : x'_0,$$

т. е. проэкціи сопряженныхъ векторовъ на плоскость, перпендикулярную къ центральной оси, параллельны между собою; кратчайшее разстояніе между векторами параллельно слѣдовательно этой плоскости, а значитъ пересѣкаетъ (по предъидущей теоремѣ) центральную ось подъ прямымъ угломъ.

Обозначимъ черезъ δ и δ_1 кратчайшія разстоянія, а черезъ φ и φ_1 углы между центральною осью и каждымъ изъ

сопряженныхъ векторовъ. Если r и r_1 суть длины этихъ векторовъ, то

$$n_0 = -r \sin\varphi . \delta \quad , \quad z_0 = r \cos\varphi \ ,$$
$$n'_0 = -r_1 \sin\varphi_1 . \delta_1 \quad , \quad z'_0 = r_1 \cos\varphi_1 \ ;$$

изъ ур. (46) слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} \delta r \cos\varphi &= \sqrt{l^2_0 + m^2_0} = \sqrt{l'^2_0 + m'^2_0} = \delta_1 r_1 \cos\varphi_1 \ , \\ r \sin\varphi &= \sqrt{x^2_0 + y^2_0} = \sqrt{x'^2_0 + y'^2_0} = r_1 \sin\varphi_1 \ ; \end{aligned} \qquad (47)$$

и, раздѣляя второе равенство на первое, получимъ:

$$\delta : \delta_1 = tg\,\varphi : tg\,\varphi_1 \ ,$$

т. е кратчайшее разстояніе между двумя сопряженными векторами раздѣляется центральною осью на части, пропорціональныя тангенсамъ угловъ наклоненія этихъ векторовъ съ осью.

§ 14. Мы видѣли, что черезъ каждую точку A_1 пространства проходитъ безчисленное множество отрѣзковъ прямыхъ, которые могутъ быть приняты за одинъ изъ двухъ сопряженныхъ векторовъ, и что величина какого-либо изъ нихъ равна отрѣзку, заключенному между точкою A_1 и плоскостью P, параллельной полярной плоскости точки A_1. Прямыя, проходящія черезъ точку A_1 и лежащія въ самой полярной плоскости этой точки не могутъ быть приняты за одинъ изъ сопряженныхъ векторовъ. Такъ какъ точка A_1 была взята совершенно произвольно, то мы можемъ сказать:

Черезъ каждую точку пространства проходитъ безчисленное множество прямыхъ, на которыхъ не могутъ лежать сопряженные векторы; онѣ лежатъ въ полярныхъ плоскостяхъ этихъ точекъ, образуя пучки лучей перваго порядка. Лучи, такъ распредѣленные въ пространствѣ, составляютъ такъ называемый *комплексъ лучей* 1-го порядка.

Мы получимъ уравненіе комплекса, если введемъ въ ур. (39) координаты прямой:

$$Lx_0 + My_0 + Nz_0 + Xl_0 + Ym_0 + Zn_0 = 0. \qquad (48)$$

Это уравненіе показываетъ, что моментъ системы векторовъ относительно каждаго луча комплекса есть нуль.

Такъ какъ между коэффиціентами этого уравненія не существуетъ никакихъ соотношеній, то оно есть самое общее однородное уравненіе первой степени относительно координатъ прямой; въ однородности заключается его различіе отъ ур. (37), которое, будучи неоднородно относительно координатъ (x_0, y_0, ...), есть самое общее уравненіе первой степени относительно координатъ вектора.

Такъ какъ ур. (48) имѣетъ тѣ-же коэффиціенты при перемѣнныхъ, что и ур. (37), то, будучи одновременно съ послѣднимъ преобразовано къ центральной оси векторовъ, пріиметъ видъ:

$$G_0 z_0 + R_0 n_0 = 0. \qquad (49)$$

Центральная ось векторовъ по отношенію къ комплексу лучей называется центральною осью комплекса, а дробь:

$$\frac{G_0}{R_0} = p \qquad (50)$$

—*параметромъ* центральной оси или параметромъ комплекса. Введя параметръ въ ур. (49), получаемъ его въ видѣ:

$$n_0 + pz_0 = 0, \text{[1]} \qquad (51)$$

[1]) Такой видъ имѣетъ ур. комплекса въ предположеніи, что ось Oz направлена по центр. оси; если-бы съ центр. осью совпадала не ось Oz, а ось Ox или Oy, то мы имѣли бы одну изъ слѣдующихъ формъ:

$$l_0 + px_0 = 0$$
$$m_0 + py_0 = 0$$

или:

$$x_1 y - y_1 x + p(z - z_1) = 0. \tag{52}$$

Мы знаемъ, что черезъ каждую точку пространства проходитъ пучекъ лучей 1-го порядка, принадлежащій комплексу и лежащій въ полярной плоскости этой точки. Можно показать, что и обратно: въ каждой плоскости пространства лежитъ пучекъ 1-го порядка лучей комплекса. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе всякой плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

можно представить въ видѣ:

$$p \cdot \frac{B}{C} y - \left[\frac{-p \cdot A}{C}\right] x + p \left[z - \left(\frac{-D}{C}\right)\right] = 0;$$

сравнивая это уравненіе съ ур. (52), получаемъ координаты центра пучка:

$$x_1 = p \cdot \frac{B}{C}, \ y_1 = -p \cdot \frac{A}{C}, \ z_1 = -\frac{D}{C};$$

центръ пучка называется *полюсомъ* плоскости; онъ безконечно удаленъ, если коэффиціентъ C равенъ нулю, т. е. если плоскость параллельна центральной оси комплекса.

Такимъ образомъ, линейный комплексъ перваго порядка устанавливаетъ между точками и плоскостями пространства такое соотвѣтствіе, что каждой точкѣ (полюсу) соотвѣтствуетъ проходящая черезъ нее плоскость (полярная), и каждой плоскости (полярной)—лежащая на ней точка (полюсъ). Пространственную систему, въ которой установлено такое соотвѣтствіе между точками и плоскостями, называютъ ***нуль-системой*** [1]).

---

[1]) Это названіе далъ Möbius, впервые разсматривавшій такую систему, и объясняется оно тѣмъ, что черезъ каждую точку такой системы проходитъ и

Будемъ перемѣщать точку A_1 (фиг. 2) вдоль прямой $A_1 B_1$; полярная плоскость постоянно проходитъ черезъ векторъ $A_2 B_2$, сопряженный вектору $A_1 B_1$. Двѣ прямыя, на которыхъ лежатъ два сопряженныхъ вектора, называются *сопряженными полярами комплекса.* Итакъ:

Полярныя плоскости точекъ одной изъ двухъ сопряженныхъ поляръ проходятъ черезъ вторую; а слѣдовательно: полюсы плоскостей, проходящихъ черезъ одну изъ сопряженныхъ поляръ, суть точки пересѣченія ихъ со второй.

Мы знаемъ кромѣ того, что если одна изъ двухъ сопряженныхъ поляръ вращается вокругъ точки, то ей сопряженная перемѣщается въ полярной плоскости этой точки. Легко доказать, что и обратно: если одна изъ сопряженныхъ поляръ перемѣщается въ плоскости, то другая проходитъ черезъ полюсъ этой плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, пусть a и b—двѣ прямыя, проходящія черезъ полюсъ A_1 плоскости P_1, а a' и b'—имъ сопряженныя, лежащія въ плоскоски P_1. Беремъ въ плоскости P_1 произвольную прямую c', пересѣкающую a' и b' въ A' и B'. Такъ какъ A' лежитъ на a', то ея полярная плоскость проходитъ черезъ a; точно также полярная плоскость точки B' проходитъ черезъ b. Эти двѣ плоскости опредѣляютъ своимъ пересѣченіемъ прямую c, сопряженную съ c' и проходящую черезъ A_1.

Каждая прямая, пересѣкающая пару сопряженныхъ поляръ, есть лучъ комплекса, ибо точка пересѣченія его съ одной изъ нихъ есть полюсъ плоскости, опредѣляемой лучемъ и второй полярой.

Лучъ комплекса, пересѣкающій одну изъ сопряженныхъ поляръ, пересѣкаетъ и вторую, ибо какъ лучъ, такъ и вторая поляра лежатъ въ полярной плоскости точки пересѣченія луча съ первой полярой.

въ каждой плоскости лежитъ пучекъ лучей 1-го порядка, относительно которыхъ моментъ системы векторовъ есть нуль. Ср. Möbius. Lehrbuch der Statik. Leipzig. 1837. II Th. p. 145.

Принявъ оси координатъ такими-же, какъ въ § 12, получимъ для уравненія прямой, образующей съ осями координатъ углы α_1, β_1, 0:

$$z=0 \qquad x\cos\beta_1 - y\cos\alpha_1 = 0;$$

Такой-же видъ пріиметъ и ур. (41), представляющее прямую сопряженную; слѣдовательно: каждый лучъ комплекса можетъ быть разсматриваемъ какъ пара совпадающихъ поляръ.

Положимъ въ ур. (40):

$$\alpha_1 = \beta_1 = 90^\circ;$$

тогда оно пріиметъ видъ:

$$N + Xy - Yx = 0; \tag{53}$$

и если предположимъ, что ось Oz направлена по центральной оси, то

$$X = Y = 0,$$

и уравненіе (53) представитъ безконечно удаленную плоскость; т. е. прямымъ, параллельнымъ оси комплекса, соотвѣтствуютъ, какъ сопряженныя поляры, прямыя безконечно удаленныя; полярныя плоскости точекъ такой прямой, пересѣкаясь по сопряженной полярѣ, должны представлять пучекъ параллельныхъ плоскостей. Прямыя, параллельныя оси комплекса, называются его *діаметрами*, а полярныя плоскости точекъ діаметра—*діаметральными плоскостями*, соотвѣтствующими этому діаметру. Прямая, проходящая черезъ полюсъ какой-либо плоскости и параллельная центральной оси, есть діаметръ этой плоскости.

Ур. (52) даетъ для угла λ, образованнаго нормалью къ плоскости съ соотвѣтствующимъ ей діаметромъ или съ центральною осью, выраженіе:

$$Cos\lambda = \frac{p}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + p^2}}; \qquad (54)$$

этотъ уголъ равенъ нулю только тогда, когда

$$x_1 = y_1 = 0,$$

т. е. ось комплекса есть единственный діаметръ, перпендикулярный къ соотвѣтствующимъ діаметральнымъ плоскостямъ. Обозначивъ черезъ ρ разстояніе точки A_1 отъ оси комплекса, получимъ изъ ур. (54)

$$\rho . cotg\lambda = p, \qquad (55)$$

т. е. полярныя плоскости точекъ, равноотстоящихъ отъ оси комплекса, одинаково наклонены къ послѣдней; онѣ обертываютъ конусъ, вершина котораго лежитъ на центральной оси, а уголъ при вершинѣ котораго увеличивается съ приближеніемъ точекъ къ оси и равенъ 90^0 для точекъ, лежащихъ на самой оси; здѣсь конусъ обращается въ діаметральную плоскость.

Уравненіе (39) даетъ для полярной плоскости начала $(x_1 = y_1 = z_1 = 0)$:

$$Lx + My + Nz = 0; \qquad (56)$$

эта плоскость параллельна плоскости пары, получающейся при приведеніи системы векторовъ къ началу координатъ; а такъ какъ начало координатъ есть произвольная точка, то: при приведеніи системы векторовъ къ какой-либо точкѣ—главный векторъ параллеленъ центральной оси, а главный моментъ параллеленъ нормали къ полярной плоскости точки приведенія.

§ 15 Посмотримъ, какъ напишется уравненіе комплекса, если принять какой-либо діаметръ за ось Oz, а соотвѣтствующую діаметральную плоскость—за плоскость xOy.

Въ ур. (51) будемъ считать ось Oy направленной по кратчайшему разстоянію OO' (фиг. 3) между осью и какимъ-либо діаметромъ $O'z'$. Сохраняя направленіе осей, перенесемъ начало координатъ изъ O въ O'; обозначивъ OO' черезъ ρ и замѣнивъ въ ур. (51) координату n_0 на $n'_0 - \rho x'_0$, z_0 на z'_0, получимъ:

$$n'_0 - \rho x'_0 + pz'_0 = 0; \tag{57}$$

оставляя оси Oz' и Oy' на своихъ мѣстамъ, замѣнимъ ось $O'x'$ осью $O'x''$, образующей съ $O'x'$ уголъ λ; тогда плоскость $y'O'x''$ будетъ діаметральной для діаметра $O'z'$. Новыя координаты x, y, z будутъ связаны со старыми помощью уравненій:

$$x' = x \cos\lambda \ , \ z' = z + x \sin\lambda \ , \ y' = y;$$

слѣдовательно:

$$x'_0 = x_0 \cos\lambda \ , \ z'_0 = z_0 + x_0 \sin\lambda \ , \ n'_0 = n_0 \cos\lambda;$$

эти значенія подставимъ въ ур. (57), отчего оно пріиметъ видъ:

$$n_0 + (-\rho + p\,tg\lambda)\,x_0 + \frac{p}{\cos\lambda}\,z_0 = 0$$

или, такъ какъ ур. (55) имѣетъ мѣсто, то получимъ:

$$n_0 + p'z_0 = 0, \tag{58}$$

гдѣ

$$p' = p : \cos\lambda. \tag{59}$$

Величину p' называютъ *параметромъ діаметра* и откладываютъ на нормали къ діаметральной плоскости. По ур. (59) параметръ центральной оси есть проэкція на эту ось параметра какого-либо діаметра. Параметръ p центральной оси есть наименьшій изъ всѣхъ параметровъ. Параметру діаметра можно дать иное выраженіе; по уравненію (18):

$$R.G.Cos(R,G) = R_0.G_0,$$

но:

$$R=R_0, \angle(R,G)=\lambda,$$

слѣдовательно:

$$\frac{G}{R} cos\,\lambda = \frac{G_0}{R_0} = p;$$

сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ (59), находимъ:

$$p' = G:R,$$

гдѣ R и G элементы приведенія къ какой-либо точкѣ діаметра.

§ 16. Пусть OC (фиг. 4)—ось комплекса, A_1C_1—одинъ изъ его лучей, δ—кратчайшее разстояніе, а φ—уголъ между центральной осью и лучемъ A_1C_1. Если отложимъ на лучѣ A_1C_1 гдѣ-нибудь отрѣзокъ, равный единицѣ, то координаты n_0 и z_0 луча могутъ быть положены равными:

$$n_0 = \delta sin\varphi, \quad z_0 = cos\varphi;$$

подставивъ эти значенія въ уравненіе комплекса

$$n_0 + pz_0 = 0,$$

получимъ его въ видѣ:

$$\delta.tg\varphi = -p. \qquad (60)$$

Такимъ образомъ, всѣ лучи, отстоящіе отъ оси комплекса на одинаковомъ разстояніи δ, образуютъ съ нею одинъ и тотъ-же уголъ, — свойство, принадлежащее, какъ извѣстно, касательнымъ къ обыкновеннымъ винтовымъ линіямъ, начертаннымъ на прямомъ кругломъ цилиндрѣ, ось котораго совпадаетъ съ осью комплекса, а радіусъ основанія равенъ δ. Итакъ:

Всѣ лучи комплекса суть касательныя къ винтовымъ линіямъ, нанесеннымъ на прямые круглые цилиндры, оси кото-

рыхъ совпадаютъ съ осью комплекса, а радіусы основанія увеличиваются отъ нуля до безконечности.

Если въ ур. (60) p положительно для одного какого-либо луча, то оно будетъ положительнымъ для всѣхъ лучей: слѣдовательно: всѣ винтовыя линіи вьются въ одну и туже сторону: вправо при $p<0$ и—влѣво при $p>0$.

Если обозначимъ черезъ h высоту хода винта на цилиндрѣ, радіусъ котораго равенъ единицѣ, то:

$$h = 2\pi . cotg\varphi = \frac{2\pi}{p} . \tag{61}$$

При $p=0$ ур. (60) даетъ:

$$\delta = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = 0,$$

т. е. лучи комплекса пересѣкаютъ ось. Такъ какъ

$$p = G_0 : R_0,$$

то главный моментъ на центральной оси равенъ нулю, такъ что система векторовъ эквивалентна одному вектору. Уравненіе комплекса, отнесенное къ центральной оси, принимаетъ видъ:

$$n_0 = 0. \tag{62}$$

Итакъ, не только система векторовъ опредѣляетъ комплексъ лучей 1-го порядка, но и каждый векторъ въ отдѣльности; причемъ въ послѣднемъ случаѣ этотъ векторъ будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ центральною осью комплекса. Такого рода комплексы называются *особенными*. Уравненіе (62) показываетъ, что особый комплексъ состоитъ изъ лучей, пересѣкающихъ его ось.

§ 17. Благодаря описанному въ предыдущемъ § свойству центральной оси—служить осью всѣмъ винтовымъ линіямъ, касательныя къ которымъ суть лучи комплекса, эту центральную ось съ нанесеннымъ на ней отрѣзкомъ, равнымъ параметру

комплекса, называютъ *винтомъ* [1]) комплекса, или просто винтомъ. Прямая, на которой лежитъ отрѣзокъ, равный параметру, есть *ось* винта, а отрѣзку на ней приписываютъ то или другое направленіе, выражаемое стрѣлкой, смотря по знаку параметра. Когда параметръ равенъ нулю, то винтъ и его ось суть одно и тоже. Винтъ вполнѣ опредѣляетъ собою комплексъ лучей перваго порядка, центральная ось котораго совпадаетъ съ осью винта, а параметръ—равенъ параметру винта.

Каждую систему векторовъ мы будемъ опредѣлять центральною осью, съ которой будемъ соединять опредѣленный главный векторъ R_0 и главный моментъ G_0. Такъ какъ центральная ось совпадаетъ съ осью винта комплекса, опредѣленнаго этой системой векторовъ, а параметръ винта

$$p = G_0 : R_0 ,$$

то система векторовъ будетъ также опредѣлена, если извѣстенъ винтъ и главный векторъ R_0; тогда

$$G_0 = p \cdot R_0 .$$

Сообщивъ винту главный векторъ, равный единицѣ, будемъ обозначать координаты опредѣленной такимъ образомъ системы векторовъ черезъ:

$$X, Y, Z, L, M, N, \tag{62}$$

причемъ:

$$X^2+Y^2+Z^2=1, \quad p=LX+MY+NZ;$$

шесть величинъ (62) будемъ называть *координатами винта*. Координаты оси винта даются формулами (34):

$$\begin{aligned} x_0=X \quad , \quad & y_0=Y \quad , \quad z_0=Z , \\ l_0=L-pX , \quad & m_0=M-pY , \quad n_0=N-pZ ; \end{aligned} \tag{63}$$

если $p=0$, то координаты винта суть координаты его оси.

[1]) Cp. Ball. R. The Theory of Screws. Dublin. 1876. p. 1

Мы будемъ обозначать винты различными знаками, напр. винтъ (C), и тогда этотъ знакъ будетъ сопровождать его координаты, параметръ и проч.: $X_C, \ldots N_C$, p_C и проч.

Координаты какой-либо системы векторовъ будутъ извѣстны, если извѣстны координаты винта, ею опредѣленнаго, и главный векторъ R. Мы будемъ имѣть для этихъ координатъ:

$$R.X,\ R.Y,\ R.Z,\ R.L,\ R.M,\ R.N \tag{64}$$

и

$$G = R.p$$

Систему векторовъ, опредѣленную винтомъ (C) и главнымъ векторомъ R, мы будемъ обозначать черезъ (C, R).

§ 18. До сихъ поръ мы предполагали, что при приведеніи системы векторовъ къ какой-либо точкѣ O главный векторъ R былъ отличенъ отъ нуля. Останавливаясь на послѣднемъ случаѣ, замѣчаемъ, что, какъ показываютъ формулы преобразованія координатъ въ § 5, главный векторъ при приведеніи ко всякой точкѣ будетъ нуль, главный-же моментъ остается себѣ геометрически равнымъ. Центральная ось, совпадающая съ главнымъ моментомъ, не имѣетъ опредѣленнаго положенія въ пространствѣ. Если принять какую-либо плоскость, перпендикулярную къ центральной оси, за плоскость xOy, то уравненіе комплекса пріиметъ видъ:

$$z_0 = 0.$$

Комплексъ состоитъ изъ лучей, лежащихъ какъ-нибудь въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ центральной оси. Ось винта совпадаетъ съ центральною осью, а его параметръ, равный отношенію $G:R$, безконечно великъ. Наложивъ на ось винта моментъ, равный единицѣ, назовемъ его проэкціи на произвольныхъ осяхъ координатъ черезъ

$$L,\ M,\ N,$$

причемъ:

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1.$$

Координаты винта будутъ:

$$0,\ 0,\ 0,\ L,\ M,\ N,$$

а координаты системы векторовъ, приводящейся къ парѣ момента G, суть:

$$0,\ 0,\ 0,\ G.L,\ G.M,\ G.N.$$

§ 19. Подъ *относительнымъ моментомъ двухъ винтовъ* (C) и (Γ), имѣющихъ координаты:

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N,$$
$$\Xi,\ \mathrm{H},\ \mathrm{Z},\ \Lambda,\ \mathrm{M},\ \mathrm{N},$$

подразумѣвается выраженіе:

$$2\Omega_{c,\Gamma} = L\Xi + M\mathrm{H} + N\mathrm{Z} + X\Lambda + Y\mathrm{M} + Z\mathrm{N}. \qquad (65)$$

Пусть p и π—параметры винтовъ (C) и (Γ), φ—уголъ, d—кратчайшее разстояніе между ними. Принявъ ось винта (C) за ось Oz, а линію кратчайшаго разстоянія—за ось Ox, получимъ:

$$L = M = X = Y = 0, \qquad N = p, \quad Z = 1,$$
$$\mathrm{Z} = \cos\varphi, \qquad \mathrm{N} = \pi\cos\varphi + d\sin\varphi,$$

и относительный моментъ будетъ:

$$2\Omega_{c,\Gamma} = (p + \pi)\cos\varphi + d\sin\varphi;\ [1] \qquad (66)$$

[1]) F. Klein. Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten. Math. Annalen Bd. II. p. 368 Сравнивая выраженія (66) и (65), заключаемъ, что выраженіе (65) независитъ отъ начала и направленія осей координатъ, а потому относительный моментъ справедливо названъ Klein'омъ совмѣстнымъ инварьянтомъ двухъ комплексовъ.

при $p=\pi=0$ относительный моментъ двухъ винтовъ обращается въ относительный моментъ ихъ осей (ср. § 4):

$$d \sin \varphi.$$

Положивъ въ выраженіи (66):

$$\pi = p, \quad \varphi = 0, \quad d = 0,$$

получимъ относительный моментъ двухъ винтовъ, оси которыхъ совпадаютъ, а параметры равны между собою:

$$2 . \Omega_{c,c} = 2p, \tag{67}$$

т. е. онъ равенъ двойному параметру.

Относительный моментъ двухъ винтовъ, изъ которыхъ одинъ безконечно большаго параметра, безконечно великъ.

Помноживъ относительный моментъ винтовъ (C) и (Γ) на произведеніе $R . P$, получимъ выраженіе, называемое относительнымъ моментомъ двухъ системъ векторовъ (C, R) и (Γ, P); очевидно, онъ равенъ суммѣ моментовъ первой системы векторовъ относительно всѣхъ векторовъ второй системы.

§ 20. Два винта, относительный моментъ которыхъ равенъ нулю, называются *взаимными* [1]).

a) На одинъ лучъ комплекса (C) наложимъ отрѣзокъ r_k и обозначимъ координаты полученнаго вектора черезъ:

$$\xi_k, \ \eta_k, \ \zeta_k, \ \lambda_k, \ \mu_k, \ \nu_k;$$

и такъ какъ векторъ лежитъ на лучѣ комплекса (C), то имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$L\xi_k + M\eta_k + N\zeta_k + X\lambda_k + Y\mu_k + Z\nu_k = 0 \tag{68}$$

---

[1]) О комплексахъ двухъ взаимныхъ винтовъ Klein говоритъ, что они находятся въ *инволюціи*; см. F. Klein. Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. Math. An. Bd. II. p. 201.

Если тоже самое сдѣлаемъ для многихъ или даже для всѣхъ лучей комплекса и просуммируемъ выраженія, подобныя (77), то получимъ:

$$L\Sigma\xi_k + M\Sigma\eta_k + N\Sigma\zeta_k + X\Sigma\lambda_k + Y\Sigma\mu_k + Z\Sigma\nu_k = 0. \quad (69)$$

Раздѣлимъ лѣвую часть этого уравненія на главный векторъ опредѣленной такимъ образомъ системы векторовъ, винтъ которой обозначимъ черезъ (Γ); тогда ур. (69) обратится въ такое:

$$\Omega_{c,\Gamma} = 0, \quad (70)$$

т. е. система векторовъ, лежащая на лучахъ комплекса, опредѣленнаго какимъ-либо винтомъ, даетъ винтъ, взаимный съ даннымъ.

b) Обратно: каждый винтъ (Γ), взаимный съ другимъ— (C), можно считать опредѣленнымъ системой векторовъ, лежащей на лучахъ комплекса (C).

Дѣйствительно, возьмемъ лучъ комплекса (C), не принадлежащій вмѣстѣ съ тѣмъ къ комплексу (Γ); его можно принять въ такомъ случаѣ за одну изъ сопряженныхъ поляръ послѣдняго комплекса. Если обозначимъ черезъ $(\xi_k, \eta_k, \ldots.)$ координаты какого-либо вектора (r_k), лежащаго на этомъ лучѣ, то координаты вектора $(r_{k'})$, сопряженнаго, опредѣлятся по формуламъ (22):

$$\xi_k + \xi_{k'} = \Xi, \ldots\ldots\ldots \nu_k + \nu_{k'} = \mathrm{N}; \quad (71)$$

а такъ какъ координаты вектора (r_k) удовлетворяютъ уравненію вида (68), то, воспользовавшись ур. (71), получимъ:

$$L\xi_{k'} + \ldots + N\nu_{k'} = \Omega_{c,\Gamma} = 0,$$

т. е. векторъ $(r_{k'})$ лежитъ также на лучѣ комплекса (C)[1].

---

[1]) I. Сомовъ. Раціональная механика. Кинематика. Петербургъ. 1872 стр. 375.

Глава II.

Группы винтовъ. Косыя координаты винта.

§ 21. Пусть имѣемъ $n \leqslant 6$ винтовъ: $(1) \ldots (n)$, координаты которыхъ:

$$\begin{array}{l} X_1\,,\; Y_1\,,\; Z_1\,,\; L_1\,,\; M_1\,,\; N_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n\,,\; Y_n\,,\; Z_n\,,\; L_n\,,\; M_n\,,\; N_n\,; \end{array} \tag{72}$$

если нельзя подобрать n такихъ величинъ:

$$R_1\,, R\,, \ldots R_n\,, \tag{73}$$

которыя не всѣ были-бы нулями, чтобы имѣть тождественно:

$$\begin{array}{l} R_1 X_1 + R_2 X_2 + \ldots + R_n X_n = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_1 N_1 + R_2 N_2 + \ldots + R_n N_n = 0\,, \end{array} \tag{74}$$

то n винтовъ $(1), \ldots (n)$ считаются *независимыми* [1]). Для независимости n винтовъ (72) необходимо и достаточно, чтобы хотя одинъ опредѣлитель n-аго порядка изъ группы:

---

[1]) Если среди этихъ винтовъ есть винты безконечно большаго параметра, то три первыхъ координаты каждаго изъ нихъ суть нули, и тогда соотвѣтствующая постоянная R_k замѣняется черезъ G_k.

$$\begin{Vmatrix} X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n, Y_n, Z_n, L_n, M_n, N_n \end{Vmatrix} \qquad (75)$$

былъ отличенъ отъ нуля.

Величины $R_1, R_2, \ldots R_n$ можно разсматривать какъ главные векторы на винтахъ $(1), \ldots (n)$; тогда

$$\begin{matrix} R_1 . X_1, \ldots R_1 . N_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_n . X_n, \ldots R_n . N_n \end{matrix}$$

будутъ координаты n системъ векторовъ: $(1, R_1)$, $(2, R_2)$.. ..(n, R_n). Въ томъ случаѣ когда n винтовъ независимы, нельзя подобрать такъ величины главныхъ векторовъ (не полагая ихъ всѣхъ равными нулямъ), чтобы система векторовъ, состоящая изъ этихъ n системъ, была эквивалентна нулю.

Сообщивъ нашимъ n независимымъ винтамъ главные векторы $R_1, \ldots R_n$ и разсматривая эти n системъ какъ одну, *результирующую*, обозначимъ ее черезъ $(n+1, -R_{n+1})$; координаты ея опредѣлятся изъ уравненій:

$$\begin{matrix} R_1 X_1 + \ldots + R_n X_n + R_{n+1} X_{n+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_1 N_1 + \ldots + R_n N_n + R_{n+1} N_{n+1} = 0. \end{matrix} \qquad (74_1)$$

Оставивъ безъ измѣненія координаты винтовъ $(1), (2) \ldots (n)$, будемъ мѣнять главные векторы $R_1 \ldots R_n$, тогда будетъ мѣняться система $(n + 1, - R_{n+1})$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и результирующій винтъ $(n+1)$. Всѣ эти винты $(n+1)$, соотвѣтствующіе различнымъ значеніямъ величинъ $R_1, \ldots R_n$, составляютъ *n—членную группу винтовъ*, опредѣленную n независимыми винтами $(1), \ldots (n)$, которые называются въ этомъ

случаѣ *основными*; винты-же $(n+1)$ считаются *входящими въ* n*—членную группу* [1]). Въ этомъ случаѣ всѣ опредѣлители $(n+1)$-го порядка изъ группы

$$\left\| \begin{matrix} X_1 \,, \ldots\ldots N_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n+1} \,, \ldots\ldots N_{n+1} \end{matrix} \right\|$$

будутъ нулями.

Умноживъ ур. (74_1) послѣдовательно на L_k, M_k, N_k, X_k, Y_k, Z_k, гдѣ $k \leqslant n+1$, и сложивъ, получимъ

$$R_1\Omega_{1,k}+R_2\Omega_{2,k}+\ldots+R_{k-1}\Omega_{k-1,k}+R_k p_k+R_{k+1}\Omega_{k+1,k}+\ldots$$
$$+R_{n+1}\Omega_{n+1,k}=0\,,$$

и такихъ уравненій всего $n+1$. Исключивъ изъ нихъ $R_1, \ldots R_{n+1}$, получимъ:

$$\begin{vmatrix} p_1 & , \ \Omega_{1,2} & , \ldots & \Omega_{1,n+1} \\ \Omega_{2,1} & , \ p_2 & , \ldots\ldots & \Omega_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_{n+1,1} & , \ \Omega_{n+1,2} & , \ldots & p_{n+1} \end{vmatrix}=0\,,$$

соотношеніе между параметромъ всякаго винта $(n+1)$, входящаго въ n-членную группу, и его моментами относительно всѣхъ основныхъ винтовъ группы [2]).

При $n=6$ ур. (74_1) даютъ для каждаго седьмаго винта одну систему значеній отношеній $\frac{R_1}{R_7}, \ldots \frac{R_6}{R_7}$; откуда слѣ-

[1]) Термины: независимые, основные, входящіе въ группу — будутъ относиться также къ комплексамъ, опредѣленнымъ винтами.

[2]) Въ частномъ случаѣ, когда параметры всѣхъ винтовъ нули, получаемъ опредѣлитель Sylverter'a. Cp. Sylvester. Note sur l'involution de six lignes dans l'espace. Comptes rendus, T. 52, p. 815.

дуетъ, что есть только шесть независимыхъ винтовъ, всякій-же седьмой винтъ входитъ въ группу, ими образованную.

Для изслѣдованія распредѣленія въ пространствѣ винтовъ, составляющихъ n-членную группу, напишемъ уравненіе одного комплекса группы:

$$\Omega_{n+1}=L_{n+1}x_0+M_{n+1}y_0+N_{n+1}z_0+X_{n+1}l_0+Y_{n+1}m_0+Z_{n+1}n_0=0,$$

или:

$$R_1\,\Omega_1 + R_2\,\Omega_2 + \ldots + R_n\,\Omega_n = 0\,, \tag{76}$$

и изслѣдуемъ распредѣленіе винтовъ комплексовъ (76), соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ величинъ $R_1, \ldots R_n$. Эти изслѣдованія, составляющія содержаніе этой главы, будутъ значительно упрощены, если будетъ доказано, что n основныхъ винтовъ могутъ быть замѣнены какими-либо другими n независимыми винтами изъ входящихъ въ группу.

При доказательствѣ будемъ пользоваться комплексами, опредѣляющими винты. Докажемъ, что если вмѣсто комплексовъ

$$\Omega_1 = 0\,, \ldots\ \Omega_n = 0 \tag{77}$$

возьмемъ какихъ-либо другихъ n независимыхъ изъ входящихъ въ группу, напр. комплексы:

$$\left.\begin{array}{l} R_{11}\,\Omega_1 + \ldots + R_{1n}\,\Omega_n = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{1n}\,\Omega_1 + \ldots + R_{nn}\,\Omega_n = 0\,, \end{array}\right\} \tag{78}$$

и примемъ ихъ за n основныхъ комплексовъ, то новая n-членная группа будетъ состоять изъ тѣхъ-же комплексовъ, что и группа (76). Умноживъ ур. (78) на произвольныя постоянныя $R_1' \ldots R_n'$ и сложивъ, получимъ уравненіе новой n-членной группы; если она тождественна съ группой (76), то должны имѣть мѣсто уравненія:

$$R'_1 R_{11} + R'_2 R_{21} + \ldots + R'_n R_{n1} = R_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R'_1 R_{1n} + R'_2 R_{2n} + \ldots + R'_n R_{nn} = R_n;$$

и всегда можно подобрать постоянныя $R'_1, \ldots R'_n$, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, если только опредѣлитель:

$$\delta = \begin{vmatrix} R_{11}, \ldots & R_{n1} \\ \ldots & \ldots \\ R_{1n}, \ldots & R_{n1} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля. Остается доказать, что онъ дѣйствительно отличенъ отъ нуля, если какъ комплексы (77), такъ и комплексы (78) независимы. Если комплексы (78) независимы, то не всѣ опредѣлители n-аго порядка изъ группы:

$$\left\| \begin{matrix} R_{11}X_1 + R_{12}X_2 + \ldots + R_{1n}X_n, \ldots & R_{11}N_1 + R_{12}N_2 + \ldots + R_{1n}N_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ R_{n1}X_1 + R_{n2}X_2 + \ldots + R_{nn}X_n, \ldots & R_{n1}N_1 + R_{n2}N_2 + \ldots + R_{nn}N_n \end{matrix} \right\| \quad (79)$$

суть нули. Но каждый опредѣлитель n-аго порядка изъ этой группы можетъ быть представленъ въ видѣ произведенія изъ опредѣлителя δ на соотвѣтствующій опредѣлитель изъ группы (75); и такъ какъ послѣдніе опредѣлители не всѣ нули, то опредѣлитель δ будетъ тогда и только тогда отличенъ отъ нуля, когда не всѣ опредѣлители n-аго порядка изъ группы (70) суть нули, т. е. когда комплексы (78) независимы

Двучленная группа.

§ 22. Пусть имѣемъ два винта (a) и (b) съ комплексами

$$\Omega_a = 0 \qquad \Omega_b = 0. \qquad (80)$$

Сообщивъ имъ главные векторы R_a и R_b, найдемъ результирующій винтъ съ комплексомъ

$$R_a \Omega_a + R_b \Omega_b = 0. \tag{81}$$

Положеніе и параметръ p этого винта

$$p = \frac{(R_a L_a + R_b L_b)(R_a X_a + R_b X_b) + \ldots + (R_a N_a + R_b N_b)(R_a Z_a + R_b Z_b)}{(R_a X_a + R_b X_b)^2 + \ldots + (R_a Z_a + R_b Z_b)^2} \tag{82}$$

находятся въ зависимости отъ величинъ R_a и R_b. Рѣшивъ уравненіе:

$$p = 0 \tag{83}$$

относительно отношенія $R_a : R_b$, получимъ, вообще говоря, два дѣйствительныхъ и различныхъ корня, которые послѣ подстановки въ ур. (81) дадутъ уравненія особыхъ комплексовъ группы.

Пусть $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ (фиг. 5) оси этихъ комплексовъ, особые винты группы; $A_1 A_2 = 2\Delta$ — кратчайшее разстояніе, O —его средина, 2φ — уголъ между прямыми $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$; xOy—плоскость, перпендикулярная къ $A_1 A_2$.

Спроектируемъ прямыя $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ на плоскость xOy и направимъ ось Ox по биссектору остраго угла между проэкціями этихъ прямыхъ. Координаты осей особыхъ винтовъ суть:

$$\begin{matrix} \cos\varphi, & \sin\varphi, & 0, & -\Delta\sin\varphi, & \Delta\cos\varphi, & 0,\text{[1]} \\ \cos\varphi, & -\sin\varphi, & 0, & -\Delta\sin\varphi, & -\Delta\cos\varphi, & 0, \end{matrix} \tag{84}$$

---

[1]) Изъ всѣхъ возможныхъ опредѣлителей 2-го порядка группы

$$\left\Vert \begin{matrix} \cos\varphi, & \sin\varphi, & 0, & -\Delta\sin\varphi, & \Delta\cos\varphi, & 0 \\ \cos\varphi, & -\sin\varphi, & 0, & -\Delta\sin\varphi, & -\Delta\cos\varphi, & 0 \end{matrix} \right\Vert$$

будутъ только четыре, не равныхъ тождественно нулю; они имѣютъ значенія:

$$-\sin 2\varphi, \quad -2\Delta\cos^2\varphi, \quad -2\Delta\sin^2\varphi, \quad \Delta\sin 2\varphi,$$

а уравненія особыхъ комплексовъ:

$$\begin{aligned} -\Delta \sin\varphi \,.\, x_0 + \Delta \cos\varphi \,.\, y_0 + \cos\varphi \,.\, l_0 + \sin\varphi \,.\, m_0 = 0, \\ -\Delta \sin\varphi \,.\, x_0 - \Delta \cos\varphi \,.\, y_0 + \cos\varphi \,.\, l_0 - \sin\varphi \,.\, m_0 = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Помноживъ эти уравненія соотвѣтственно на R_1, R_2 и сложивъ, получимъ уравненіе двучленной группы комплексовъ въ видѣ:

$$-\Delta\, tg\varphi (R_1 + R_2) x_0 + \Delta (R_1 - R_2) y_0 + (R_1 + R_2) l_0 + \\ + tg\varphi (R_1 - R_2) m_0 = 0 \;,$$

или:

$$-\Delta\, tg\varphi \,.\, x_0 + l_0 + \lambda (\Delta y_0 + tg\varphi \,.\, m_0) = 0, \quad (86)$$

гдѣ:

$$\lambda = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$$

Параметръ какого-либо винта:

$$p = \frac{-\Delta\, tg\varphi + \lambda^2 tg\varphi \,.\, \Delta}{1 + \lambda^2 tg^2 \varphi} = -\Delta\, tg\varphi \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2 tg^2 \varphi}, \quad (87)$$

а координаты его оси пропорціональны величинамъ (63):

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \;, & y_0 &= \lambda\, tg\varphi \;, & z_0 &= 0, \\ l_0 &= -\Delta\, tg\varphi - p \;, & m_0 &= \lambda\Delta - p\lambda\, tg\varphi \;, & n_0 &= 0, \end{aligned}$$

или, подставляя вмѣсто p его значеніе изъ (87):

откуда видно, что особые винты будутъ независимы, если не имѣемъ одновременно:

$$\Delta = 0 \;, \quad \varphi = 0,$$

или

$$\Delta = 0 \;, \quad \varphi = \pi \;,$$

т. е. когда оба особыхъ винта, не лежатъ на одной прямой.

$$x_0=1\,,\qquad y_0=\lambda\, tg\varphi\,,\qquad z_0=0,$$

$$l_0=\frac{-\Delta\, tg\varphi}{1+\lambda^2 tg^2\varphi}\lambda^2(1+tg^2\varphi)\,,\quad m_0=\frac{\lambda\Delta}{1+\lambda^2 tg^2\varphi}(1+tg^2\varphi),\quad n_0=0.$$

Воспользовавшись наконецъ ур. (5), получаемъ уравненіе оси винта:

$$y=\lambda\, tg\varphi\,.\,x\,,\qquad z=\frac{\lambda\Delta}{(1+\lambda^2 tg^2\varphi)\cos^2\varphi}\,. \tag{88}$$

Второе изъ этихъ уравненій показываетъ, что всѣ винты, входящіе въ группу, пересѣкаютъ ось Oz подъ прямыми углами. Въ плоскости xOy лежатъ два винта, ибо $z=0$ при $\lambda=0$ и при $\lambda=\infty$; соотвѣтственно этимъ значеніямъ λ имѣемъ изъ перваго уравненія:

$$y=0 \quad \text{и} \quad x=0\,;$$

эти два винта направлены по нашимъ осямъ координатъ Ox и Oy, слѣд. взаимно перпендикулярны; ихъ параметры, p_1 и p_2, соотвѣтствующіе, какъ легко видѣть изъ ур. (87), maximum'у minimum'у p, найдутся изъ ур. (87), полагая въ немъ $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$:

$$p_1=-\Delta\, tg\varphi\,,\quad p_2=\frac{\Delta}{tg\varphi}\,. \tag{89}$$

Исключивъ λ изъ ур. (88), получимъ поверхность 3-го порядка:

$$z=\frac{\Delta\,.\,xy}{\sin\varphi\cos\varphi\,(x^2+y^2)}\,, \tag{90}$$

которую Cayley назвалъ *цилиндроидомъ*, представляющую геометрическое мѣсто всѣхъ винтовъ, входящихъ въ двучленную группу [1]).

[1]) Plücker. N. Geometrie d. Raumes §§ 81, 82, 86, 89.

Такъ какъ изъ ур. (89) слѣдуетъ, что:

$$p_2 - p_1 = \frac{\Delta}{\sin\varphi\cos\varphi}, \qquad (91)$$

то уравненію поверхности можно еще дать видъ:

$$z = \frac{(p_2 - p_1)xy}{x^2 + y^2}. \qquad (92)$$

§ 23. Для изслѣдованія поверхности и закона распредѣленія по винтамъ параметровъ представляется полезнымъ ввести уголъ ψ наклоненія образующей съ осью Ox:

$$y : x = tg\psi = \lambda\, tg\varphi = \lambda \sqrt{-\frac{p_1}{p_2}};$$

откуда:

$$\lambda = -\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} \cdot tg\psi, \quad tg\varphi = \sqrt{-\frac{p_1}{p_2}};$$

далѣе имѣемъ:

$$\Delta = \sqrt{-p_1 p_2}.$$

Подставляя всѣ эти значенія въ ур. (87) и (92), получимъ:

$$p = p_1 \cos^2\psi + p_2 \sin^2\psi, \qquad (93)$$

$$z = \frac{p_2 - p_1}{tg\psi + ctg\psi} = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\sin 2\psi. \qquad (94)$$

Ур. (94) даетъ для каждаго значенія ψ разстояніе образующей, т. е. винта, отъ плоскости xOy, а ур. (93)—параметръ этого винта.

При $\psi=0$ имѣемъ $z=0$, чему соотвѣтствуетъ винтъ, лежащій на оси Ox, съ параметромъ p_1; при увеличеніи ψ отъ 0

до $arc.tg\sqrt{-\frac{p_1}{p_2}}$ ордината z мѣняется отъ нуля до $\Delta=\sqrt{-p_1p_2}$, и винтъ, соотвѣтствующій послѣднему значенію ψ, имѣетъ параметръ, равный нулю. Maximum'у z соотвѣтствуетъ $\psi=\frac{\pi}{4}$, когда $p=\frac{1}{2}(p_1+p_2)$. При дальнѣйшемъ возрастаніи ψ ордината z убываетъ, образующая приближается къ плоскости xOy, пересѣкая подъ прямыми углами ось Oz въ прежнихъ точкахъ, но образуя съ своими прежними положеніями въ нихъ углы, мѣняющіеся отъ точки къ точкѣ. Ур. (94) показываетъ, что z сохраняетъ прежнее значеніе, когда ψ увеличивается на уголъ $\frac{\pi}{2}-2\psi$; это и есть слѣдовательно уголъ между двумя образующими, пересѣкающими ось Oz въ одной и той-же точкѣ; величина его зависитъ отъ наклоненія первой образующей съ осью Ox и равна $\frac{\pi}{2}$ при $\psi=0$; соотвѣтствующій винтъ направленъ по оси Oy, и его параметръ равенъ p_2. Два винта, изъ которыхъ одинъ лежитъ на оси Ox, другой — на оси Oy, называются *главными винтами*, а ихъ параметры—*главными параметрами.*

При дальнѣйшемъ возрастаніи ψ отъ $\frac{\pi}{2}$ ордината z мѣняетъ знакъ, образующая переходитъ по другую сторону плоскости xOy. При $\psi=arc.tg-\sqrt{-\frac{p_1}{p_2}}$ ордината z равна $-\Delta$, образующая совпадаетъ съ осью втораго особаго винта и т. д., вообще, какъ показываетъ ур. (94), угламъ ψ и $\frac{\pi}{2}+\psi$ соотвѣтствуютъ равныя по абсолютной величинѣ, но противуположныя по знаку ординаты.

Законъ распредѣленія параметровъ по образующимъ поверхности представится особенно легко, если построить кониче-

ское сѣченіе, оси котораго лежали-бы на осяхъ Ox и Oy и были-бы обратно пропорціональны величинамъ: $\sqrt{p_1}$ и $\sqrt{p_2}$. Обозначивъ черезъ $\sqrt{k}$ коэффиціентъ пропорціональности, получаемъ уравненіе коническаго сѣченія въ видѣ:

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 = k. \tag{95}$$

Длина радіуса вектора ρ, образующаго съ осью Ox уголъ ψ, опредѣляется уравненіемъ:

$$\rho^2 = \frac{k}{p_1 \cos^2\psi + p_2 \sin^2\psi} = \frac{k}{p},$$

откуда:

$$p = \frac{k}{\rho^2}, \quad ^{1})$$

т. е. параметръ какой-либо образующей поверхности обратно пропорціоналенъ квадрату параллельнаго ей радіуса вектора коническаго сѣченія. Прямая Oz, пересѣкаемая всѣми образующими, называется *директрисой* поверхности. Она есть двойная линія поверхности и имѣетъ съ ней общій отрѣзокъ, равный $p_2 - p_1$.

§ 24. Lewis указалъ на слѣдующее кинематическое происхожденіе цилиндроида [2]):

Представимъ себѣ нѣкоторую плоскость, равномѣрно вращающуюся вокругъ оси Oz; въ этой плоскости лежитъ кругъ

---

[1]) Ball. § 20. Для представленія закона распредѣленія параметровъ Plücker откладываетъ на каждой производящей цилиндроида отъ точки пересѣченія ея съ директрисой отрѣзокъ, равный параметру; полученная кривая (*характеристичная кривая конгруенціи*) можетъ быть разсматриваема какъ сѣченіе цилиндроида нѣкоторымъ цилиндромъ 6-го порядка.

[2]) Lewis. T. C. On the Cylindroid. Messenger of Mathematics. Vol. IX. p. 1.

(фиг. 6) радіуса $CP=\frac{1}{2}(p_2-p_1)$, центръ котораго отстоитъ на разстояніи $OC=\frac{1}{2}(p_2+p_1)$ отъ оси вращенія. Въ то время какъ плоскость равномѣрно вращается вокругъ оси Oz, нѣкоторая точка P движется также равномѣрно по окружности круга, но съ удвоенною угловою скоростью. Если изъ каждаго положенія точки P будемъ опускать перпендикуляры на ось вращенія, то ихъ геометрическое мѣсто и есть цилиндроидъ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть плоскость повернулась на уголъ ψ отъ нѣкотораго начальнаго своего положенія xOz, а точка P подвинулась по окружности въ сторону, указанную на фигурѣ стрѣлкой, на дугу AP; тогда $\angle\ PCA=\psi$ и

$$OS=PM=z=PC.Sin\,2\psi=\frac{1}{2}(p_2-p_1)\,Sin\,2\psi\,,$$

$$y:x=tg\psi\,.$$

Далѣе, какъ видно изъ фигуры,

$$PS=MO=OC-CM=\frac{1}{2}(p_2+p_1)-\frac{1}{2}(p_2-p_1)\cos 2\psi=$$

$$=p_1\cos^2\psi+p_2\sin^2\psi=p\,,$$

т. е. разстояніе движущейся точки отъ оси вращенія равно параметру.

§ 25. 1) Уголъ φ между особыми винтами можетъ равняться нулю; тогда ур. (88) принимаютъ видъ:

$$y=0\quad,\quad z=\lambda\Delta,$$

и цилиндроидъ обращается въ пучекъ прямыхъ, лежащихъ въ плоскости xOz и параллельныхъ оси Ox. Уравненіе (86) двучленной группы, принимающее форму:

$$l_0 + \lambda \Delta y_0 = 0, \tag{96}$$

показываетъ, что параметры всѣхъ винтовъ суть нули, за исключеніемъ того, который соотвѣтствуетъ значенію $\lambda = \infty$ въ ур. (96); это одинъ изъ главныхъ винтовъ; онъ имѣетъ безконечно-большой параметръ, и его ось параллельна оси Oy.

Изъ этого слѣдуетъ, что случай этотъ возможенъ или тогда, когда оба основные винта (a) и (b) параллельны и имѣютъ параметры, равные нулю, или когда параметръ одного изъ нихъ равенъ нулю, а другаго—безконечно-великъ, и оба винта взаимно перпендикулярны.

2) При $\Delta = 0$ цилиндроидъ обращается въ плоскость xOy, а его образующія суть лучи, выходящіе изъ начала координатъ; параметры всѣхъ винтовъ суть нули.

Этотъ случай возможенъ лишь тогда, когда оба данные винта пересѣкаются и имѣютъ параметры, равные нулю.

§ 26. Разсмотримъ теперь, какъ измѣнятся полученные результаты въ томъ случаѣ, когда корни ур. (83) мнимы. Тогда пара мнимыхъ, но сопряженныхъ корней этого уравненія, будучи подставлена въ ур. (82), дастъ пару мнимыхъ и сопряженныхъ особыхъ комплексовъ; координаты центральныхъ осей послѣднихъ будутъ также мнимыми и сопряженными. Уравненія линіи кратчайшаго разстоянія между парой мнимыхъ и сопряженныхъ прямыхъ дѣйствительны, слѣдовательно координаты точекъ пересѣченія ея съ осями особыхъ комплексовъ будутъ мнимы и сопряженны. Средина кратчайшаго разстоянія, точка O, имѣетъ своими координатами дѣйствительныя количества; а само кратчайшее разстояніе есть величина чисто-мнимая.

Дѣйствительными будутъ также прямыя, проходящія черезъ точку O и дѣлящія пополамъ углы между парой мнимыхъ и сопряженныхъ прямыхъ, осей особыхъ комплексовъ. Мы сможемъ, слѣдовательно, принять точку O за начало координатъ,

а эти биссекторы—за оси Ox и Oy, вышеупомянутое кратчайшее разстояніе—за ось Oz. Такъ какъ тангенсъ угла между парой мнимыхъ и сопряженныхъ прямыхъ есть величина чисто-мнимая, то мы вправѣ заключить, что и въ этомъ случаѣ ур. (86) представитъ уравненіе двухчленной группы, если только будемъ давать произвольной постоянной λ чисто-мнимыя значенія. Ур. (89) и (92) показываютъ, что какъ главные параметры, такъ и цилиндроидъ дѣйствительны.

§ 27. Если обозначимъ черезъ p_a и p_b параметры основныхъ комплексовъ группы (81), то уравненіе (83) можетъ быть написано въ формѣ:

$$p_a\left(\frac{R_a}{R_b}\right)^2 + 2\Omega_{a,b}\left(\frac{R_a}{R_b}\right) + p_b = 0,$$

и оно имѣетъ равные корни, когда

$$\Omega_{a,b}^2 = p_a p_b. \qquad (97)$$

Предположивъ, что этотъ случай имѣетъ мѣсто, будемъ имѣть въ числѣ винтовъ двучленной группы только одинъ особый, и методъ, принятый въ § 22, примѣненъ быть не можетъ. Не трудно доказать однако, что всѣ результаты, полученные раньше, остаются въ силѣ, съ тою только разницей, что одинъ изъ главныхъ винтовъ на цилиндроидѣ есть именно винтъ съ параметромъ равнымъ нулю, т. е. особый [1]).

Пріймемъ этотъ особый винтъ и другой какой-либо (c) за основные винты группы; тогда ур. (97) приведется къ виду:

$$p_c \cos\varphi + d \sin\varphi = 0,$$

т. е. всѣ винты, входящіе въ группу, взаимны съ особымъ винтомъ. Сравнивая это уравненіе съ ур. (60), заключаемъ, что

[1]) Plucker. N. G. d. R. § 67.

особый винтъ есть общій лучъ всѣхъ комплексовъ, входящихъ въ группу. Принявъ его ось за ось Ox, а кратчайшее разстояніе между нимъ и винтомъ (c)—за ось Oz, будемъ имѣть координаты винтовъ Ox и (c) [1]:

$$\begin{array}{llllll} 1\ , & 0\ , & 0, & 0, & 0, & 0, \\ \cos\varphi, & -\sin\varphi, & 0, & p_c\cos\varphi+d\sin\varphi=0, & -p_c\sin\varphi+d\cos\varphi=-\dfrac{p_c}{\sin\varphi}, & 0, \end{array}$$

и уравненія ихъ комплексовъ:

$$l_0=0\ ,\quad p_c y_0-\sin\varphi\cos\varphi\, l_0+\sin^2\varphi\, m_0=0.$$

Умноживъ первое изъ этихъ уравненій на $\sin\varphi\cos\varphi$ и придавъ ко второму, находимъ уравненіе еще одного комплекса группы:

$$p_c y_0+\sin^2\varphi\, m_0=0\ ,$$

показывающее, что въ группѣ есть одинъ винтъ, лежащій на оси Oy съ параметромъ $p_2=\dfrac{p_c}{\sin^2\varphi}$. Уравненіе двучленной группы будетъ:

$$\lambda l_0+m_0+p_2 y_0=0\ ;$$

отсюда найдемъ параметръ винта,

$$p=\frac{p_2}{1+\lambda^2},$$

а затѣмъ и уравненія его оси:

$$x=y\lambda\quad ,\quad z=\frac{p_2\lambda}{1+\lambda^2}\ ;$$

послѣ исключенія λ, получимъ уравненіе цилиндроида:

$$z=\frac{p_2 xy}{x^2+y^2}\ .$$

---

[1]) Координаты винта будутъ браться въ порядкѣ: X, Y, Z, L, M, N, а координаты оси винта—въ порядкѣ: x_0, y_0, z_0, l_0, m_0, n_0.

§ 28. Мы только отмѣтимъ остальные случаи, какіе могутъ встрѣтиться при рѣшеніи ур. (83) и которые могутъ быть легко изслѣдованы отдѣльно:

a) Знаменатель лѣвой части можетъ быть тождественно равенъ нулю; тогда оба винта (*a*) и (*b*) безконечно-большаго параметра.

Всѣ винты группы имѣютъ параметры безконечно-большіе и лежатъ какъ-нибудь въ плоскостяхъ, параллельныхъ винтамъ (*a*) и (*b*).

b) Параметръ одного изъ данныхъ винтовъ, напр. p_a, безконечно-великъ, между тѣмъ какъ параметръ другаго имѣетъ конечное значеніе. Въ группѣ и есть только одинъ винтъ (*a*) съ параметромъ безконечно-большимъ; вообще-же въ группѣ можно найти винтъ любаго параметра; всѣ винты конечныхъ параметровъ параллельны винту (*b*) и лежатъ въ одной плоскости, проходящей черезъ этотъ винтъ и перпендикулярной къ плоскости винтовъ (*b*) и (*a*).

c) Знаменатель ур. (83) можетъ обращаться въ нуль при томъ-же значеніи отношенія $R_a : R_b$, при которомъ обращается въ нуль и числитель. Если это значеніе дѣйствительно, то:

$$X_a : X_b = Y_a : Y_b = Z_a : Z_b,$$

т. е. основные винты между собою параллельны.

Всѣ винты конечныхъ параметровъ лежатъ въ плоскости винтовъ (*a*) и (*b*) и параллельны послѣднимъ; среди параметровъ есть одинъ, равный нулю, и другой безконечно-большой, лежащій на оси, перпендикулярной къ плоскости винтовъ (*a*) и (*b*); вообще-же въ группѣ можно найти винтъ любаго параметра.

d) Числитель можетъ обратиться въ нуль при двухъ мнимыхъ значеніяхъ, при которыхъ обращается въ нуль и знаменатель. Въ этомъ случаѣ числитель пропорціоналенъ знамена-

телю. Обозначивъ черезъ d кратчайшее разстояніе между осями (a) и (b), черезъ φ уголъ между ними, черезъ k коэффиціентъ пропорціональности, будемъ имѣть:

$$p=k=p_a=p_b\ ,\ (p_a+p_b)\cos\varphi+d\sin\varphi=2\,k\cos\varphi\,;$$

откуда получаемъ $d=0$, т. е. основные винты пересѣкаются, и параметры ихъ равны между собою. Всѣ винты группы, имѣя равные параметры, проходятъ черезъ точку пересѣченія винтовъ (a) и (b).

§ 29. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что когда оба данные винта имѣютъ конечные параметры, не параллельны, а въ случаѣ ихъ взаимнаго пересѣченія имѣютъ разные параметры, мы получаемъ цилиндроидъ, какъ геометрическое мѣсто винтовъ группы. Очень важно поэтому умѣть строить эту поверхность непосредственно по двумъ даннымъ винтамъ.

Очевидно, что главными винтами поверхность вполнѣ опредѣляется; посмотримъ, какимъ образомъ, имѣя какіе-либо два винта, построить оба главныхъ. Пусть p_a и p_b—параметры какихъ-либо двухъ винтовъ, h кратчайшее разстояніе, σ уголъ между ними, z_a и z_b разстоянія ихъ отъ точки пересѣченія главныхъ винтовъ, λ и μ углы, образованные ими съ главнымъ винтомъ параметра p_1. По формуламъ (93) и (94) имѣемъ:

$$p_a=p_1\cos^2\lambda+p_2\sin^2\lambda\ ,\ z_a=\frac{1}{2}(p_2-p_1)\sin 2\lambda\ ,\ \lambda-\mu=\sigma\,;$$

$$p_b=p_1\cos^2\mu+p_2\sin^2\mu\ ,\ z_b=\frac{1}{2}(p_2-p_1)\sin 2\mu\ ,\ z_a-z_b=h\,.$$

Изъ этихъ уравненій получаемъ:

$$h=z_a-z_b=\frac{1}{2}(p_2-p_1)(\sin 2\lambda-\sin 2\mu)=(p_2-p_1)\cos(\lambda+\mu)\sin(\lambda-\mu)$$

$$=(p_2-p_1)\cos(\lambda+\mu)\sin\sigma\,;$$

$$z_a+z_b=\frac{1}{2}(p_2-p_1)(sin2\lambda+sin2\mu)=(p_2-p_1)cos(\lambda-\mu)sin(\lambda+\mu)$$
$$=(p_2-p_1)sin(\lambda+\mu)cos\,\sigma;$$

$$p_a-p_b=(p_1-p_2)(cos^2\lambda-cos^2\mu)=(p_1-p_2)sin(\lambda+\mu)sin(\lambda-\mu)$$
$$=(p_1-p_2)sin(\lambda+\mu)sin\,\sigma;$$

$$p_a+p_b=(p_1+p_2)+\frac{1}{2}(p_1-p_2)(cos\,2\lambda+cos\,2\mu)=$$
$$=p_1+p_2+(p_1-p_2)cos(\lambda+\mu)cos(\lambda-\mu)$$
$$=p_1+p_2+(p_1-p_2)\,cos\,(\lambda+\mu)\,cos\,\sigma;$$

откуда:

$$p_a-p_b=-h\,tg\,(\lambda+\mu)=-h\,tg(2\lambda-\sigma);\quad p_a+p_b=p_1+p_2+h\,ctg\,\sigma;$$
$$p_a-p_b=-(z_a+z_b)tg\,\sigma;\quad h^2+(p_a-p_b)^2=(p_1-p_2)^2\,sin^2\sigma;$$

и далѣе:

$$p_1-p_2=\frac{1}{sin\,\sigma}\sqrt{h^2+(p_a-p_b)^2},\quad \lambda=\frac{1}{2}\left[\sigma-arctg\,\frac{1}{h}(p_a-p_b)\right];$$

$$z_a+z_b=-(p_a-p_b)\,ctg\,\sigma;$$

$$p_1+p_2=p_a+p_b-h\,ctg\,\sigma;$$

$$\mu=\lambda-\sigma,\quad z_a-z_b=h.$$ [1])

Изъ этихъ формулъ легко уже опредѣляется разстояніе точки пересѣченія двухъ главныхъ винтовъ отъ обоихъ данныхъ, углы, образованные послѣдними съ каждымъ изъ главныхъ винтовъ, а также главные параметры.

Цилиндроидъ удобно примѣняется къ опредѣленію результирующей системы двухъ данныхъ системъ векторовъ. Пусть

[1]) Эти формулы взяты нами изъ книги Schell'я: Theorie der Bewegung und der Kräfte. Bd. II Leipzig 1880. p. 220.

даны системы: (a, R_a) и (b, R_b); винтъ результирующей системы, (c, R_c), долженъ лежать на цилиндроидѣ (a, b). Направленіе оси (c) опредѣляется уравненіями:

$$\frac{R_c}{sin(a,b)} = \frac{R_a}{sin(c,b)} = \frac{R_b}{sin(a,c)},$$

$$R_c^2 = R_a^2 + R_b^2 + 2R_a R_b cos(a,b).$$

Черезъ ось цилиндроида (a, b) проведемъ плоскость, дѣлящую уголъ между осями (a) и (b) на такія двѣ части, чтобы ихъ синусы удовлетворяли вышенаписанному условію. Такъ какъ эта плоскость проходитъ черезъ двойную линію цилиндроида, то можетъ пересѣчь послѣдній еще только по одной производящей. Эта производящая съ ея параметромъ и будетъ результирующій винтъ (c). Такъ какъ главный векторъ R_c и параметръ p_c извѣстны, то будемъ знать и главный моментъ результирующей системы.

Такимъ образомъ мы видимъ, что помощью цилиндроида можно сложить двѣ системы векторовъ точно также, какъ помощью параллелограмма складываются на плоскости два простыхъ вектора.

§ 30. Прежде чѣмъ закончить разборъ двучленной группы винтовъ, скажемъ нѣсколько словъ о геометрической формѣ, называемой *конгруенціей* и представляющей собою общіе лучи всѣхъ комплексовъ двучленной группы.

Ур. (81) будетъ удовлетворено независимо отъ тѣхъ значеній, какія имѣютъ величины R_a и R_b, координатами прямыхъ, удовлетворяющими уравненіямъ обоихъ основныхъ комплексовъ; другими словами, общіе лучи двухъ основныхъ комплексовъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ общіе лучи всѣхъ комплексовъ группы. Пріймемъ за два основныхъ комплекса два особыхъ. Такъ какъ особые комплексы состоятъ изъ лучей, пересѣкающихъ ихъ оси, то общіе лучи должны пересѣкать оба особыхъ винта группы, называемыхъ поэтому *директрисами* конгруен-

ціи. Линія кратчайшаго разстоянія между директрисами называется *главной осью*, а плоскость, къ нему перпендикулярная и проходящая черезъ его средину, — *центральной плоскостью конгруенціи*; послѣдняя содержитъ оси главныхъ винтовъ, *побочныя оси* конгруенціи, пересѣкающіяся въ *центрѣ* конгруенціи. Очевидно, что черезъ каждую точку пространства проходитъ вообще только одинъ лучъ конгруенціи и только черезъ точки, лежащія на одной изъ директрисъ, ихъ проходитъ пучекъ 1-го порядка (опредѣленный взятой точкой, какъ центромъ, и точками другой директрисы). Такъ какъ директрисы пересѣкаются общими лучами, то представляютъ пару сопряженныхъ поляръ всѣхъ комплексовъ группы. Онѣ могутъ быть мнимы, хотя-бы сама конгруенція состояла изъ дѣйствительныхъ прямыхъ; наконецъ, онѣ могутъ совпадать въ одну, въ каковомъ случаѣ она есть общій лучъ всѣхъ комплексовъ группы.

Трехчленная группа.

§ 31. Трехчленная группа опредѣляется тремя основными винтами: (a), (b) и (c); если

$$\Omega_a=0\ ,\quad \Omega_b=0\ ,\quad \Omega_c=0 \qquad (98)$$

—уравненія ихъ комплексовъ, то уравненіе трехчленной группы комплексовъ будетъ

$$R_a\,\Omega_a+R_b\,\Omega_b+R_c\,\Omega_c=0\,,\ ^{1)} \qquad (99)$$

гдѣ R_a, R_b и R_c могутъ принимать всѣ дѣйствительныя значенія. Каждая пара комплексовъ трехчленной группы даетъ начало группѣ двучленной, входящей также въ трехчленную. Общіе лучи всѣхъ комплексовъ группы должны удовлетворять уравненіямъ трехъ основныхъ комплексовъ (98). Если къ этимъ уравненіямъ добавимъ три уравненія прямой (5) и исключимъ

[1]) Plücker. N. G. d. R. p 112.

координаты $(x_0, y_0, \ldots)$ изъ полученныхъ шести уравненій, то получимъ

$$\begin{vmatrix} L_1, & M_1, & N_1, & X_1, & Y_1, & Z_1 \\ L_2, & M_2, & N_2, & X_2, & Y_2, & Z_2 \\ L_3, & M_3, & N_3, & X_3, & Y_3, & Z_3 \\ 0, & z, & -y, & 1, & 0, & 0 \\ -z, & 0, & x, & 0, & 1, & 0 \\ y, & -x, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

и такъ какъ это есть уравненіе второй степени относительно координатъ (xyz), то геометрическое мѣсто общихъ лучей есть вообще нѣкоторая линейчатая поверхность втораго порядка. Что касается до того, какого вида эта поверхность, то слѣдующее разсужденіе обнаружитъ, что съ этой стороны можно ожидать большаго разнообразія.

Разсмотримъ три конгруенціи изъ трехъ попарно взятыхъ основныхъ комплексовъ. Такъ какъ общіе лучи всѣхъ трехъ комплексовъ суть вмѣстѣ съ тѣмъ лучи каждой изъ этихъ конгруенцій, то они должны пересѣчь всѣ шесть директрисъ этихъ конгруенцій. Отсюда слѣдуетъ, что, принявъ три какія-либо изъ этихъ директрисъ за направляющія, мы получимъ искомую поверхность, какъ геометрическое мѣсто прямыхъ, пересѣкающихъ три направляющія. Такимъ образомъ, видъ искомой поверхности находится въ прямой зависимости отъ относительнаго положенія трехъ взятыхъ директрисъ. Онѣ могутъ, всѣ три, не пересѣкаясь, быть или не быть параллельными одной плоскости, двѣ изъ нихъ могутъ пересѣкаться и т. д. Но за три основныхъ комплекса мы можемъ принять любые три независимыхъ изъ входящихъ въ трехчленную группу, а потому общіе лучи должны пересѣкать директрисы *всѣхъ* конгруенцій, входящихъ въ трехчленную группу.

§ 32. Самый общій случай будетъ тотъ, когда три директрисы не пересѣкаются и не параллельны одной плоскости; въ такомъ случаѣ поверхность 2-го порядка есть однополый гиперболоидъ; производящими, скажемъ, перваго рода будутъ общіе лучи, производящими-же втораго рода — директрисы, т. е. оси всѣхъ особыхъ винтовъ трехчленной группы.

Обозначимъ черезъ $2a$, $2b$ и $2c$ длины осей гиперболоида (изъ нихъ $2c$-мнимая), и пусть (фиг. 7) AA' и BB' — образующія втораго рода, проходящія черезъ точки A и B пересѣченія оси Ox съ поверхностью. Ось Ox перпендикулярна къ обѣимъ образующимъ и

$$tg(AA',z)=tg(BB',z)=\frac{b}{c} \quad {}^{1})$$

Такъ какъ Oz и Oy суть оси главныхъ винтовъ двучленной группы, опредѣляемой особыми винтами AA' и BB', то для полученія главныхъ параметровъ p_3 и p_2 двучленной группы нужно въ формулахъ (89) положить:

$$tg\varphi = \frac{b}{c}, \quad \Delta = a; \tag{100}$$

тогда получимъ:

$$p_3 = \frac{ab}{c}, \quad p_2 = -\frac{ac}{b}. \tag{101}$$

Точно также, образующія втораго рода, проходящія черезъ точки пересѣченія оси Oy съ поверхностью, суть особые винты двучленной группы, главные винты которой лежатъ на осяхъ Oz и Ox; и такъ какъ

$$tg(CC',z)=tg(DD',z)=\frac{a}{c},$$

[1]) См. Бріо и Буке. Аналитическая геометрія. Переводъ В. Синцова. Петербургъ 1868. Стр. 453.

то главные параметры будутъ:

$$p_3' = \frac{ab}{c} = p_3\,,\quad p_1 = -\frac{cb}{a}\,. \tag{102}$$

Три винта, оси которыхъ совпадаютъ съ координатными осями, называются ***центральными***, и уравненія ихъ комплексовъ суть:

$$l_0 + p_1 x_0 = 0,\quad m_0 + p_2 y_0 = 0,\quad n_0 + p_3 z_0 = 0. \tag{103}$$

Вставимъ въ уравненіе гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вмѣсто величинъ a, b, c—ихъ значенія изъ ур. (101) и (102); тогда уравненіе поверхности пріиметъ видъ:

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 + p_1 p_2 p_3 = 0. \tag{104}$$

Можетъ случиться, что особые винты AA' и BB' мнимы, тогда (ср. § 26) для осей $2a$, $2b$ имѣемъ выраженія чисто-мнимыя. Формулы (101) и (102) показываютъ, что центральные винты остаются въ этомъ случаѣ дѣйствительными, а параметры ихъ—всѣ одинаковыхъ знаковъ. Однополый гиперболоидъ обращается въ мнимый эллипсоидъ. Такимъ образомъ мы видимъ, что будутъ-ли особые винты составлять дѣйствительную или мнимую поверхность, во всякомъ случаѣ въ трехчленной, группѣ есть три центральныхъ винта, оси которыхъ, пересѣкаясь въ одной точкѣ, взаимно перпендикулярны. Такъ какъ всѣ винты двучленной группы, образованной двумя какими-либо изъ трехъ центральныхъ винтовъ, пересѣкаютъ третій, то послѣдній не входитъ въ двучленную группу, образованную двумя первыми; эти три винта, слѣдовательно, независимы и могутъ быть приняты, взамѣнъ данныхъ, за основные.

§ 33. Умноживъ ур. (103) на произвольныя дѣйствительныя количества R_1, R_2 и R_3 и сложивъ, получимъ уравненіе трехчленной группы въ видѣ:

$$R_1(l_0+p_1x_0)+R_2(m_0+p_2y_0)+R(n_0+p_3z_0)=0. \qquad (105)$$

По координатамъ оси этого комплекса:

$$R_1, \qquad R_2, \qquad R_3,$$
$$R_1(p_1-p), \quad R_2(p_2-p), \quad R_3(p_3-p),$$

гдѣ

$$p=\frac{R_1^2p_1+R_2^2p_2+R_3^2p_3}{R_1^2+R_2^2+R_3^2},$$

найдемъ ея уравненія:

$$yR_3 = zR_2 + R_1(p_1-p),$$
$$zR_1 = xR_3 + R_2(p_2-p),$$
$$xR_2 = yR_1 + R_3(p_3-p).$$

Исключивъ отсюда R_1, R_2, R_3, получимъ уравненіе геометрическаго мѣста винтовъ даннаго параметра p:

$$\begin{vmatrix} p_1-p, & z, & -y \\ -z, & p_2-p, & x \\ y, & -x, & p_3-p \end{vmatrix}=0,$$

или:

$$(p_1-p)x^2+(p_2-p)y^2+(p_3-p)z^2+$$
$$+(p_1-p)(p_2-p)(p_3-p)=0. \qquad (106)$$

При p, большемъ наибольшаго и меньшемъ наименьшаго изъ параметровъ p_1, p_2, p_3, поверхность эта мнима; при p, равномъ одному изъ центральныхъ параметровъ, напр. p_3, гиперболоидъ обращается въ двѣ плоскости, проходящія черезъ ось Oz; во

всѣхъ остальныхъ случаяхъ — это однополый гиперболоидъ; при $p=0$ получаемъ гиперболоидъ (104).

Давши въ ур. (106) координатамъ (xyz) какія-либо опредѣленныя значенія, получимъ уравненіе, кубичное относительно p; откуда слѣдуетъ, что черезъ каждую точку пространства проходитъ по крайней мѣрѣ одинъ винтъ трехчленной группы; во всякомъ-же случаѣ ихъ не будетъ больше трехъ [1]).

§ 34. Черезъ начало координатъ проведемъ прямыя, параллельныя образующимъ гиперболоида (106); получаемъ конусъ:

$$(p_1-p)x^2+(p_2-p)y^2+(p_3-p)z^2=0. \qquad (107)$$

Разстояніе r точки (xyz) пересѣченія какой-либо образующей этого конуса съ гиперболоидомъ особыхъ винтовъ опредѣляется совокупностью уравненій (104), (107) и

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

правая часть этого уравненія по (107) равна

$$\frac{p_1x^2+p_2y^2+p_3z^2}{p};$$

---

[1]) Что касается до остальныхъ двухъ корней ур. (106), то они могутъ быть дѣйствительны или мнимы, смотря по значеніямъ координатъ (xyz). Такъ напр., для точекъ, лежащихъ на оси Oz, ур (106) превращается въ такое:

$$(p_3-p)[z^2+(p_1-p)(p_2-p)]=0.$$

Это ур. имѣетъ дѣйствительный корень $p_3=p$, остальные-же два будутъ дѣйствительны, если $4z^2<(p_1-p_2)^2$ и мнимы, если $4z^2>(p_1-p_2)^2$. Преобразовавъ ур. (106) къ виду: $x^3+rx+s=0$, получимъ дѣйствительные корни при $4r^3+27s^2>0$ и мнимые при $4r^3+27s^2<0$. Эти два случая раздѣляются тѣмъ, когда $4r^3+27s^2=0$.

Какъ r, такъ и s суть нѣкоторыя функціи отъ (xyz), и это уравненіе есть уравненіе поверхности, отдѣляющей тѣ точки пространства, черезъ которыя проходитъ только одинъ винтъ трехчленной группы, отъ тѣхъ, черезъ которыя ихъ проходитъ три. Высчитавъ функціи r и s, найдемъ что эта поверхность шестаго порядка (ср. Ball. § 112).

и, воспользовавшись ур. (104), получимъ:

$$r^2 = \frac{p_1x^2 + p_2y^2 + p_3z^2}{p} = -\frac{p_1p_2p_3}{p}. \qquad (108)$$

Откуда слѣдуетъ, что параметръ какого-либо винта обратно пропорціоналенъ квадрату параллельнаго ему діаметра гиперболоида особыхъ винтовъ.

§ 35. Имѣя три винта (a), (b) и (c) конечныхъ параметровъ, всегда можно узнать, есть-ли въ группѣ винты безконечно большаго параметра и сколько ихъ. Для этого нужно наложить на винты (a), (b) и (c) главные векторы R_a, R_b, R_c и стараться подобрать величины послѣднихъ такъ, чтобы при приведеніи ихъ къ какой-либо точкѣ получить результирующій векторъ, равный нулю. Если ни одна пара осей данныхъ винтовъ не параллельны, то указанный случай возможенъ лишь тогда, когда всѣ три оси параллельны одной плоскости. Въ случаѣ одной пары параллельныхъ осей въ группѣ найдется одинъ винтъ безконечно-большаго параметра, наконецъ, если имѣемъ двѣ пары параллельныхъ осей, то искомыхъ винта—два.

Предположимъ сначала, что въ группѣ всѣ винты конечныхъ параметровъ, и что $p_a > p_b > p_c$; строимъ на винтахъ (a) и (c) цилиндроидъ и находимъ на немъ два винта параметра p_b. Итакъ, въ этомъ случаѣ всегда можно три данныхъ винта замѣнить тремя другими (C), (C') и (C'')—всѣ одного и того-же параметра $p_b = p$.

Если изъ нихъ ни одна пара не пересѣкается, то они опредѣляютъ собою гиперболоидъ винтовъ параметра p. Построивъ его, найдя его оси, мы сможемъ написать уравненіе гиперболоида винтовъ любаго параметра. Но можетъ случиться, что два изъ этихъ винтовъ (C), (C') пересѣкаются, напр. въ точкѣ A_1; въ такомъ случаѣ, какъ было показано въ § 28, они опредѣляютъ собою пучекъ 1-го порядка винтовъ такого-же параметра p, центръ котораго въ A_1; всѣ эти винты

входятъ въ трехчленную группу. Кромѣ этого пучка въ группѣ есть другой, также 1-го порядка, винтовъ такого-же параметра.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, $A_1 b_1 A_2$ (фиг. 5) есть плоскость перваго пучка, а A_2 — точка пересѣченія съ этой плоскостью третьяго винта (C''). Такъ какъ прямая $A_1 A_2$, какъ лучъ перваго пучка, есть также винтъ параметра p, входящій въ группу, и такъ какъ онъ пересѣкается съ винтомъ (C''), то даетъ вмѣстѣ съ послѣднимъ начало новому пучку 1-го порядка винтовъ, имѣющему вершину въ A_2 и лежащему въ плоскости $A_1 b_2 A_2$, опредѣляемой прямыми $A_1 A_2$ и (C''). Средину $A_1 A_2 = 2\Delta$ пріймемъ за начало координатъ, линію $A_1 A_2$—за ось Oz, а плоскость, дѣлящую пополамъ уголъ 2ψ между плоплоскостями $A_1 b_1 A_2$ и $A_1 b_2 A_2$,—за плоскость zOx. Винтъ, ось котораго совпадаетъ съ осью Oz, а параметръ равенъ p, принимаемъ за одинъ изъ основныхъ винтовъ; чтобы получить винтъ, ось коего совпадала-бы съ осью Ox, беремъ въ пучкахъ A_1 и A_2 два луча, $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$, параллельныхъ прямымъ Ob_1 и Ob_2, по которымъ плоскости $A_1 b_1 A_2$ и $A_1 b_2 A_2$ пересѣкаютъ плоскость xOy. Эти лучи суть оси двухъ винтовъ одинаковыхъ параметровъ p. Сообщивъ послѣднимъ главные векторы, равные единицѣ, найдемъ координаты полученныхъ такимъ образомъ двухъ системъ векторовъ:

$$\cos\psi\,,\quad \sin\psi\,,\ 0,\ p\cos\psi - \Delta\sin\psi\,,\quad p\sin\psi + \Delta\cos\psi\,,\ 0,$$
$$\cos\psi\,, -\sin\psi\,,\ 0,\ p\cos\psi - \Delta\sin\psi\,, -p\sin\psi + \Delta\cos\psi\,,\ 0;$$

координаты результирующей системы будутъ:

$$2\cos\psi\,,\quad 0,\quad 0,\quad 2(p\cos\psi - \Delta\sin\psi)\,,\ 1,\quad 0,\quad 0.$$

Эти формулы показываютъ, что результирующій винтъ лежитъ на оси Ox и имѣетъ своимъ параметромъ величину:

$$p_1 = \frac{p\cos\psi - \Delta\sin\psi}{\cos\psi}\,.$$

Сообщивъ-же первому винту главный векторъ $(+1)$, а второму главный векторъ (-1) и сложивъ, получимъ винтъ на оси Oy съ параметромъ

$$p_2 = \frac{p \sin\psi + \Delta \cos\psi}{\sin\psi}.$$

Такимъ образомъ опредѣлены центральные винты трехчленной группы, а слѣдовательно можетъ быть построенъ гиперболоидъ винтовъ какого угодно параметра.

Въ частномъ случаѣ, когда $\Delta = 0$, всѣ центральные параметры равны между собою. Но въ этомъ случаѣ мнимый эллипсоидъ (104) обращается въ мнимый шаръ, слѣдовательно (§ 34) равны между собою параметры всѣхъ винтовъ группы.

§ 36. Предположивъ, что въ трехчленной группѣ есть только одинъ винтъ (a) безконечно-большаго параметра, строимъ цилиндроидъ на какихъ-либо двухъ другихъ винтахъ группы и находимъ на немъ винтъ (2), перпендикулярный къ (a), и винтъ (1), перпендикулярный къ (2) (фиг. 8). Направивъ ось Ox по директрисѣ цилиндроида, ось Oz—по винту (1), получимъ ось Oy параллельной винту (2). Пусть A есть точка пересѣченія винта (2) съ Ox. Если-бы начало координатъ было въ A, то уравненіе комплекса (2) было-бы

$$m_0 + p_2 y_0 = 0;$$

въ данномъ-же случаѣ, означивъ черезъ Δ разстояніе OA, получимъ для того-же комплекса уравненіе:

$$m_0 - \Delta z_0 + p_2 y_0 = 0.$$

Уравненія комплексовъ (1) и (a) будутъ:

$$n_0 + p_1 z_0 = 0,$$
$$Lx_0 + Nz_0 = 0,$$

гдѣ L и N—постоянныя, опредѣляющія уголъ ψ наклоненія винта (a) къ оси Oz:

$$tg\psi = L:N.$$

Такимъ образомъ получаемъ уравненіе трехчленной группы комплексовъ:

$$R_1(Lx_0+Nz_0)+R_2(m_0-\Delta z_0+p_2 y_0)+R_3(n_0+p_1 z_0)=0.$$

Параметръ какого-либо винта и уравненія ея оси будутъ:

$$p=\frac{R_2{}^2 p_2+R_3\,(R_1 N-R_2\,\Delta+R_3 p_1)}{R_2{}^2+R_3{}^2},$$

$$zR_2-yR_3+R_1\,L=0\,,$$

$$xR_3+R_2(p_2-p)=0\,,$$

$$R_1\,N-R_2\,\Delta+R_3(p_1-p)-xR_2=0.$$

Исключивъ изъ послѣднихъ трехъ уравненій перемѣнныя R_1, R_2, R_3, получимъ геометрическое мѣсто винтовъ даннаго параметра p:

$$L[(p_1-p)(p_2-p)+x(x+\Delta)]+N[zx+y(p_2-p)]=0.\ (109)$$

При $N=0$, т. е. когда винтъ (a) направленъ по директрисѣ цилиндроида, это уравненіе представляетъ пару плоскостей, параллельныхъ двумъ винтамъ (1) и (2); если-же при этомъ $p_1=p_2$ и $\Delta=0$, то всѣ винты группы имѣютъ одинаковые параметры, за исключеніемъ того, которому въ уравненіи трехчленной группы соотвѣтствуетъ:

$$R_2 = R_3 = 0;$$

параметръ этого винта безконечно-великъ и онъ параллеленъ оси Ox. Всѣ остальные винты лежатъ въ плоскости zOy.

Если N отлично отъ нуля, то, замѣнивъ въ ур. (109) $L:N$ черезъ $tg\psi$, повернемъ ось Ox въ плоскости zOx на уголъ $-\psi$; тогда получимъ:

$$zx\cos\psi + x\Delta\sin\psi + y(p_2-p) + tg\psi(p_1-p)(p_2-p) = 0;$$

это есть уравненіе гиперболическаго параболоида, направляющія плоскости котораго параллельны плоскостямъ zOy и xOy. Итакъ: Въ томъ случаѣ когда въ трехчленной группѣ есть только одинъ винтъ безконечно-большаго параметра, геометрическое мѣсто винтовъ одного и того-же параметра есть гиперболическій параболоидъ. Параболоиды, соотвѣтствующіе различнымъ параметрамъ, имѣютъ общія направляющія плоскости; изъ нихъ одна параллельна всѣмъ винтамъ группы, имѣющимъ конечный параметръ, а другая перпендикулярна къ винту безконечно-большаго параметра.

Перенеся начало координатъ въ точку $(0, -tg\psi(p_1-p), -\Delta tg\psi)$, получаемъ уравненіе параболоида, отнесенное къ вершинѣ:

$$zx\cos\psi + y(p_2-p) = 0.$$

Вершины различныхъ параболоидовъ лежатъ въ плоскости yOz на прямой, параллельной оси Oy.

Отмѣтимъ еще тотъ случай, когда въ трехчленной группѣ есть два независимыхъ винта безконечно-большаго параметра. Всѣ винты (C) конечнаго параметра, входящіе въ группу, параллельны между собой; винты одинаковаго параметра лежатъ въ одной плоскости, параллельной винтамъ (C) и перпендикулярной къ плоскости винтовъ безконечно-большаго параметра. Наконецъ, въ томъ случаѣ когда въ группѣ есть три независимыхъ винта безконечно-большаго параметра, таковыми-же будутъ и всѣ винты группы.

Четыргхчленная группа.

§ 37. Координаты прямыхъ, удовлетворяющія уравненіямъ четырехъ основныхъ комплексовъ:

$$\Omega_1 = 0 ,\ldots \Omega_4 = 0$$

удовлетворяютъ и уравненію любаго комплекса группы:

$$R_1 \Omega_1 + R_2 \Omega_2 + R_3 \Omega_3 + R_4 \Omega_4 = 0.$$

Рѣшая эти уравненія относительно отношеній четырехъ какихъ-либо координатъ къ шестой въ функціи отношенія оставшейся пятой къ шестой и подставляя полученныя рѣшенія въ уравненіе

$$l_0 x_0 + m_0 y_0 + n_0 z_0 = 0,$$

получаемъ квадратное уравненіе, что показываетъ, что есть не болѣе двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ прямыхъ, общихъ всѣмъ комплексамъ группы. Пусть $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$ (фиг. 5) — эти прямыя. Принявъ оси координатъ, какъ въ § 22, напишемъ условія того, чтобы какой-либо комплексъ:

$$Lx_0 + My_0 + Nz_0 + Xl_0 + Ym_0 + Zn_0 = 0, \qquad (110)$$

содержалѣ эти прямыя своими лучами. Для этой цѣли подставимъ въ ур. (110) вмѣсто координатъ прямой ихъ значенія (84); тогда получимъ:

$$L \cos\varphi + M \sin\varphi - X\Delta \sin\varphi + Y\Delta \cos\varphi = 0,$$

$$L \cos\varphi - M \sin\varphi - X\Delta \sin\varphi - Y\Delta \cos\varphi = 0;$$

откуда:

$$L + Y\Delta = (-M + X\Delta)\, tg\,\varphi,$$

$$L - Y\Delta = (M + X\Delta)\, tg\,\varphi;$$

обозначивъ:

$$p_1 = \Delta\, tg\varphi \quad , \quad p_2 = -\frac{\Delta}{tg\varphi}, \tag{111}$$

получимъ:

$$L = Xp_1 \quad , \quad M = Yp_2 . \tag{112}$$

Подставивъ эти значенія въ ур. (110), приведемъ его къ виду

$$X(l_0 + p_1 x_0) + Y(m_0 + p_2 y_0) + Z(n_0 + p_3 z_0) = 0, \tag{113}$$

гдѣ:

$$p_3 = \frac{N}{Z} .$$

Къ такому виду можетъ быть приведено уравненіе любаго комплекса, имѣющаго своими лучами данныя двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, значитъ между прочимъ и уравненіе любаго комплекса четырехчленной группы. Разница между уравненіями вида (113), соотвѣтствующими двумъ какимъ-либо комплексамъ группы, будетъ заключаться въ постоянныхъ X, Y, Z и p_3. Отсюда слѣдуетъ, что мы получимъ всѣ комплексы группы, если въ ур. (113) будемъ давать этимъ постояннымъ всевозможныя дѣйствительныя значенія. Сравнивая это уравненіе съ ур. (105), приходимъ къ заключенію, что если въ уравненіи трехчленной группы (105) припишемъ одному изъ центральныхъ параметровъ перемѣнное значеніе, то получимъ самое общее уравненіе четырехчленной группы.

Соотнощеніямъ (112) между координатами винта соотвѣтствуютъ соотношенія между координатами его оси. Мы получаемъ, именно, изъ ур. (63):

$$\begin{aligned} &X = x_0 , && Y = y_0 , && Z = z_0 , \\ &L = l_0 + px_0 , && M = m_0 + py_0 , && N = n_0 + pz_0 ; \end{aligned} \tag{114}$$

подставивъ эти значенія въ ур. (112), получимъ:

$$l_0+(p-p_1)x_0=0, \quad m_0+(p-p_2)y_0=0. \qquad (115)$$

При данномъ p каждое изъ этихъ уравненій представляетъ линейный комплексъ, такъ что оси винтовъ четырехчленной группы, имѣющихъ тотъ-же параметръ p, суть общіе лучи двухъ линейныхъ комплексовъ и представляютъ слѣдовательно конгруенцію.

Главные параметры двучленной группы комплексовъ, имѣющихъ эту конгруенцію своими общими лучами, суть:

$$p'_1=p-p_1 \text{ и } p'_2=p-p_2,$$

а уравненіе соотвѣтствующаго цилиндроида (Ср. (92))

$$z=-\frac{(p_2-p_1)xy}{x^2+y^2}. \qquad (116)$$

Это уравненіе совершенно не зависитъ отъ перемѣннаго параметра p, слѣдовательно:

Всѣмъ конгруенціямъ, представляющимъ геометрическое мѣсто винтовъ различныхъ параметровъ въ четырехчленной группѣ, соотвѣтствуетъ одинъ и тотъ-же цилиндроидъ.

Разница будетъ заключаться только въ распредѣленіи параметровъ по образующимъ цилиндроида. Въ цилиндроидѣ, соотвѣтствующемъ значенію $p=0$, распредѣленіе параметровъ будетъ выражаться формулой

$$p'=-(p_1 \cos^2\psi+p_2 \sin^2\psi).$$

Директрисы этого цилиндроида суть прямыя, проходящія черезъ точки A_1 и A_2 и соотвѣтственно паралельныя прямымъ A_2B_2 и A_1B_1. Въ цилиндроидѣ, соотвѣтствующемъ какому-либо значеніе p, распредѣленіе параметровъ выражается формулой:

$$p''=(p-p_1)\cos^2\psi+(p-p_2)\sin^2\psi=p'+p.$$

Таковъ параметръ образующихъ, наклоненныхъ къ оси Ox подъ углами ψ и $180-\psi$; разсматриваемыя образующія суть директрисы конгруенціи винтовъ параметра $p=-p'$. Итакъ:

Проведя черезъ точки A_1 и A_2 пересѣченія общихъ лучей съ ихъ кратчайшимъ разстояніемъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя прямымъ A_2B_2 и A_1B_1, строимъ на этихъ прямыхъ, какъ на особыхъ винтахъ, цилиндроидъ винтовъ. Оси винтовъ параметра p этого цилиндроида суть директрисы конгруенціи винтовъ параметра $-p$, входящихъ въ четырехчленную группу. Цилиндроидъ (116) можетъ быть названъ цилиндроидомъ директрисъ.

Исключивъ p изъ ур. (115), получимъ уравненіе, которому должны удовлетворять координаты оси какого-либо винта четырехчленной группы:

$$l_0y_0-m_0x_0-x_0y_0(p_1-p_2)=0.$$

Это есть однородное уравненіе второй степени относительно координатъ прямой, а потому лучи, имъ опредѣленные, составляютъ линейный комплексъ 2-го порядка. Замѣнимъ въ немъ координаты прямой ихъ функціями отъ координатъ двухъ ея точекъ, по формуламъ (2), тогда получимъ уравненіе:

$$(p_1-p_2)(x-x_1)(y-y_1)-(y-y_1)[y_1(z-z_1)-z_1(y-y_1)]+$$
$$+(x-x_1)[z_1(x-x_1)-x_1(z-z_1)]=0,$$

показывающее, что черезъ каждую точку $(x_1y_1z_1)$ пространства проходитъ конусъ 2-го порядка винтовъ, принадлежащихъ къ четырехчленной группѣ. Существуютъ однако точки $(x_1y_1z_1)$, для которыхъ этотъ конусъ преобразуется въ двѣ плоскости. Для опредѣленія геометрическаго ихъ мѣста, отыщемъ условіе, при которомъ однородная функція второй степени,

$$(p_1-p_2)x_0y_0+z_1y_0^2+z_1x_0^2-y_1y_0z_0-x_1x_0z_0,$$

перемѣнныхъ x_0, y_0, z_0 обращается въ произведеніе двухъ линейныхъ множителей [1]). Для этой цѣли, положивъ ее равной произведенію

$$(ax_0+by_0+cz_0)(a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0),$$

гдѣ $a, b, \ldots$ пока неопредѣленные коэффиціенты, сравнимъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣнныхъ; получимъ рядъ уравненій:

$$z_1=aa_1, \qquad z_1=bb_1, \qquad 0=cc_1,$$
$$p_1-p_2=ab_1+ba_1, \quad -y_1=bc_1+cb_1, \quad -x_1=ac_1+ca_1.$$

Третье изъ этихъ уравненій показываетъ, что или c, или c_1 есть нуль; пусть $c_1=0$, въ такомъ случаѣ:

$$b_1=-\frac{y_1}{c}, \quad a_1=-\frac{x_1}{c}; \quad a=-\frac{z_1c}{x_1}, \quad b=-\frac{z_1c}{y_1}.$$

Подставляя эти значенія въ четвертое изъ вышенаписанныхъ уравненій, получимъ:

$$z_1=\frac{(p_1-p_2)x_1y_1}{x_1^2+y_1^2}.$$

Итакъ: геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ конусъ 2-го порядка винтовъ четырехчленной группы обращается въ двѣ плоскости, есть цилиндроидъ директрисъ.

Пятичленная группа.

§ 38. Пятичленная группа комплексовъ, опредѣленная пятью данными винтами, имѣетъ своимъ уравненіемъ:

---

[1]) Cp. Plücker. N. G. d. R. § 186.

$$R_1\Omega_1+R_2\Omega_2+\ldots+R_5\Omega_5=0. \qquad (117)$$

Посмотримъ, какая связь должна существовать между коэффиціентами уравненія любаго комплекса

$$\Omega = 0, \qquad (118)$$

для того чтобы онъ принадлежалъ къ нашей пятичленной группѣ. Съ этой цѣлью, помноживъ ур. (118) на произвольнаго множителя—R, сравнимъ его коэффиціенты съ коэффиціентами ур. (117). Тогда получимъ рядъ уравненій:

$$R_1X_1+\ldots+R_5X_5+RX=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_1N_1+\ldots+R_5N_5+RN=0.$$

Исключивъ отсюда величины $R, R_1, \ldots R_5$, получимъ требуемое соотношеніе:

$$\begin{vmatrix} X_1, \ldots, X_5, & X \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ N_1, \ldots, N_5, & N \end{vmatrix} = 0.$$

Для полученія геометрическаго мѣста винтовъ даннаго параметра p, замѣнимъ здѣсь координаты $X, Y, \ldots$ по формуламъ (114):

$$\begin{vmatrix} X_1, \ldots, X_5, & x_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ L_1, \ldots, L_5, & l_0+px_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ N_1, \ldots, N_5, & n_0+pz_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроемъ опредѣлитель по элементамъ послѣдней вертикали,

обозначивъ черезъ A, B, ... постоянныя, зависящія отъ координатъ пяти основныхъ винтовъ; тогда получимъ:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D(l_0-px_0)+E(m_0-py_0)+$$
$$+F(n_0-pz_0)=0. \qquad (119)$$

Такъ какъ это уравненіе линейно относительно координатъ оси винта, то мы заключаемъ, что оси винтовъ даннаго параметра p, входящихъ въ пятичленную группу, представляютъ линейный комплексъ 1-го порядка, оси-же всѣхъ вообще винтовъ —двучленную группу комплексовъ. Одинъ изъ двухъ основныхъ комплексовъ двучленной группы есть комплексъ:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+Dl_0+Em_0+Fn_0=0, \qquad (120)$$

представляющій мѣсто осей винтовъ пятичленной группы, параметръ которыхъ равенъ нулю; другой основной комплексъ—безконечно-большаго параметра:

$$Dx_0+Ey_0+Fz_0=0, \qquad (121)$$

представляетъ мѣсто винтовъ, параметръ которыхъ безконечно-великъ

Обозначивъ черезъ p'_0 параметръ комплекса (120), будемъ имѣть для параметра p' комплекса (119) выраженіе:

$$p'=\frac{(A-pD)D+(B-pE)E+(C-pF)F}{D^2+E^2+F^2}=p'_0-p.$$

Координаты оси комплекса (119) пропорціональны величинамъ:

$$D, \qquad E, \qquad F,$$
$$A-Dp'_0, \quad B-Ep'_0, \quad C-Fp'_0;$$

онѣ, какъ видимъ, не зависятъ отъ p, т. е.: оси всѣхъ комплексовъ, представляющихъ геометрическое мѣсто винтовъ раз-

личныхъ параметровъ пятичленной группы, лежатъ на одной прямой; эти комплексы разнятся, слѣдовательно, только параметрами. Принявъ эту прямую за ось Oz, мы должны будемъ имѣть:

$$x_0=y_0=l_0=m_0=0,$$

т. е.:
$$D=E=A=B=0,$$

и ур. (119) пріиметъ тогда видъ:

$$n_0+z_0(p'_0-p)=0.$$

Такимъ образомъ, черезъ каждую точку пространства проходитъ безчисленное множество винтовъ, входящихъ въ пятичленную группу; винты одного и того-же параметра лежатъ въ одной плоскости, образуя пучекъ лучей 1-го порядка; и такъ какъ каждая изъ плоскостей содержитъ перпендикуляръ изъ разсматриваемой точки на ось соотвѣтствующаго комплекса, а оси всѣхъ комплексовъ совпадаютъ, то всѣ эти плоскости обертываютъ прямую, проведенную изъ точки перпендикулярно къ центральной оси. Какой-бы параметръ мы не сообщили этой перпендикулярной прямой, полученный винтъ будетъ принадлежать къ пятичленной группѣ.

О взаимныхъ группахъ винтовъ.

§ 39. *a*) Винтъ Γ, взаимный съ n независимыми винтами (C_1),....(C_n), взаименъ со всякимъ винтомъ, входящимъ въ n-членную группу винтовъ (C_1), ... (C_n).

Умноживъ ур. (74_1) послѣдовательно на координаты Λ, M, N, Ξ, H, Z винта (Γ) и сложивъ, получимъ:

$$R_1\Omega_{c_1,r}+\ldots+R_n\Omega_{c_n,r}+R_{n+1}\Omega_{c_{n+1},r}=0;$$

и такъ какъ

$$\Omega_{C_1,\Gamma} = \ldots . = \Omega_{C_n,\Gamma} = 0\ ,$$

то и

$$\Omega_{C_{n+1},\Gamma} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если параметръ винта (Γ) отличенъ отъ нуля, то самъ онъ не можетъ принадлежать къ n-членной группѣ винтовъ $(C_1), \ldots . (C_n)$, ибо въ такомъ случаѣ онъ былъ-бы взаименъ самъ съ собою, а намъ извѣстно (67) что

$$\Omega_{\Gamma,\Gamma} = \pi\ ,$$

если π—параметръ винта (Γ).

Если-же параметръ π равенъ нулю, то (Γ) есть общій лучъ всѣхъ комплексовъ группы, ибо мы видѣли въ § 27, что условіе взаимности особаго винта (Γ) съ какимъ-либо винтомъ (C) указываетъ на принадлежность его оси къ лучамъ комплекса (C).

b) Есть только $6-n$ независимыхъ винтовъ, взаимныхъ съ n данными независимыми винтами.

Докажемъ теорему для случая $n=3$; тогда имѣемъ уравненія

$$\begin{aligned} \Xi L_1 + \mathrm{H} M_1 + \ldots . + \mathrm{N} Z_1 &= 0, \\ \Xi L_2 + \mathrm{H} M_2 + \ldots . + \mathrm{N} Z_2 &= 0, \\ \Xi L_3 + \mathrm{H} M_3 + \ldots . + \mathrm{N} Z_3 &= 0; \end{aligned} \qquad (122)$$

и такъ какъ 3 данныхъ винта независимы, то въ группѣ вида (75) есть хотя одинъ опредѣлитель 3-го порядка, отличный отъ нуля; положимъ—это опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} L_1\ , & M_1\ , & Z_1 \\ L_2\ , & N_2\ , & Z_2 \\ L_3\ , & M_3\ , & Z_3 \end{vmatrix}\ ;$$

въ такомъ случаѣ, рѣшая уравненія (122) относительно Ξ, H, N, выразимъ эти величины линейными функціями отъ остальныхъ:

$$\Xi = A_1\Lambda + B_1 M + C_1 Z\,,$$
$$H = A_2\Lambda + B_2 M + C_2 Z\,,$$
$$N = A_3\Lambda + B_3 M + C_3 Z\,.$$

Итакъ, изъ координатъ винта (Γ) три (Λ, M, Z) совершенно произвольны, а три остальныя суть ихъ линейныя функціи. Винтами (Γ) могутъ быть такіе, координаты которыхъ пропорціональны:

$$A_1\,,\ A_2\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ A_3\,,$$
$$B_1\,,\ B_2\,,\ 0\,,\ 0\,,\ 1\,,\ B_3\,,$$
$$C_1\,,\ C_2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,,\ C_3\,;$$

и въ группѣ

$$\left\| \begin{matrix} 1\,, & 0\,, & 0\,, & A_1\,, & A_2\,, & A_3 \\ 0\,, & 1\,, & 0\,, & B_1\,, & B_2\,, & B_3 \\ 0\,, & 0\,, & 1\,, & C_1\,, & C_2\,, & C_3 \end{matrix} \right\|$$

есть одинъ опредѣлитель 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1\,, & 0\,, & 0 \\ 0\,, & 1\,, & 0 \\ 0\,, & 0\,, & 1 \end{vmatrix}\,,$$

отличный отъ нуля. Итакъ есть не меньше трехъ независимыхъ винтовъ, взаимныхъ съ тремя данными винтами. Но легко видѣть, что ихъ не будетъ больше трехъ. Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\Lambda_k\,,\ M_k\,,\ Z_k\,,\qquad k=1,\,2,\,3,\,4.$$

четыре системы значеній произвольныхъ Λ, M, Z, то всѣ опредѣлители 4-го порядка изъ группы

$$\left\| \begin{array}{l} \Lambda_1, \mathrm{M}_1, Z_1, A_1\Lambda_1+B_1\mathrm{M}_1+C_1Z_1, \ldots A_3\Lambda_1+B_3\mathrm{M}_1+C_3Z_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Lambda_4, \mathrm{M}_4, Z_4, A_1\Lambda_4+B_1\mathrm{M}_4+C_1Z_4, \ldots A_3\Lambda_4+B_3\mathrm{M}_4+C_3Z_4 \end{array} \right\|$$

суть нули.

Очевидно, что доказательство это безразлично примѣняется ко всякому числу n.

Если есть только $6-n$ независимыхъ винтовъ, взаимныхъ съ n данными, то всѣ винты, взаимные съ послѣдними, составляютъ $(6-n)$-членную группу.

§ 40. Мы уже знаемъ, какъ распредѣляются въ пространствѣ винты $(6-n)$-членной группы; намъ остается только разобрать, въ какомъ отношеніи стоитъ эта $(6-n)$-членная группа винтовъ (Γ) къ n-членной группѣ винтовъ (C), и такъ какъ роль винтовъ (Γ) и (C) взаимная, то достаточно остановиться на случаяхъ $n=1, 2, 3$

При $n=1$, напишемъ уравненіе комплекса (C_1) въ формѣ:

$$l_0 + p_1 Z_0 = 0, \tag{123}$$

а условіе взаимности винтовъ (C_1) и (Γ):

$$p_1 \Xi + \Lambda = 0. \tag{124}$$

Замѣнивъ здѣсь величины Ξ и Λ ихъ функціями отъ координатъ оси винта (Γ) даннаго параметра π по формуламъ (114), получимъ уравненіе,

$$l_0+(p_1+\pi)x_0=0, \tag{125}$$

показывающее, что оси винтовъ даннаго параметра π представляютъ такой линейный комплексъ 1-го порядка, ось котораго совпадаетъ съ осью винта (C_1), а параметръ равенъ суммѣ параметровъ винтовъ (C_1) и (Γ).

При $n = 2$, вмѣсто двухъ данныхъ винтовъ (C'_1) и (C'_2)

беремъ главные винты (C_1) и (C_2) двучленной группы, ими опредѣляемой. Кромѣ уравненій (123) и (124) будемъ имѣть еще два:

$$m_0+p_2 y_0=0 \quad , \quad p_2 \mathrm{H}+\mathrm{M}=0, \qquad (126)$$

и соотвѣтственно этому для геометрическаго мѣста винтовъ (Γ) даннаго параметра π кромѣ ур. (125) еще одно:

$$m_0+(p_2+\pi)y_0=0. \qquad (127)$$

Форма ур. (123) и (127) показываетъ, что для полученія винтовъ (Γ) даннаго параметра π, взаимныхъ съ винтами (C_1) и (C_2), мы должны, сохранивъ оси послѣднихъ, увеличить ихъ параметры на π и отыскать общіе лучи полученныхъ такимъ образомъ комплексовъ. Построимъ цилиндроидъ двучленной группы винтовъ (C_1) и (C_2) и найдемъ на нихъ два винта параметра $-\pi$; оси этихъ винтовъ и будутъ директрисами конгруенціи винтовъ (Γ), имѣющихъ параметръ $+\pi$.

При $n=3$, мы опять замѣняемъ три данныхъ винта (C'_1), (C'_2) и (C'_3) центральными винтами образованной ими трехчленной группы и тогда должны къ ур. (123), (124), (126) и (127) добавить еще такія:

$$n_0+p_3 z_0=0 \quad , \quad p_3 \mathrm{Z}+\mathrm{N}=0,$$
$$n_0+(p_3+\pi)z_0=0. \qquad (128)$$

Общіе лучи трехчленной группы комплексовъ (125), (127) и (128) суть оси винтовъ (Γ) даннаго параметра π; они лежатъ на гиперболоидѣ

$$(p_1+\pi)x^2+(p_2+\pi)y^2+(p_3+\pi)z^2+$$
$$+(p_1+\pi)(p_2+\pi)(p_3+\pi)=0,$$

т. е. на гиперболоидѣ винтовъ параметра $(-\pi)$ трехчленной

группы винтовъ (C_1), (C_2) и (C_3). Легко видѣть, что оси винтовъ (C) и (Γ) не могутъ быть на этомъ гиперболоидѣ производящими одного и того-же рода. Дѣйствительно, такъ какъ параметры ихъ равны по абсолютной величинѣ, но противны по знаку, то условіе взаимности принимаетъ видъ:

$$d \sin \varphi = 0,$$

что возможно лишь тогда, когда обѣ образующія пересѣкаются.

Косыя координаты винта.

§ 41. Пусть имѣемъ шесть независимыхъ винтовъ $(1), \ldots (6)$ и какой-либо седьмой винтъ (C) съ координатами $(X, Y, \ldots)$. Мы знаемъ, что такомъ случаѣ всегда можно подобрать такихъ шесть величинъ $R_1, \ldots R_6$, чтобы имѣли мѣсто уравненія:

$$\begin{array}{c} R_1 X_1 + R_2 X_2 + \ldots + R_6 X_6 = X, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_1 N_1 + R_2 N_2 + \ldots + R_6 N_6 = N, \end{array} \qquad (129)$$

т. е. всегда можно сообщить даннымъ шести независимымъ винтамъ такіе главные векторы $R_1, \ldots R_6$, чтобы система $(C, 1)$ была результирующей системъ $(1, R_1), \ldots (6, R_6)$. Величины $R_1, \ldots R_6$ не независимы между собою; между ними существуетъ тождественное соотношеніе, которое получимъ, возвысивъ три первыхъ уравненія (129) въ квадратъ и сложивъ:

$$\begin{array}{c} R_1^2 + \ldots + R_6^2 + 2 R_1 R_2 \cos(1, 2) + \ldots \\ \ldots + 2 R_5 R_6 \cos(5, 6) = 1; \end{array} \qquad (130)$$

оно означаетъ, что, сложивъ главные векторы по правилу многоугольника, мы должны получить векторъ равный единицѣ.

Итакъ, зная координаты винта (C), мы, рѣшивъ систему ур. (129), опредѣлимъ величины $R_1, \ldots R_6$ и притомъ одно-

значно; обратно, зная шесть величинъ, удовлетворяющихъ ур. (129), мы опредѣлимъ координаты $(X,Y,\ldots)$ винта (C). Величины $R_1,\ldots R_6$ называются *косыми* координатами винта, а шесть винтовъ $(1),\ldots(6)$—координатными винтами. Имѣя шесть величинъ, которымъ *пропорціональны* косыя координаты винта, мы опредѣлимъ помощью ур. (130) коэффиціентъ пропорціональности и будемъ знать сами косыя координаты.

Умноживъ послѣднія три изъ уравненій (129) послѣдовательно на три первыя и сложивъ, получимъ параметръ p винта C:

$$p=R_1^2+\ldots+R_6^2+2R_1R_2\Omega_{1,2}+\ldots+2R_5R_6\Omega_{5,6}. \quad (131)$$

Если умножимъ ур. (129) на какую нибудь величину R и обозначимъ:

$$R'_n=R.R_n\ , \quad n=1,\ldots 6, \quad (132)$$

то R'_n $(n=1,\ldots 6)$ представятъ тѣ значенія, которыя мы должны дать главнымъ векторамъ на винтахъ $(1),\ldots(6)$, чтобы результирующая система была эквивалентна системѣ (C,R), поэтому величины R'_n называются координатами системы (C,R). Какъ было показано въ § 21, системѣ уравненій (129) можно дать видъ:

$$\begin{array}{l} R_1p_1+R_2\Omega_{1,2}+\ldots+R_6\Omega_{1,6}=\Omega_{C,1}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_1\Omega_{6,1}+R_2\Omega_{6,2}+\ldots+R_6p_6=\Omega_{C,6}\ . \end{array} \quad (133)$$

§ 42. Если три первыхъ изъ координатныхъ винтовъ примемъ лежащими соотвѣтственно на осяхъ Ox, Oy, Oz съ параметрами, равными нулямъ, а три остальныхъ возьмемъ на тѣхъ-же осяхъ, но съ параметрами безконечно-большими, то косыя координаты $R_1,R_2,\ldots$ обращаются въ $X,Y,\ldots$, которыя могутъ быть названы *прямоугольными*.

Другая изъ простѣйшихъ системъ координатныхъ винтовъ есть шесть винтовъ нулевыхъ параметровъ, лежащихъ на ребрахъ тетраэдра $ABCD$ (фиг. 9), взятые въ порядкѣ AD, DB, CD, BC, AC, AB. Въ этомъ случаѣ изъ относительныхъ моментовъ $2.\Omega_{r,s}\left(\begin{smallmatrix} r=1,\dots 6\\ s=1,\dots 6\end{smallmatrix}\right)$ только $2.\Omega_{1,4}=2.\Omega_{4,1}$, $2.\Omega_{2,5}=2.\Omega_{5,2}$, $2.\Omega_{3,6}=2.\Omega_{6,3}$ отличны отъ нуля, и уравненія (133) даютъ:

$$R_1=\frac{\Omega_{C,4}}{\Omega_{4,1}},\ R_2=\frac{\Omega_{C,5}}{\Omega_{5,2}},\ R_3=\frac{\Omega_{C,6}}{\Omega_{6,3}}. \qquad (134)$$

Если обозначимъ черезъ $(ABCD)$ взятый съ надлежащимъ знакомъ объемъ пирамиды, построенной на ребрахъ AB и CD, то знаменатели выраженій (134) могутъ быть замѣнены объемами $\frac{3(BCAD)}{BC.AD}$, $\frac{3(ACDB)}{AC.BD}$, ...; въ частномъ-же случаѣ, когда параметръ винта (C) равенъ нулю, и мы обозначимъ черезъ M начало, а черезъ N конецъ отрѣзка $MN=1$, лежащаго на оси винта (C), и числители выраженій (134) обращаются въ объемы $\frac{3(MNBC)}{BC}$, $\frac{3(MNAC)}{AC}$, ..., и мы получаемъ:

$$R_1=AD.\frac{(MNBC)}{(BCAD)},\quad R_2=DB.\frac{(MNAC)}{(ACDB)},\dots.\ ^{1})$$

Система координатныхъ винтовъ, расположенныхъ по ребрамъ тетраэдра, не имѣетъ такого значенія для приложеній, какъ система *совзаимныхъ* винтовъ, предложенная Klein'омъ.

Винтъ (1) выбираемъ произвольно, винтъ (2) — взаимнымъ съ винтомъ (1), винтъ (3)—взаимнымъ съ винтами (1) и (2) и т. д., наконецъ, винтъ (6) — взаимнымъ съ винтами (1), (2),....(5). Такъ какъ въ такомъ случаѣ

---

[1]) Möbius. Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen. Journal von Crelle. Bd. 18; p. 207.

$$\Omega_{n,m}=0\,, \qquad n \lessgtr m,=1,\ 2,\ldots 6,$$

а

$$\Omega_{n,n}=p_n\,,$$

то ур. (133) даютъ:

$$R_k=\frac{1}{p_k}\Omega_{C,k}=\frac{1}{2p_k}(LX_k+MY_k+NZ_k+XL_k+YM_k+ZN_k),$$
$$k=1,\ldots 6. \qquad (135)$$

Эти формулы показываютъ, что для того чтобы можно было шесть совзаимныхъ винтовъ принять за координатные винты, ихъ параметры должны отличаться отъ нулей.

Зная координаты $(R_1,\ldots R_6)$, опредѣлимъ параметръ по формулѣ (131), которая въ данномъ случаѣ обращается въ такую:

$$p=R_1^2p_1+\ldots+R_6^2p_6\,, \qquad (136)$$

или, пользуясь ур. (135):

$$p=\frac{\Omega_{C,1}^2}{p_1}+\ldots+\frac{\Omega_{C,6}^2}{p_6}\,. \qquad (136_1)$$

Выразимъ въ новыхъ координатахъ относительный моментъ двухъ винтовъ (C) и (Γ), координаты которыхъ $(R_1,\ldots R_6)$ и $(P_1,\ldots P_6)$. Системы векторовъ $(C,1)$ и $(\Gamma,1)$ могутъ быть каждая замѣнены 6-ю системами: $(1,R_1),\ldots(6,R_6)$ и $(1,P_1),\ldots(1,P_6)$; слѣдовательно ихъ относительный моментъ равенъ суммѣ моментовъ каждой изъ системъ $(1,R_1),\ldots(6,R_6)$ относительно системъ $(1,P_1),\ldots(1,P_6)$:

$$2.\Omega_{C,\Gamma}=2.\Sigma\ R_kP_l\ \Omega_{k,l}\,;$$

но если $k \lessgtr l$, то $\Omega_{k,l}=0$, если-же $k=l$, то $\Omega_{k,k}=p_k$, слѣдовательно:

$$\Omega_{C,\Gamma}=R_1P_1p_1+\ldots.+R_6P_6p_6. \qquad (137)$$

Винты (C) и (Γ) взаимны, если

$$R_1P_1p_1+\ldots.+R_6P_6p_6=0. \qquad (138)$$

Отсюда слѣдуетъ, что если между координатами какого-либо винта (C) существуетъ однородное линейное уравненіе:

$$A_1R_1+\ldots.+A_6R_6=0,$$

то винтъ (C) взаименъ съ винтомъ (Γ), координаты котораго пропорціональны отношеніямъ:

$$\frac{A_1}{p_1},\ldots.\frac{A_6}{p_6}. \qquad (139)$$

Винтъ, координаты котораго удовлетворяютъ n однороднымъ линейнымъ уравненіямъ, взаименъ съ n винтами.

§ 43. Въ ур. (135) вставимъ вмѣсто $X, Y, \ldots.$ ихъ выраженія по формуламъ (114); тогда получимъ:

$$R_k=\frac{1}{2p_k}(X_kl_0+Y_km_0+Z_kn_0+L_kx_0+M_ky_0+N_kz_0)$$

$$+\frac{p}{2p_k}(X_kx_0+Y_ky_0+Z_kz_0).$$

Но, обозначивъ черезъ $(r_1,\ldots.r_6)$ косыя координаты особаго винта $(x_0, y_0, \ldots.)$, ось котораго совпадаетъ съ осью винта (C), будемъ имѣть по ур. (135):

$$r_k=\frac{1}{2p_k}(X_kl_0+Y_km_0+\ldots.+N_kz_0);$$

кромѣ того:

$$X_kx_0+Y_ky_0+Z_kz_0=cos(k, C),$$

слѣдовательно,

$$R_k = r_k + \frac{p}{2p_k} \cos(k, C).$$

Нетрудно видѣть, что вторыя слагаемыя этихъ выраженій пропорціональны косымъ координатамъ $g_1, \ldots g_6$ винта безконечно-большаго параметра, ось котораго также совпадаетъ съ осью винта (C). Дѣйствительно, положимъ въ ур. (135):

$$X = Y = Z = 0,\ L = x_0,\ M = y_0,\ N = z_0;$$

тогда получимъ:

$$g_k = \frac{1}{2p_k}(X_k x_0 + Y_k y_0 + Z_k z_0) = \frac{1}{2p_k} \cos(k, C);$$

такимъ образомъ:

$$R_k = r_k + p g_k$$

Если спроэктируемъ векторы $g_1, \ldots g_6$ на ось винта (C), то алгебраическая сумма проэкцій должна быть нуль:

$$\frac{\cos^2(1,C)}{p_1} + \frac{\cos^2(2,C)}{p_2} + \ldots + \frac{\cos^2(6,C)}{p_6} = 0. \qquad (140)$$

Это уравненіе показываетъ, что изъ параметровъ шести совзаимныхъ координатныхъ винтовъ три должны быть положительны, а три отрицательны; ибо, предположивъ, что только p_5 и p_6 отрицательны, а остальные положительны, беремъ за ось винта (C) прямую перпендикулярную къ винтамъ (5) и (6); тогда въ ур. (140) лѣвая часть будетъ состоять изъ однихъ положительныхъ членовъ, что невозможно.

Кромѣ этого свойства, параметры шести совзаимныхъ винтовъ обладаютъ другимъ, именно: сумма обратныхъ ихъ значеній равна нулю.

Для доказательства [1]), пользуясь ур. (136), опредѣлимъ maximum p_m параметра p, причемъ будемъ имѣть въ виду, что между перемѣнными $R_1, \ldots R_6$ существуетъ тождественное соотношеніе (ср. 130):

$$R = \Sigma R_k^2 + 2\Sigma R_k R_m \cos(k\hat{,}m) - 1 = 0.$$

Умноживъ лѣвую часть этого уравненія на p_m, придадимъ ее къ правой части ур. (136) и продифференцируемъ полученный результатъ по $R_1, \ldots R_6$:

$$2p_1R_1 - p_m \frac{dR}{dR_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2p_6R_6 - p_m \frac{dR}{dR_6} = 0.$$

Исключивъ отсюда $R_1, \ldots R_6$, получимъ:

$$\begin{vmatrix} p_1 - p_m, & p_m A, \ldots & p_m D \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_m C & , p_m E, \ldots & p_6 - p_m \end{vmatrix} = 0, \qquad (141)$$

гдѣ $A, D, \ldots$ суть нѣкоторыя постоянныя. Но такъ какъ параметръ винта можетъ принимать любыя значенія, то единственно возможный maximum есть $p_m = \infty$, что требуетъ равенства нулю всѣхъ коэффиціэнтовъ этого уравненія, за исключеніемъ извѣстнаго члена. Уравнявъ нулю коэффиціентъ при p_m^5, получимъ:

$$-p_1p_2\ldots p_5 - p_1p_3\ldots p_6 - \ldots = 0,$$

[1]) Ball. § 134.

или, такъ какъ $p_1 \dots p_6$ отличны отъ нулей, то

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\dots+\frac{1}{p_6}=0. \qquad (142)$$

§ 44. Часто приходится производить операціи надъ винтами, принадлежащими къ одной и той-же группѣ; въ такомъ случаѣ очень важно имѣть въ числѣ шести координатныхъ винтовъ n, принадлежащихъ къ той-же группѣ, такъ какъ $6-n$ координатъ винта, именно относящіяся къ винтамъ, не входящимъ въ группу, будутъ нулями. Эти n новыхъ координатныхъ винтовъ должны быть независимы и кромѣ того, если возможно, совзаимны. Посмотримъ предварительно, какому условію должны удовлетворять косыя координаты n независимыхъ винтовъ, а затѣмъ покажемъ, какимъ образомъ можно изъ всѣхъ возможныхъ системъ по n независимыхъ винтовъ, составляющихъ одну и ту-же группу, выбрать n совзаимныхъ. Пусть имѣемъ n винтовъ, прямоугольныя и косыя координаты которыхъ суть:

$$\Xi_k,\ \mathrm{H}_k,\ \mathrm{Z}_k,\ \Lambda_k,\ \mathrm{M}_k,\ \mathrm{N}_k, \qquad k=1,2,\dots n,$$

и

$$R_{1k}\ ,\ R_{2k},\dots R_{6k}, \qquad k=1,\dots n; \qquad (143)$$

такъ что:

$$\begin{aligned} &R_{1k}X_1+R_{2k}X_2+\dots+R_{6k}X_6=\Xi_k,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &R_{1k}N_1+R_{2k}N_2+\dots+R_{6k}N_6=\mathrm{N}_k. \end{aligned} \qquad (144)$$

Обозначимъ группы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \Xi_1,\dots \mathrm{N}_1 \\ \dots\dots \\ \Xi_n,\dots \mathrm{N}_n \end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix} R_{11},\dots R_{61} \\ \dots\dots \\ R_{1n},\dots R_{6n} \end{vmatrix}, \qquad (145)$$

а черезъ D опредѣлитель системы уравненій (129):

$$D=\begin{vmatrix} X_1, \dots . X_6 \\ \dots\dots\dots\dots \\ N_1, \dots . N_6 \end{vmatrix}. \qquad (146)$$

Если изъ какого-либо опредѣлителя или группы A выпустимъ m_1-ую, m_2-ую,.... горизонтали и p_1-ую, p_2-ую,.... вертикали, то получимъ или опредѣлитель, или группу, которые будемъ обозначать черезъ $A^{p_1, p_2 \dots}_{m_1, m_2 \dots}$

Если n взятыхъ винтовъ независимы, то хотя одинъ изъ опредѣлителей n-аго порядка $\Delta^{m_1 \dots m_{6-n}}$ отличенъ отъ нуля. Но

$$\Delta^{m_1, \dots m_{6-n}} = D \,.\, D_{m_1, \dots m_{6-n}} = \sum_{p_1, \dots p_{6-n}} D^{p_1 \dots p_{6-n}} \,.\, D^{p_1, \dots p_{6-n}}_{m_1, \dots m_{6-n}}, \qquad (147)$$

и такихъ равенствъ будетъ столько, сколько разъ изъ группы Δ можно выбрасывать по $6-n$ различныхъ вертикалей, скажемъ k. Правая-же часть равенства (147) будетъ состоять изъ столькихъ слагаемыхъ, сколько разъ изъ группы D можно выбрасывать по $6-n$ различныхъ вертикалей, т. е. также k. При переходѣ отъ одного равенства къ другому будутъ мѣняться только вторые множители этихъ слагаемыхъ, первые-же остаются одними и тѣми-же. Отсюда видно, что если не всѣ опредѣлители $\Delta^{m_1, \dots m_{6-n}}$ суть нули, то не могутъ быть нулями всѣ опредѣлители $D^{p_1, \dots p_{6-n}}$; но легко доказать и обратное, что если всѣ первые опредѣлители нули, то будутъ нулями и всѣ вторые. Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ въ такомъ случаѣ k уравненій

$$\sum_{p_1, \dots p_{6-n}} D^{p_1, \dots p_{6-n}} \,.\, D^{p_1, \dots p_{6-n}}_{m_1, \dots m_{6-n}} = 0,$$

однородныхъ относительно k величинъ $D^{p_1, \dots p_{6-n}}$; если они удо-

влетворяются такими значеніями послѣднихъ, которыя не всѣ нули, то долженъ равняться нулю опредѣлитель системы этихъ уравненій. Этотъ-же опредѣлитель, будучи составленъ изъ миноровъ $6-n$-аго порядка опредѣлителя D, по извѣстной теоремѣ алгебры [1]), равенъ нѣкоторой степени опредѣлителя D и равенъ нулю быть не можетъ, такъ какъ 6 координатныхъ винтовъ независимы.

Итакъ, для независимости n винтовъ съ координатами (143), необходимо и достаточно, чтобы хотя одинъ опредѣлитель n-аго порядка изъ группы D былъ отличенъ отъ нуля.

§ 45. Пусть имѣетъ n независимыхъ винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$ съ координатами (143) и еще одинъ (C), координаты котораго $R_1, \ldots R_6$, и пусть возможно подобрать такъ величины $C_1, \ldots C_n$, чтобы имѣли мѣсто уравненія:

$$\begin{array}{c} C_1 R_{11} + \ldots + C_n R_{1n} = R_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 R_{61} + \ldots + C_n R_{6n} = R_6; \end{array} \quad (148)$$

въ такомъ случаѣ всѣ опредѣлители $(n+1)$-аго порядка изъ группы

$$\left\| \begin{array}{c} R_{11}, \ldots R_{1n}, R_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{61}, \ldots R_{6n}, R_6 \end{array} \right\|,$$

суть нули; винтъ (C) входитъ въ группу винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$. Обратно, если винтъ (C) входитъ въ группу независимыхъ винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$, то между его координатами и координатами винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$ существуютъ линейныя соотношенія вида (148). Постоянныя $C_1, \ldots C_n$ суть координаты винта (C) относительно винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$. Въ самомъ дѣлѣ,

[1]) Ярошенко С. Теорія опредѣлителей. Одесса. 1872 г. стр. 88, ур. (14).

сообщимъ винту (C_k) главный векторъ C_k; координаты полученной такимъ образомъ системы (C_k, C_k) будутъ:

$$C_k R_{1k}, \ldots . C_k R_{6k}.$$

Если сдѣлаемъ то-же самое относительно всѣхъ винтовъ (C_k), то на координатномъ винтѣ (1) окажется n главныхъ векторовъ:

$$C_1 R_{11}, \ldots . C_n R_{1n},$$

которые по сложеніи дадутъ главный векторъ

$$R_1 = C_1 R_{11} + \ldots . + C_n R_{1n};$$

точно такое-же значеніе имѣютъ координаты $R_2, \ldots . R_6$. И такъ какъ системы $(1, R_1), \ldots . (6, R_6)$ опредѣляютъ винтъ (C), то и системы $(C_1, C_1), \ldots . (C_n, C_n)$ опредѣляютъ тотъ-же винтъ. Параметръ винта (C) также выражается въ функціи координатъ $C_1, \ldots . C_n$, параметровъ и относительныхъ моментовъ винтовъ $(C_1), \ldots . (C_n)$. Имѣемъ по формулѣ (136):

$$p = \sum_{k=1}^{k=6} p_k R_k^2 = \sum_{k=1}^{k=6} p_k (C_1 R_{k1} + \ldots . + C_n R_{k6})^2 =$$

$$= C_1^2 \sum_{k=1}^{k=6} p_k R_{k1}^2 + \ldots . + C_n^2 \sum_{k=1}^{k=6} p_k R_{k6}^2 +$$

$$+ 2 C_1 C_2 \sum_{k=1}^{k=6} p_k R_{k1} R_{k2} + \ldots \ldots$$

или, имѣя въ виду ур. (136) и (137),

$$p = C_1^2 p_{C_1} + \ldots . + C_n p_{C_n} +$$

$$+ 2 C_1 C_2 \Omega_{C_1, C_2} + \ldots . + 2 C_{n-1} C_n \Omega_{C_{n-1}, C_n}, \qquad (149)$$

гдѣ $p_{C_1}, \ldots . p_{C_n}$ параметры винтовъ $(C_1), \ldots . (C_n)$.

§ 46. Давая въ ур. (148) постояннымъ $C_1, \ldots C_n$ различныя дѣйствительныя значенія, мы будемъ получать различные винты (C) n-членной группы; намъ остается еще показать, что въ числѣ различныхъ системъ по n независимыхъ винтовъ группы можно найти системы изъ совзаимныхъ винтовъ. Пусть $(C_1), \ldots (C_n)$—n независимыхъ винтовъ, и предположимъ, что удалось k первыхъ изъ нихъ подобрать такъ, что они представляютъ группу k совзаимныхъ винтовъ; покажемъ, что винтъ (C_{k+1}) можно замѣнить винтомъ (C'_{k+1}), взаимнымъ съ винтами $(C_1), \ldots (C_k)$. Координаты винта (C'_{k+1}) относительно винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$ обозначимъ черезъ $C_1, \ldots C_n$, тогда координаты того-же винта относительно какой-либо системы шести совзаимныхъ винтовъ будутъ выражаться формулами (148)

Условія взаимности винта (C'_{k+1}) съ винтами $(C_1), \ldots (C_k)$ будутъ:

$$R_1 R_{11} p_1 + \ldots + R_6 R_{61} p_6 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_1 R_{1k} p_1 + \ldots + R_6 R_{6k} p_6 = 0,$$

или:

$$R_{11}(C_1 R_{11} + \ldots + C_n R_{1n}) p_1 + \ldots + R_{61}(C_1 R_{61} + \ldots + C_n R_{6n}) p_6 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$R_{11}(C_1 R_{11} + \ldots + C_n R_{1n}) p_1 + \ldots + R_{6k}(C_1 R_{61} + \ldots + C_n R_{6n}) p_6 = 0;$$

и пользуясь уравненіями (136) и (137):

$$C_1 p_{c_1} + C_2 \Omega_{c_1, c_2} + \ldots + C_n \Omega_{c_1, c_n} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1 \Omega_{c_k, c_1} + C_2 \Omega_{c_k, c_2} + \ldots + C_n \Omega_{c_k, c_n} = 0;$$

а такъ какъ k первыхъ винтовъ совзаимны, то

$$\Omega_{c_r, c_s} = 0,$$

при $$r \gtrless s, = 1, 2, \ldots k;$$

и мы будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l} C_1 p_{c_1} + C_{k+1}\Omega_{c_1, c_{k+1}} + \ldots + C_n \Omega_{c_1, c_n} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_k p_{c_k} + C_{k+1}\Omega_{c_k, c_{k+1}} + \ldots + C_n \Omega_{c_k, c_n} = 0\,, \end{array} \qquad (150)$$

Вотъ какимъ уравненіямъ должны удовлетворять координаты $C_1, \ldots C_n$ винта (C'_{k+1}), чтобы онъ былъ взаименъ съ винтами $(C_1), \ldots (C_k)$. Давши въ этихъ уравненіяхъ координатамъ $C_{k+1}, \ldots C_n$ совершенно произвольныя значенія, лишь-бы они не всѣ были нули, опредѣлимъ изъ этихъ уравненій остающіяся k координатъ: $C_1, \ldots C_k$, и затѣмъ изъ ур. (148) и координаты $R_1, \ldots R_6$. Отсюда слѣдуетъ, что для составленія группы совзаимныхъ винтовъ нужно, взявъ первый винтъ (C'_1) произвольно, положить въ ур. (150) $k=1$; полученное уравненіе будетъ содержать n перемѣнныхъ $C_1, \ldots C_n$, изъ коихъ $(n-1)$ будутъ произвольны; давши имъ какія-либо значенія, опредѣлимъ изъ ур. (148) координаты втораго винта (C'_2) относительно винтовъ $(1), \ldots (6)$. Составимъ затѣмъ n новыхъ независимыхъ винтовъ $(C'_1), (C'_2), \ldots (C'_n)$, изъ коихъ два первыхъ уже будутъ совзаимны, а затѣмъ и систему двухъ уравненій, подобныхъ уравненіямъ (150), которыя и послужатъ къ опредѣленію винта C''_3, взаимнаго съ винтами (C''_1) и (C'_2); при выборѣ винта (C''_3) мы будемъ имѣть въ своемъ распоряженіи $(n-2)$ произвольныхъ постоянныхъ. Продолжая также далѣе прійдемъ къ искомой группѣ n совзаимныхъ независимыхъ винтовъ, при чемъ мы будемъ имѣть въ своемъ распоряженіи $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ произвольныхъ постоянныхъ.

§ 47. Принявъ n совзаимныхъ винтовъ группы въ число шести координатныхъ винтовъ, мы получимъ для координатъ каждаго винта группы и его параметра формулы, получающіяся изъ ур. (135), (136) и (136_1) положеніемъ $6-n$ координатъ равными нулямъ:

$$R_k = \frac{\Omega_{C,k}}{p_k}, \qquad k=1,2,\ldots n, \quad (151)$$

$$p = R_1^2 p_1 + \ldots + R_n^2 p_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\Omega_{C,k}^2}{p_k}. \quad (152)$$

Относительный моментъ двухъ винтовъ (C) и (Γ), принадлежащихъ къ группѣ, будетъ:

$$\Omega_{C,\Gamma} = \sum_{k=1}^{k=n} R_k P_k p_k, \quad (153)$$

и условіе ихъ взаимности:

$$\sum_{k=1}^{k=n} R_k P_k p_k = 0. \quad (154)$$

Отсюда опять слѣдуетъ, что если между координатами винта, принадлежащаго къ n-членной группѣ, существуетъ однородное линейное уравненіе:

$$A_1 R_1 + \ldots + A_n R_n = 0,$$

то этотъ винтъ взаименъ съ другимъ, n первыхъ координатъ котораго пропорціональны отношеніямъ:

$$\frac{A_1}{p_1}, \ldots \frac{A_n}{p_n}, \quad (155)$$

а остальныя произвольны.

§ 48. Мы видѣли, что при выборѣ n совзаимныхъ винтовъ изъ n-членной группы мы имѣли въ распоряженіи $\frac{n(n-1)}{2}$ произвольныхъ постоянныхъ. Параметры этихъ винтовъ суть функціи этихъ постоянныхъ, однако можно показать, что сумма обратныхъ значеній параметровъ сохраняетъ одно и то-же значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ слѣдующимъ образомъ составлять системы шести совзаимныхъ винтовъ: $6-n$ изъ нихъ взять взаимными съ n-членной группой и n—изъ входящихъ въ группу. Тогда (142):

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{p_k}+\sum_{k=n+1}^{k=6}\frac{1}{p_k}=0\,.$$

Оставляя $6-n$ первыхъ винтовъ безъ измѣненія, будемъ мѣнять n послѣднихъ; тогда, хотя параметры ихъ будутъ мѣняться, но всегда

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{p_k}=-\sum_{k=n+1}^{k=6}\frac{1}{p_k}=Const.$$

Принявъ n совзаимныхъ винтовъ группы въ число шести координатныхъ винтовъ, мы получимъ для координатъ $R_{n+1},\ldots R_6$ какого-либо винта группы значенія, равныя нулю, и изъ всѣхъ возможныхъ опредѣлителей группы D только одинъ,

$$\begin{vmatrix} R_{11},\ldots . R_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{1n},\ldots . R_{nn}\end{vmatrix}, \qquad (156)$$

не будетъ тождественно равенъ нулю; откуда слѣдуетъ, что неравенство этого опредѣлителя нулю есть необходимое и достаточное условіе того, чтобы n винтовъ группы были независимы.

Глава III.

Приложенія теоріи винтовъ къ механикѣ.

Приложенія къ кинематикѣ и статикѣ.

§ **49.** Если тѣло получаетъ безконечное малое вращеніе [1]) $d\omega$ вокругъ оси (C), то, какъ извѣстно, это перемѣщеніе характеризуется безконечно-малымъ векторомъ величины $d\omega$, отложеннымъ въ приличную сторону на оси (C). Каждое вращеніе AA_1 (фиг. 1) эквивалентно совокупности вращенія такой-же амплитуды, но вокругъ оси, параллельной AA_1 и проходящей черезъ точку O, и поступательнаго движенія, изображающагося по величинѣ, направленію и знаку моментомъ пары вращенія, взятымъ относительно точки O. Эта совокупность двухъ движеній можетъ быть въ свою очередь разбита на три вращенія x_0, y_0, z_0 вокругъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осей координатъ, проходящихъ черезъ точку O, и на три поступательныхъ движенія l_0, m_0, n_0, параллельныхъ этимъ осямъ. Шесть величинъ (2) могутъ быть названы координатами вращенія $d\omega$ вокругъ оси AA_1, и между ними существуетъ тождественное соотношеніе (3).

Если тѣло претерпѣваетъ цѣлый рядъ одновременныхъ или послѣдовательныхъ вращеній вокругъ различныхъ осей про-

---

[1]) Въ дальнѣйшемъ подъ какимъ-бы то ни было перемѣщеніемъ слѣдуетъ подразумѣвать перемѣщеніе безконечно-малое.

странства, то такая система вращеній эквивалентна одному вращенію вокругъ нѣкоторой оси, проходящей черезъ произвольную точку O, и равному геометрической суммѣ векторовъ, изъ коихъ каждый изображаетъ одно изъ частныхъ вращеній, сложенному съ поступательнымъ движеніемъ, равнымъ геометрической суммѣ моментовъ паръ, получающихся при замѣнѣ каждаго изъ данныхъ вращеній вращеніемъ такой-же амплитуды, но вокругъ оси, проходящей черезъ точку O. Эта совокупность двухъ движеній является результатомъ трехъ вращеній X, Y, Z вокругъ осей координатъ, проходящихъ черезъ точку O, и трехъ поступательныхъ движеній L, M, N, параллельныхъ этимъ осямъ. При этомъ замѣтимъ, что такъ какъ *всякое* перемѣщеніе эквивалентно совокупности нѣкотораго поступательнаго движенія и вращенія вокругъ оси, проходящей черезъ точку O, то мы можемъ сказать, что шесть величинъ (19) характеризуютъ всякое вообще перемѣщеніе и могутъ быть поэтому названы его координатами.

Между шестью координатами какого-либо перемѣщенія можетъ существовать связь вида (3); тогда въ общемъ случаѣ это показывало-бы, что перемѣщеніе эквивалентно вращенію вокругъ нѣкоторой оси пространства, въ частныхъ-же случаяхъ — на отсутствіе перемѣщенія или на его эквивалентность нѣкоторому поступательному движенію (§ 6). Если-же такого соотношенія между координатами не существуетъ, то можно всегда подобрать два вращенія вокругъ не пересѣкающихся и не параллельныхъ осей, которыя въ своей совокупности были-бы эквивалентны данному перемѣщенію. Такія два вращенія называются *сопряженными* (§ 8). Ось одного изъ нихъ, вообще говоря, произвольна, однако есть безчисленное множество прямыхъ, которыя не могутъ быть приняты за ось одного изъ сопряженныхъ вращеній; эти прямыя составляютъ *линейный комплексъ 1-го порядка* (§ 14). Ось комплекса обладаетъ тѣмъ кинематическимъ свойствомъ, что данное перемѣщеніе эквивалентно

вращенію $d\omega$ вокругъ этой оси, сложенному съ поступательнымъ движеніемъ $d\tau$ параллельнымъ ей (§ 10), другими словами, нѣкоторому винтовому движенію вокругъ оси комплекса. Высота хода H винта связана съ параметромъ p комплекса простымъ уравненіемъ

$$H = 2\pi\frac{d\tau}{d\omega} = 2\pi p. \qquad (157)$$

Представимъ себѣ наблюдателя, опирающагося на центральную ось такъ, что поступательное движеніе $d\tau$ направлено отъ его ногъ къ головѣ; если такому наблюдателю вращеніе $d\omega$ кажется происходящимъ по движенію часовой стрѣлки, то p считаютъ положительнымъ, въ противномъ случаѣ—отрицательнымъ; если $p=0$, то $d\tau=0$, и винтъ обращается въ ось вращенія. Изъ этого слѣдуетъ, что винтъ, какимъ онъ является въ теоріи векторовъ, вполнѣ опредѣляетъ собой тотъ винтъ, вокругъ котораго вращается тѣло при данномъ перемѣщеніи [1]). Для полнаго опредѣленія перемѣщенія нужно знать еще или величину поступательнаго движенія, или амплитуду $d\omega$ вращенія. Мы будемъ въ дальнѣйшемъ каждое безконечно-малое перемѣщеніе характеризовать нѣкоторымъ винтомъ (Γ) и амплитудой $d\omega$ и въ такомъ смыслѣ употреблять выраженіе: амплитуда $d\omega$ на мгновенномъ винтѣ (Γ).

Пусть тѣло не свободно; тогда оно не можетъ вращаться вокругъ каждаго винта пространства; мы предположимъ, что тѣло можетъ вращаться вокругъ двухъ винтовъ (Γ_1) и (Γ_2). Если мы дѣйствительно сообщимъ тѣлу вращеніе вокругъ этихъ винтовъ съ амплитудами $d\omega_1$ и $d\omega_2$, то результирующее перемѣщеніе можетъ быть опять разсматриваемо какъ винтовое движеніе вокругъ нѣкотораго третьяго винта, положеніе и параметръ котораго будутъ находиться въ зависимости не только отъ положеній и параметровъ винтовъ (Γ_1) и (Γ_2), но также

[1]) Высота хода одного и другаго винта различны; ср. ур. (61) и (157).

и отъ амплитудъ $d\omega_1$ и $d\omega_2$. Мѣняя послѣднія, мы получимъ цѣлую группу новыхъ винтовъ, вокругъ которыхъ тѣло можетъ также вращаться. Мы знаемъ, что они лежатъ на цилиндроидѣ, который можетъ быть построенъ по двумъ даннымъ винтамъ, и что въ числѣ ихъ есть два съ параметрами равными нулю (эти винты суть оси, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться). Если кромѣ винтовъ, лежащихъ на цилиндроидѣ, нѣтъ другихъ, вокругъ которыхъ тѣло могло-бы вращаться, то говорятъ, что оно обладаетъ *свободой 2-й степени*. Два какіе-либо винта на цилиндроидѣ, какъ опредѣляющіе группу, могутъ съ одинаковымъ правомъ служить для характеристики тѣхъ перемѣщеній, которыя можетъ получать тѣло. Такіе два винта называются независимыми.

Пусть тѣло можетъ вращаться вокругъ n винтовъ (Γ_1),.. ..(Γ_n); возьмемъ какіе-нибудь m изъ нихъ и, выбравъ какимъ-либо образомъ амплитуды $d\omega_1, \ldots d\omega_m$, сообщимъ тѣлу m винтовыхъ движеній съ этими амплитудами. Результирующее перемѣщеніе опять эквивалентно винтовому движенію вокругъ нѣкотораго новаго винта (Γ), положеніе и винтовой ходъ котораго зависятъ отъ числа m, отъ того, какіе m изъ винтовъ $(\Gamma_1), \ldots (\Gamma_n)$ выбраны, и отъ амплитудъ $d\omega_1, \ldots d\omega_m$. Предположимъ теперь, что какъ-бы мы не мѣняли эти условія, результирующій винтъ всегда отличенъ отъ $n-m$ остальныхъ винтовъ, въ такомъ случаѣ n винтовъ $(\Gamma_1), \ldots (\Gamma_n)$ независимы. Если тѣло можетъ вращаться только вокругъ n независимыхъ винтовъ, то говорятъ, что оно обладаетъ *свободой n-ой степени.*

Изслѣдованіе геометрическаго распредѣленія всѣхъ винтовъ, вокругъ которыхъ можетъ вращаться тѣло, обладающее свободой n-ой степени, сводится, слѣдовательно, на изученіе распредѣленія всѣхъ винтовъ, входящихъ въ n-членную группу. Этимъ изслѣдованіямъ посвящена глава II. Оказывается, напримѣръ, что винты, вокругъ которыхъ можетъ вращаться

тѣло, обладающее свободой 3-ей степени, распредѣляются по гиперболоидамъ, при чемъ на каждомъ изъ нихъ лежатъ винты съ одинаковымъ винтовымъ ходомъ (параметромъ). Среди нихъ есть гиперболоидъ винтовъ нулеваго параметра, т. е. гиперболоидъ осей, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться. Зная этотъ гиперболоидъ, мы легко можемъ построить всѣ остальные. И т. д.

Затѣмъ въ дальнѣйшихъ §§ показано, что если дано шесть независимыхъ винтовъ, то каждый новый винтъ входитъ въ группу, ими образованную; другими словами, если тѣло можетъ вращаться вокругъ 6-ти винтовъ, то оно можетъ вращаться вокругъ всякаго 7-го винта: тѣло, обладающее свободой 6-ой степени, вполнѣ свободно. Косыя координаты $P_1, \ldots P_6$ пропорціональны шести амплитудамъ $d\omega_1, \ldots d\omega_6$ винтовыхъ движеній на шести координатныхъ винтахъ, которыя въ своей совокупности даютъ амплитуду $d\omega$ на 7-мъ винтѣ (132):

$$d\omega_n = d\omega . P_n, \qquad n=1, \ldots 6; \qquad (158)$$

такъ что, выбравъ какъ-нибудь 6 независимыхъ винтовъ, мы можемъ амплитуду на какомъ-либо винтѣ опредѣлить этими шестью амплитудами $d\omega_1, \ldots d\omega_6$.

Если тѣло совершенно свободно, то эти 6 безконечно-малыхъ величинъ могутъ принимать совершенно произвольныя независящія другъ отъ друга значенія. Если-же тѣло стѣснено въ своихъ движеніяхъ, то между сказанными величинами должны существовать соотношенія вида

$$f_k(d\omega_1, \ldots d\omega_6)=0, \qquad k=1, \ldots 6. \qquad (159)$$

Лѣвыя части этихъ уравненій не могутъ содержать постояннаго члена, такъ какъ уравненія должны удовлетворяться положеніемъ $d\omega_1 = d\omega_2 = \ldots d\omega_6 = 0$; и такъ какъ эти перемѣн-

ныя безконечно-малы, то можно ограничиться только ихъ первыми степенями и представить ур. (159) въ видѣ:

$$R_1 p_1 d\omega_1 + \ldots . + R_6 p_6 d\omega_6 = 0,$$

или, имѣя въ виду (158):

$$R_1 p_1 P_1 + \ldots . + R_6 p_6 P_6 = 0, \qquad (160)$$

гдѣ $R_1, \ldots . R_6$—нѣкоторыя постоянныя, удовлетворяющія соотношенію вида (130).

Пять такихъ однородныхъ уравненій вполнѣ опредѣляютъ собою перемѣщеніе, и это есть наибольшее число, при которомъ вообще перемѣщеніе возможно.

Постоянныя $R_1, \ldots . R_6$ можно считать за косыя координаты нѣкотораго новаго винта (C), а ур. (160) за условіе взаимности винтовъ (Γ) и (C); оно показываетъ, что тѣло можетъ вращаться только вокругъ винтовъ (Γ), взаимныхъ съ (C). Если такихъ уравненій $6-n$:

$$R_{1k} p_1 P_1 + \ldots . + R_{6k} p_6 P_6 = 0, \quad k = 1, \ldots . 6-n, \qquad (161)$$

и они не зависятъ другъ отъ друга, то тѣло можетъ вращаться вокругъ винтовъ, взаимныхъ съ $6-n$ винтами, координаты которыхъ суть:

$$R_{1k}, R_{2k} \ldots . R_{6k}, \qquad k = 1, \ldots . 6-n.$$

Эти $6-n$ винтовъ будутъ независимы, если независимы $6-n$ уравненій (161), ибо тогда не всѣ опредѣлители $6-n$ порядка изъ группы

$$\left\| \begin{matrix} R_{11}, \ldots \ldots & R_{61} \\ \ldots \ldots . & \ldots \ldots \\ R_{16-n}, \ldots . & R_{66-n} \end{matrix} \right\|$$

равны нулю. Мы знаемъ, что есть только n независимыхъ винтовъ, взаимныхъ съ $6-n$ винтами, слѣдовательно, тѣло обладаетъ въ этомъ случаѣ свободой n-ой степени.

§ 50. До сихъ поръ мы обращали вниманіе только на кинематическое значеніе винта комплекса; посмотримъ теперь, какое значеніе имѣютъ его лучи.

Лучи комплекса, опредѣляемаго какимъ-либо перемѣщеніемъ (винтомъ), проходящіе черезъ какую-либо точку, суть нормали къ траэкторіи этой точки, т. е. полярная плоскость какой-либо точки нормальна къ траэкторіи этой точки. Принимаемъ за ось Oz ось винта и разлагаемъ перемѣщеніе на его слагающія $d\omega$ и $d\tau$; тогда косинусы угловъ, образуемыхъ касательной къ траэкторіи какой-либо точки A_1 (x_1, y_1, z_1) съ осями координатъ, пропорціональны величинамъ:

$$-y_1 d\omega,\quad x_1 d\omega,\quad d\tau,$$

а уравненіе плоскости, проходящей черезъ A_1 и нормальной къ этому направленію, будетъ:

$$-y_1(x-x_1)d\omega+x_1(y-y_1)d\omega+(z-z_1)d\tau=0,$$

или
$$-y_1 x+x_1 y+p(z-z_1)=0,$$

а это и есть уравненіе полярной плоскости точки A_1.

Если тѣло обладаетъ свободой 1-ой степени, то перемѣщеніе его вполнѣ опредѣлено: точки описываютъ элементы опредѣленныхъ винтовыхъ линій. Нормали къ траэкторіямъ различныхъ точекъ, какъ лучи комплекса, опредѣленнаго винтомъ, характеризующимъ свободу, имѣютъ распредѣленіе послѣднихъ; и такъ какъ лучъ комплекса есть лучъ для всѣхъ его точекъ, то въ такомъ перемѣщеніи прямая, нормальная къ траэкторіи одной изъ своихъ точекъ, нормальна къ траэкторіямъ всѣхъ ея точекъ.

Будемъ разсматривать точки тѣла, лежащія въ одной плоскости; нормальная плоскость къ траэкторіи одной изъ ея точекъ содержитъ лучъ комплекса, проходящій черезъ эту точку и лежащій въ плоскости, ибо онъ представляетъ также одну изъ нормалей къ траэкторіи; но всѣ лучи комплекса, лежащіе въ одной плоскости, проходятъ черезъ ея полюсъ, слѣдовательно: нормальныя плоскости къ траэкторіямъ различныхъ точекъ, лежащихъ въ одной плоскости, проходятъ черезъ полюсъ этой плоскости.

Мы знаемъ, что существуетъ безчисленное множество паръ прямыхъ такого рода, что перемѣщеніе эквивалентно совокупности двухъ вращеній вокругъ этихъ прямыхъ; это суть сопряженныя поляры комплекса. Изъ свойствъ этихъ прямыхъ, изложенныхъ въ § 14, слѣдуетъ: Нормали къ траэкторіямъ различныхъ точекъ, пересѣкающія какую-либо прямую, пересѣкаютъ ей сопряженную, и обратно, прямая, пересѣкающая двѣ сопряженныя прямыя, нормальна къ траэкторіямъ всѣхъ ея точекъ. Плоскости, нормальныя къ траэкторіямъ точекъ одной прямой, проходятъ черезъ прямую ей сопряженную, и обратно: точки плоскостей, проходящихъ черезъ одну и ту-же прямую, перемѣщающіяся по нормалямъ къ этимъ плоскостямъ, суть точки пересѣченія этихъ плоскостей съ прямой сопряженной.

Геометрическія свойства движенія тѣла, обладающаго свободой 1-ой степени, относятся и къ движенію тѣла, обладающаго свободой какой угодно степени, такъ какъ всякое безконечно-малое перемѣщеніе эквивалентно нѣкоторому винтовому движенію, и разница можетъ заключаться только въ большей или меньшей опредѣленности винта перемѣщенія.

Если тѣло обладаетъ свободой 2-ой степени, то есть два независимыхъ между собой винта, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться, всѣ-же вообще такіе винты лежатъ на цилиндроидѣ; въ числѣ ихъ есть два, D и Δ, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться, какъ около осей. Они суть сопряженныя поляры комплексовъ, опредѣляемыхъ всѣми возмож-

ными перемѣщеніями, и пересѣкаются общими лучами всѣхъ этихъ комплексовъ. Такъ какъ лучи каждаго изъ этихъ комплексовъ суть нормали соотвѣтствующихъ траэкторій, то, слѣдовательно, черезъ каждую точку *A* проходитъ одинъ лучъ, нормальный ко всѣмъ возможнымъ траэкторіямъ точки *A*; онъ есть нормаль къ поверхности, описанной точкой *A*. Итакъ, всѣ точки тѣла описываютъ поверхности, за исключеніемъ однако точекъ прямыхъ D и Δ. Черезъ каждую точку одной изъ этихъ прямыхъ проходитъ цѣлый пучекъ 1-го порядка общихъ нормалей, опредѣляемый разсматриваемой точкой, какъ центромъ, и другой изъ этихъ прямыхъ; эти точки описываютъ, слѣдовательно, элементы кривыхъ линій. Если будемъ разсматривать точки *A* нѣкоторой прямой *d*, то нормали къ поверхностямъ, описаннымъ точками этой прямой, какъ пересѣкающія три прямыя *d*, D и Δ, лежатъ на гиперболоидѣ, построенномъ на послѣднихъ.

Въ тѣлѣ, обладающемъ свободой 3-ей степени, точки могутъ перемѣщаться по совершенно произвольному направленію и только лежащія на нѣкоторомъ гиперболоидѣ описываютъ поверхности. Построимъ гиперболоидъ общихъ лучей трехъ комплексовъ, опредѣленныхъ тремя независимыми винтами, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться, и черезъ какую-нибудь точку *M*, внѣ его лежащую, проведемъ прямую, пересѣкающую гиперболоидъ въ точкахъ *A* и *B*. Черезъ эти точки проходитъ пара директрисъ D и Δ одной изъ конгруенцій, входящихъ въ трехчленную группу комплексовъ; другими словами, существуетъ цѣлая система возможныхъ перемѣщеній, которыя эквивалентны двумъ вращеніямъ вокругъ прямыхъ D и Δ. И, такъ какъ прямая *MAB* пересѣкаетъ эти двѣ прямыя, то она есть нормаль къ поверхности, описанной точкой при всѣхъ такихъ перемѣщеніяхъ. Пусть теперь *Mm* есть то направленіе, по которому мы желаемъ перемѣстить точку; тогда нужно только прямую *MAB* провести перпендикулярно къ *Mm*, и мы найдемъ направленіе нормали къ одной изъ возможныхъ поверхностей, касательная

плоскость къ которой въ точкѣ M содержитъ прямую Mm. Если-же точка M лежитъ на самомъ гиперболоидѣ, то черезъ нее проходитъ одинъ лучъ, общій всѣмъ возможнымъ комплексамъ, входящимъ въ трехчленную группу, т. е. одна прямая, нормальная ко всѣмъ возможнымъ перемѣщеніямъ точки; эта прямая есть нормаль къ поверхности, описанной точкой M.

Тѣмъ болѣе свободны точки тѣла, обладающаго свободой 4-ой степени; но и здѣсь есть въ общемъ случаѣ двѣ прямыя, точки которыхъ движутся по поверхностямъ; онѣ суть общіе лучи всѣхъ четырехъ комплексовъ, опредѣляемыхъ четырьмя независимыми винтами, характеризующими свободу движенія тѣла.

Такъ какъ пять комплексовъ не имѣютъ вообще общихъ лучей, то въ тѣлѣ, обладающемъ свободой 5-ой степени, нѣтъ точекъ, которыя перемѣщались-бы по опредѣленнымъ поверхностямъ.

§ 51. Мы не будемъ долго останавливаться на статическомъ толкованіи изложенной въ первыхъ двухъ главахъ теоріи, такъ какъ изъ каждой теоремы теоріи винтовъ получается теорема статики замѣной слова *векторъ* словомъ *сила*. Обратимъ вниманіе лишь на то, что, какъ слѣдуетъ изъ сказаннаго въ гл. II, для того чтобы n системъ силъ (C_1, R_1), (C_2, R_2), ... (C_n, R_n) находились въ равновѣсіи, необходимо, чтобы какой-либо изъ n винтовъ (C_1), ... (C_n) принадлежалъ къ группѣ, опредѣляемой $(n-1)$ остальными; и въ частности:

Двѣ системы силъ одинаковыхъ параметровъ могутъ лишь тогда уравновѣшиваться, когда ихъ винты лежатъ на одной прямой.

Три системы силъ одинаковыхъ параметровъ могутъ лишь тогда находиться въ равновѣсіи, когда ихъ винты пересѣкаются въ одной точкѣ.

Четыре системы силъ могутъ лишь тогда находиться въ равновѣсіи, когда ихъ винты лежатъ на одномъ и томъ-же гиперболоидѣ.

Въ случаѣ пяти винтовъ съ одинаковыми параметрами ихъ винты должны лежать на лучахъ одной и той-же конгруенціи.

Въ случаѣ шести такихъ системъ, ихъ винты должны лежать на лучахъ одного и того-же комплекса.

Наконецъ, въ случаѣ большаго числа такихъ системъ, мы не получаемъ никакого необходимаго условія для равновѣсія.

Само собою понятно, что все это имѣетъ мѣсто по отношенію къ тѣлу совершенно свободному. Для вывода условій равновѣсія силъ, приложенныхъ къ несвободному тѣлу, а также для выясненія той роли, какую играетъ въ механикѣ условіе взаимности двухъ винтовъ, опредѣлимъ элементарную работу силъ при безконечно-маломъ перемѣщеніи.

Пусть на тѣло, обладающее безконечно-малымъ перемѣщеніемъ, координаты коего суть: $d\omega\Xi$, $d\omega H$,.... дѣйствуетъ система силъ съ координатами RX, RY,....; опредѣлимъ элементарную работу силъ, соотвѣтствующую данному перемѣщенію. Перемѣщеніе тѣла слагается изъ таких шести перемѣщеній: трехъ вращеній $d\omega\Xi$, $d\omega H$, $d\omega Z$ вокругъ осей координатъ и трехъ поступательныхъ движеній $d\omega\Lambda$, $d\omega M$, $d\omega N$, параллельныхъ этимъ осямъ. Опредѣлимъ работу силъ при каждомъ изъ этихъ перемѣщеній и, сложивъ частныя работы, получимъ полную элементарную работу. Нашу систему силъ можно считать состоящею: 1) изъ силъ $(X+N)R, (Y+L)R, (Z+M)R$, приложенныхъ въ точкѣ O (фиг. 10), началу координатъ, и направленныхъ соотвѣтственно параллельно осямъ Ox, Oy, Oz и 2) изъ силъ $-RN$, $-RL$ и $-RM$, направленныхъ параллельно тѣмъ-же осямъ, но дѣйствующихъ въ точкахъ B, C, A, лежащихъ на осяхъ Oy, Oz и Ox въ разстояніяхъ равныхъ единицѣ отъ начала O.

Точка O обладаетъ тремя поступательными движеніями $d\omega\Lambda$, $d\omega M$, $d\omega N$; при этомъ работа силы $(X+N)R$ есть $Rd\omega(X+N)\Lambda$, остальныя два перемѣщенія $d\omega M$ и $d\omega N$ перпендикулярны къ направленію силы и соотвѣтственныя работы суть нули; также

работы силъ $R(Y+L)$ и $R(Z+M)$ равны $Rd\omega(Y+L)\mathrm{M}$ и $Rd\omega(Z+M)\mathrm{N}$. Полная работа силъ, приложенныхъ къ точкѣ O, есть слѣдовательно:

$$Rd\omega(X\Lambda+Y\mathrm{M}+Z\mathrm{N}+\Lambda N+\mathrm{M}L+\mathrm{N}M). \qquad (162)$$

Точка A обладаетъ перемѣщеніями $d\omega\Lambda$, $d\omega\mathrm{M}$, $d\omega\mathrm{N}$, параллельными осямъ Ox, Oy, Oz и кромѣ того, вращеніями $d\omega\mathrm{Z}$, $d\omega\mathrm{H}$, въ вращеніи-же $d\omega\Xi$ точка A не участвуетъ. Итакъ перемѣщенія точки A, параллельныя осямъ координатъ суть: $d\omega\Lambda$, $d\omega(\mathrm{M}+\mathrm{Z})$, $d\omega(\mathrm{N}-\mathrm{H})$, а подвержена она дѣйствію одной силы RM параллельной оси Oz; работа этой силы равна $-Rd\omega(\mathrm{N}-\mathrm{H})M$; точно также работы силъ, приложенныхъ къ точкамъ B и C, будутъ $-Rd\omega(\Lambda-\mathrm{Z})N$ и $-Rd\omega(\mathrm{M}-\Xi)L$. Складывая всѣ послѣднія работы, получимъ:

$$Rd\omega(M\mathrm{H}+N\mathrm{Z}+L\Xi-M\mathrm{N}-N\Lambda-L\mathrm{M}). \qquad (163)$$

Сумма выраженій (162) и (163) даетъ полную элементарную работу

$$d\mathrm{T}=Rd\omega(L\Xi+M\mathrm{H}+N\mathrm{Z}+X\Lambda+Y\mathrm{M}+Z\mathrm{N}), \qquad (164)$$

или:

$$d\mathrm{T}=Rd\omega.\,2\Omega_{c,r}.$$

Такимъ образомъ работа силы R на винтѣ (C) при амплитудѣ $d\omega$ на винтѣ (Γ), пропорціональна относительному моменту винтовъ (C) и (Γ), и есть выраженіе симметричное относительно координатъ обоихъ винтовъ.

Если винты (C) и (Γ) взаимны, то элементарная работа силъ равна нулю. Мы знаемъ (§ 20), что въ этомъ случаѣ систему силъ можно разсматривать какъ дѣйствующую по лучамъ комплекса (Γ), что и понятно, такъ какъ послѣдніе суть нормали къ траэкторіямъ, описаннымъ точками этихъ лучей при безконечно-маломъ вращеніи вокругъ винта (Γ).

Пусть на тѣло, обладающее свободой n-ой степени, характеризуемой винтами (Γ_1), ... (Γ_n), вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться, дѣйствуетъ сила R на винтѣ (C). По началу возможныхъ перемѣщеній, для того чтобы тѣло осталось въ равновѣсіи, необходимо и достаточно, чтобы работа силы R на винтѣ (C) при всѣхъ возможныхъ перемѣщеніяхъ была равна нулю; другими словами, относительный моментъ винтовъ (C) и каждаго винта (Γ), вокругъ котораго тѣло можетъ вращаться, долженъ быть равенъ нулю, что требуетъ чтобы винты (C) и (Γ) были взаимны. Но всякій винтъ, взаимный съ (Γ_1), ... (Γ_n), будетъ взаименъ съ (Γ); слѣдовательно, если тѣло можетъ вращаться только вокругъ n независимыхъ винтовъ (Γ_1), ... (Γ_n), то всякая сила R на винтѣ (C), взаимномъ съ винтами (Γ_1), ... (Γ_n), будетъ находиться въ равновѣсіи; она будетъ уравновѣшиваться реакціями связей, которымъ, слѣдовательно, соотвѣтствуетъ винтъ, взаимный съ винтами свободы.

Приложенія къ динамикѣ.

§ 52. Каждому мгновенному винту (Γ) съ амплитудой $d\omega$ соотвѣтствуетъ другой винтъ (C), винтъ мгновенныхъ силъ, способныхъ въ теченіе безконечно-малаго времени dt сообщить тѣлу то безконечно-малое перемѣщеніе, которымъ оно обладаетъ; винтъ (C) называется *импульсивнымъ*. Для полнаго опредѣленія системы мгновенныхъ силъ нужно кромѣ винта (C) знать еще величину равнодѣйствующей силы R, *напряженіе импульсивнаго винта*. Чтобы найти связь между координатами винтовъ (C) и (Γ), прійимемъ главныя оси инерціи тѣла за оси координатъ и, сообщивъ импульсивному винту напряженіе R, обозначимъ черезъ $d\omega$ амплитуду винта соотвѣтствующаго перемѣщенія. Координаты системы мгновенныхъ силъ и перемѣщенія будутъ

$$R.X,\ R.Y,\ R.Z,\ R.L,\ R.M,\ R.N,$$

$$d\omega.\Xi,\ d\omega.\mathrm{H},\ d\omega.Z,\ d\omega.\Lambda,\ d\omega.\mathrm{M},\ d\omega.\mathrm{N};$$

и если M_0 масса тѣла, то пусть:

$$M_0 : dt = M'_0 . \tag{165}$$

Тогда, какъ извѣстно [1]), будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} d\omega.\Lambda &= R\frac{X}{M'_0}, \quad d\omega.\mathrm{M} = R\frac{Y}{M'_0}, \quad d\omega.\mathrm{N} = R\frac{Z}{M'_0}, \\ d\omega.\Xi &= R\frac{L}{a^2 M'_0}, \quad d\omega.\mathrm{H} = R\frac{M}{b^2 M'_0}, \quad d\omega.\mathrm{Z} = R\frac{N}{c^2 M'_0}, \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

гдѣ a^2, b^2, c^2 суть главные радіусы інерціи тѣла.

Отсюда слѣдуетъ, что если прямоугольныя координаты винта (C) суть: $X, Y, \ldots .$, то прямоугольныя координаты винта (Γ) будутъ:

$$Q\frac{L}{a^2}, \quad Q\frac{M}{b^2}, \quad Q\frac{N}{c^2}, \quad QX, \quad QY, \quad QZ, \tag{167}$$

гдѣ:

$$Q^2 = 1 : \left(\frac{L^2}{a^4} + \frac{M^2}{b^4} + \frac{N^2}{c^4}\right). \tag{168}$$

Затѣмъ по формуламъ (135), получаемъ косыя координаты $P_1, \ldots . P_6$, винта (Γ), относительно шести какихъ-либо совзаимныхъ винтовъ, выраженныя въ функціи прямоугольныхъ координатъ винта (C):

$$2P_k p_k = Q\left(XX_k + YY_k + ZZ_k + \frac{LL_k}{a^2} + \frac{MM_k}{b^2} + \frac{NN_k}{c^2}\right) \tag{169}$$

$$k = 1, \ldots . 6.$$

Посмотримъ, нельзя-ли сообщить тѣлу такое безконечно-малое перемѣщеніе, чтобы винты (C) и (Γ) были тождественны какъ по положенію, такъ и по параметру. Такъ какъ въ

[1]) W. Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig. 1880 II Bd. pp. 353, 361.

случаѣ трехоснаго эллипсоида главныя оси инерціи суть единственныя оси тѣла, обладающія тѣмъ свойствомъ, что если тѣло получитъ вокругъ нихъ безконечно-малое вращеніе, то ось соотвѣтствующей мгновенной пары будетъ параллельна оси вращенія, то винтъ (Γ) долженъ лежать на одной изъ нихъ. Обозначивъ черезъ p_x, p_y, p_z и π_x, π_y, π_z параметры обоихъ винтовъ, соотвѣтствующихъ осямъ Ox, Oy, Oz, будемъ имѣть по формуламъ (166):

$$\pi_x=\frac{a^2}{p_x},\quad \pi_y=\frac{b^2}{p_y},\quad \pi_z=\frac{c^2}{p_z};$$

и, такъ какъ мы должны имѣть: $p_x=\pi_x$, $p_y=\pi_y$, $p_z=\pi_z$, то $p_x=\pm a$, $p_y=\pm b$, $p_z=\pm c$.

Итакъ: есть всего шесть винтовъ, лежащихъ на главныхъ осяхъ инерціи, съ параметрами $\pm a$, $\pm b$ и $\pm c$, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что если принять ихъ за винты импульсивные, то винты соотвѣтствующихъ перемѣщеній съ ними тождественны. Эти шесть винтовъ называются *главными винтами инерціи*. Прямоугольныя координаты ихъ суть:

$$\left.\begin{array}{llllll}
1, & 0, & 0, & p_1=a, & 0, & 0\\
0, & 1, & 0, & 0, & p_2=b, & 0\\
0, & 0, & 1, & 0, & 0, & p_3=c\\
1, & 0, & 0, & p_4=-a, & 0, & 0\\
0, & 1, & 0, & 0, & p_5=-b, & 0\\
0, & 0, & 1, & 0, & 0, & p_6=-c
\end{array}\right\}\quad(170)$$

и, такъ какъ эти шесть винтовъ совзаимны, то мы будемъ принимать ихъ за шесть координатныхъ винтовъ. Формулы (169) обратятся въ такія:

$$2P_1p_1^2=Q(L+p_1X),\quad 2P_2p_2^2=Q(M+p_2Y),\ldots; \qquad (171)$$

но, обозначивъ черезъ $R_1,\ldots R_6$ координаты винта (C), будемъ имѣть по ур. (135):

$$2R_1 p_1 = (L + p_1 X),\ 2R_2 p_2 = (L + p_2 Y), \ldots; \qquad (172)$$

откуда:

$$\frac{P_k}{R_k} p_k = Const. = Q. \qquad (173)$$

§ 53. Теорему о главныхъ винтахъ инерціи можно слѣдующимъ образомъ распространить на случай тѣла, обладающаго свободой n-ой степени.

Изъ n-членной группы винтовъ, вокругъ которыхъ тѣло можетъ вращаться, всегда можно выбрать n, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что каждый изъ нихъ есть одновременно и импульсивный и мгновенный винтъ.

Пусть $(C_1), \ldots (C_n)$—n совзаимныхъ винтовъ, характеризующихъ свободу тѣла, а $(C_{n+1}), \ldots (C_6)$ винты имъ взаимные;

$$R_{1k}, \ldots R_{6k}, \qquad k = 1, \ldots 6,$$

—координаты ихъ относительно главныхъ винтовъ инерціи; $C_1, \ldots C_n$ координаты какого-либо импульсивнаго винта (C) n-членной группы относительно винтовъ $(C_1), \ldots (C_n)$; координаты его относительно винтовъ $(1), \ldots (6)$ будутъ:

$$C_1 R_{k1} + \ldots + C_n R_{kn}, \qquad k = 1, \ldots 6.$$

Соотвѣтствующій мгновенный винтъ будетъ отличенъ отъ того, какой получился-бы, если-бы тѣло было совершенно свободно, такъ какъ кромѣ импульса на винтѣ (C) мы должны еще принять во вниманіе импульсъ на винтѣ (C'), соотвѣтствующемъ реакціямъ связей. Этотъ послѣдній принадлежитъ къ группѣ винтовъ $(C_{n+1}), \ldots (C_6)$, и пусть его координаты относительно послѣднихъ будутъ $C_{n+1}, \ldots C_6$. Введя реакціи, мы можемъ разсматривать тѣло, какъ совершенно свободное и подверженное дѣйствію импульса съ координатами:

$$C_1 R_{k1} + \ldots + C_6 R_{k6}, \qquad k = 1, \ldots 6.$$

По ур. (173) координаты соотвѣтствующаго мгновеннаго винта можно положить равными:

$$(C_1 R_{k1} + \ldots + C_6 R_{k6}) \frac{Q}{p_k}, \qquad k=1, \ldots 6.$$

И такъ какъ этотъ винтъ долженъ быть тождественъ съ винтомъ (C), то мы должны имѣть:

$$p_k(C_1 R_{k1} + \ldots + C_n R_{kn}) = Q(C_1 R_{k1} + \ldots + C_6 R_{k6}), \quad k=1, \ldots 6. \tag{174}$$

Обозначивъ

$$\sum_{k=1}^{k=6} p_k^2 R_{kl} R_{km} = A_{lm} \tag{175}$$

и имѣя въ виду, что

$$\sum_{k=1}^{k=6} p_k R_{kl} R_{km} = \Omega_{C_l, C_m}, \tag{176}$$

умножимъ систему ур. (174) соотвѣтственно на $p_1 R_{1m}, \ldots p_6 R_{6m}$ и сложимъ:

$$C_1 A_{1m} + \ldots + C_n A_{nm} = Q(C_1 \Omega_{1,m} + \ldots + C_6 \Omega_{6,m});$$

но такъ какъ винтъ (C_m) взаименъ со всѣми винтами $(C_1), \ldots (C_n)$, исключая его самаго, то:

$$C_1 A_{1m} + \ldots + C_n A_{nm} = Q C_m p_{C_m}; \qquad m=1, \ldots n.$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть такую систему уравненій:

$$\begin{array}{l} C_1(A_{11} - Q p_{C_1}) + C_2 A_{21} + \ldots + C_n A_{n1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 A_{1n} + C_2 A_{2n} + \ldots + C_n (A_{nn} - Q p_{C_n}) = 0. \end{array} \tag{177}$$

Исключивъ отсюда перемѣнныя $C_1, \ldots C^n$, получимъ уравненіе n-ой степени относительно Q:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-Qp_{c_1}, & A_{21}, & \ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{12}, & A_{22}-Qp_{c_2}, & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n}, & \ldots A_{2n}, & \ldots\ldots & A_{nn}-Qp_{c_n} \end{vmatrix}=0. \qquad (178)$$

Такъ какъ всѣ опредѣлители

$$\begin{vmatrix} A_{kk}, & \ldots & A_{nk} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{kn}, & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

суть величины положительныя, то всѣ корни этого уравненія дѣйствительны. Мы имѣемъ именно:

$$\begin{vmatrix} A_{kk}, & \ldots & A_{nk} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{kn}, & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} p_1 R_{1k}, & \ldots & p_6 R_{6k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1 R_{1n}, & \ldots & p_6 R_{6n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} p_1 R_{1k}, & \ldots & p_6 R_{6k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_1 R_{1n}, & \ldots & p_6 R_{6n} \end{Vmatrix},$$

т. е. каждый опредѣлитель можетъ быть представленъ въ видѣ квадрата нѣкоторой группы, а значитъ въ видѣ суммы квадратовъ всѣхъ опредѣлителей $(n-k+1)$-аго порядка, которые могутъ быть получены изъ группы вынущеніемъ $6-(n-k+1)$ вертикалей. Каждому корню Q ур. (178) соотвѣтствуетъ одна система значеній $C_1, \ldots C_n$, а значитъ — одинъ импульсивный винтъ (C), обладающій тѣмъ свойствомъ, что соотвѣтствующій ему мгновенный винтъ съ нимъ тождественъ. Такихъ винтовъ n, и называются они главными винтами инерціи тѣла, обладающаго свободой n-ой степени.

Легко доказать, что параметры n главныхъ винтовъ инерціи всѣ отличны отъ нуля. Дѣйствительно, по ур. (152) параметръ какого-либо изъ нихъ равенъ:

$$C_1^2 p_{c_1} + \ldots + C_n^2 p_{c_n}.$$

Но, умноживъ ур. (177) послѣдовательно на $C_1, C_2, \ldots. C_n$ и сложивъ, получимъ:

$$Q(C_1^2 p_{c_1} + \ldots. + C_n^2 p_{c_n}) = \sum_{i,k} A_{ik} C_i C_k .$$

Въ правой части этого равенства мы имѣемъ квадратичную форму, инварьянтъ которой со всѣми его главными минорами положительны. Такая форма можетъ обратиться въ нуль только въ томъ случаѣ, если всѣ перемѣнныя $C_1, \ldots. C_n$ нули [1]), что не имѣетъ мѣста, такъ какъ равенъ нулю опредѣлитель системы уравненій (177).

Докажемъ, что n главныхъ винтовъ инерціи представляютъ группу n совзаимныхъ винтовъ, т. е. что между какими-либо двумя системами неизвѣстныхъ $C_{1l}, \ldots. C_{nl}$ и $C_{1m}, \ldots$ $\ldots C_{nm}$, соотвѣтствующими двумъ различнымъ корнямъ Q_l и Q_m ур. (178), и коэффиціентами $p_{c_1}, \ldots. p_{c_n}$ существуетъ связь (ср. 154):

$$\sum_{k=1}^{k=n} C_{kl} C_k^m p_{c_k} = 0. \qquad (179)$$

Такъ какъ параметры n главныхъ винтовъ инерціи отличны отъ нулей, то одинъ изъ нихъ можетъ быть принятъ за винтъ (C_1) въ группѣ независимыхъ винтовъ $(C_1), \ldots. (C_n)$, причемъ остальные должны быть взяты такъ, чтобы были взаимны какъ съ нимъ, такъ и между собою. Въ такомъ случаѣ, давши въ ур. (177) величинѣ Q значеніе Q_1, соотвѣтствующее винту (C_1), мы должны получить такую систему значеній:

$$C_2 = C_3 = \ldots. = C_n = 0,$$

а для C_1 должно получиться значеніе совершенно произвольное. Это требуетъ, чтобы

[1]) Ср. Serret. Cours d'algèbre supérieure. T. I. § 247, откуда непосредственно вытекаетъ сказанное въ текстѣ.

$$A_{12}=A_{13}=\ldots=A_{1n}=0, \quad (180)$$
$$Q_1=A_{11}:p_{c_1},$$

и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} A_{22}-Qp_{c_2}, \ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots \\ A_{2n}, \ldots\ldots & A_{nn}-Qp_{c_n} \end{vmatrix}=0, \quad (178_1)$$

не удовлетворялось при $Q=Q_1$. Въ самомъ дѣлѣ, когда равенства (180) имѣютъ мѣсто, то ур. (177) сводятся къ такимъ:

$$\begin{aligned} &C_1(A_{11}-Qp_{c_1})=0, \\ &C_2(A_{22}-Qp_{c_2})+\ldots+C_nA_{n2}=0, \quad (181) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_2A_{2n}+\ldots+C_n(A_{nn}-Qp_{c_n})=0, \end{aligned}$$

и они могутъ лишь тогда дать для $C_2, \ldots C_n$ равныя нулямъ значенія, если при $Q=Q_1$ ур. (178_1) не удовлетворяется. Остальные $(n-1)$ винтовъ инерціи найдутся рѣшеніемъ ур. (178_1) и подстановкой его корней въ ур. (181). И, такъ какъ сейчасъ было показано, что корни ур. (178_1) отличны отъ Q_1, то множитель $A_{11}-Qp_{c_1}$ будетъ всегда отличенъ отъ нуля, т. е. всѣмъ остальнымъ значеніямъ Q будетъ соотвѣтствовать $C_1=0$, а это и есть условіе того, чтобы винты, соотвѣтствующіе этимъ корнямъ, принадлежали къ группѣ винтовъ (C_2), ...(C_n), взаимныхъ съ винтомъ (C_1), а значитъ и сами были-бы взаимны съ послѣднимъ. Принявъ одинъ изъ нихъ за винтъ C_2, мы опять получимъ:

$$A_{23}=A_{24}=\ldots=A_{2n}=0$$
$$Q_2=A_{22}:p_{c_2}$$

и убѣдимся, что $n-2$ оставшихся главныхъ винтовъ инерціи взаимны съ двумя первыми (C_1) и (C_2). Продолжая также да-

ліе, увидимъ, что дѣйствительно всѣ n главныхъ винтовъ инерціи представляютъ группу совзаимныхъ винтовъ и что, принявъ ихъ за винты $(C_1),\ldots(C_n)$, будемъ имѣть:

$$A_{lm}=0, \text{ при } l \lessgtr m, =1,\ldots n, \tag{182}$$

и

$$Q_k=A_{kk}:p_{c_k}, \quad k=1,\ldots\ldots n. \tag{183}$$

§ 54. Пусть (C) какой-либо импульсивный винтъ съ координатами $C_1,\ldots C_n$ относительно главныхъ винтовъ инерціи, а (Γ) — ему соотвѣтствующій мгновенный съ координатами $\Gamma_1,\ldots\Gamma_n$ относительно тѣхъ-же осей. Введя реакціи, мы получимъ, такія соотношенія между координатами обоихъ винтовъ:

$$(C_1 R_{k1}+\ldots+C_6 R_{k6})Q=p_k(\Gamma_1 R_{k1}+\ldots+\Gamma_n R_{kn}),$$
$$k=1,\ldots n,$$

и, произведя надъ этой системой уравненій такія-же дѣйствія, какъ надъ системой (174), получимъ:

$$QC_m p_{c_m}=\Gamma_1 A_{1m}+\ldots+\Gamma_n A_{nm}, \qquad m=1,\ldots n,$$

или, такъ какъ винты $(C_1),\ldots(C_n)$ суть n главныхъ винтовъ инерціи, то имѣютъ мѣсто ур. (182), и мы получимъ:

$$QC_m p_{c_m}=\Gamma_m A_{mm}, \qquad m=1,\ldots n.$$

Откуда слѣдуетъ, что если координаты мгновеннаго винта относительно главныхъ винтовъ инерціи пропорціональны величинамъ $\Gamma_1,\ldots\Gamma_n$, то координаты соотвѣтствующаго импульсивнаго винта пропорціональны величинамъ:

$$\frac{A_{11}}{p_{c_1}}\Gamma_1,\ldots\frac{A_{nn}}{p_{c_n}}\Gamma_n. \tag{184}$$

Если теперь предположимъ, что имѣемъ импульсъ на совершенно произвольномъ винтѣ, то его всегда можно разложить на два, изъ коихъ одинъ лежитъ на винтѣ (C), принадлежащемъ къ группѣ n винтовъ, характеризующихъ свободу, другой—на винтѣ взаимномъ (C'). Импульсъ на винтѣ (C') уничтожается реакціями, а остается импульсъ на винтѣ (C), принадлежащемъ къ винтамъ свободы, такъ называемый *сведенный импульсъ*; по предыдущему, его координаты относительно n главныхъ винтовъ инерціи будутъ пропорціональны выраженіямъ (184), въ которыхъ $\Gamma_1, \ldots \Gamma_n$ сами пропорціональны координатамъ вызваннаго этимъ импульсомъ мгновеннаго винта. Такимъ образомъ, если извѣстны координаты не сведеннаго импульса, то координаты мгновеннаго винта будутъ вполнѣ опредѣлены; если-же, обратно, даны координаты мгновеннаго винта, то будетъ опредѣленъ только сведенный импульсъ, но никакъ не тотъ, который былъ фактически сообщенъ тѣлу, ибо координаты винта мгновеннаго останутся тѣ-же, если мы къ сведенному импульсу добавимъ какой-либо другой, лежащій на винтѣ, взаимномъ съ винтами, характеризующими свободу движенія тѣла.

§ 55. Сообщимъ тѣлу амплитуду $d\omega$ на винтѣ (Γ) и высчитаемъ кинетическую энергію T перемѣщенія, отнесенную къ единицѣ времени. Если $P_1, \ldots P_6$—кординаты винта (Γ) относительно шести главныхъ винтовъ инерціи, то тѣло будетъ обладать такими движеніями: поступательными $(P_1 p_1 + P_4 p_4) d\omega$, $(P_2 p_2 + P_5 p_5) d\omega$, $(P_3 p_3 + P_6 p_6) d\omega$, параллельными осямъ Ox, Oy, Oz, и вращательными $(P_1 + P_4) d\omega$, $(P_2 + P_5) d\omega$, $(P_3 + P_6) d\omega$ вокругъ тѣхъ-же осей. Кинетическая энергія T винтоваго движенія будетъ опредѣляться уравненіемъ [1]):

$$2T_\Gamma = M_0 \frac{d\omega^2}{dt^2}\Big((P_1 p_1 + P_4 p_4)^2 + (P_2 p_2 + P_5 p_5)^2 + (P_3 p_3 P_6 p_6)^2 + \\ + (P_1 + P_4)^2 a^2 + (P_2 + P_5)^2 b^2 + (P_3 + P_6)^2 c^2\Big),$$

---

[1]) Schell. Theorie der Bewegung und der Kräfte. Bd. II, Th. IV, Cap I §§ 8 и 9.

или, имѣя въ виду значенія параметровъ (170):

$$T_\Gamma = M_0 \frac{d\omega^2}{dt^2}\left(P_1^2 p_1^2 + P_2^2 p_2^2 + \ldots + P_6^2 p_6^2\right) =$$
$$= M_0 \frac{d\omega^2}{dt^2} U_\Gamma^2, \quad (185)$$

гдѣ:
$$U_\Gamma^2 = P_1^2 p_1^2 + \ldots + P_6^2 p_6^2 \quad (186)$$

Сравнивая это выраженіе съ (175), видимъ, что коэффиціенты $A_{11}, \ldots A_{nn}$ могутъ быть замѣнены черезъ $U_{C_1}^2, \ldots U_{C_n}^2$, и вмѣсто выраженій (184), которымъ пропорціональны координаты импульсивнаго винта, мы получаемъ слѣдующія:

$$\frac{U_{C_1}^2}{p_{C_1}} \Gamma_1, \ldots \frac{U_{C_n}^2}{p_{C_n}} \Gamma_n^2. \quad (184_1)$$

Обозначимъ черезъ $\Gamma_1, \ldots \Gamma_n$ координаты винта (Γ), принадлежащаго къ группѣ n независимыхъ винтовъ $(\Gamma_1), \ldots (\Gamma_n)$, относительно этихъ винтовъ. Если $P_{1k}, \ldots P_{6k}$ координаты винта (Γ_k) относительно главныхъ винтовъ инерціи, то кинетическая энергія, соотвѣтствующая амплитудѣ $d\omega$ на винтѣ (Γ), будетъ:

$$T_\Gamma = M_0 \frac{d\omega^2}{dt^2} \sum_{k=1}^{k=6} (\Gamma_1 P_{k1} + \ldots + \Gamma_n P_{kn})^2 p_k^2 =$$

$$= M_0 \frac{d\omega^2}{dt^2} (\Gamma_1^2 U_{\Gamma_1}^2 + \ldots + \Gamma_n^2 U_{\Gamma_n}^2) + 2M^0 \frac{d\omega^2}{dt^2} \Gamma_1 \Gamma_2 \sum_{k=1}^{k=6} P_{k1} P_{k2} p_k^2 + \ldots$$

$$= T_{\Gamma_1} + \ldots + T_{\Gamma_n} + 2M_0 \frac{d\omega^2}{dt^2} \Gamma_1 \Gamma_2 \sum_{k=1}^{k=6} P_{k1} P_{k2} p_k^2 + \ldots (187)$$

Это выраженіе показываетъ, что кинетическая энергія результирующей амплитуды только въ томъ случаѣ равна суммѣ кинетическихъ энергій амплитудъ слагающихъ, когда послѣднія лежатъ на винтахъ, между координатами которыхъ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$\sum_{k=1}^{k=6} P_{k1} P_{k2} p_k^2 = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=6} P_{k2} P_{k3} p_k^2 = 0, \ldots\ldots \qquad (188)$$

Два винта, между координатами которыхъ имѣетъ мѣсто одно изъ такихъ соотношеній, называются *сопряженными винтами инерціи.*

Два сопряженныхъ винта инерціи (Γ_1) и (Γ_2) обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что если пріимемъ ихъ за винты мгновенные и обозначимъ черезъ (C_1) и (C_2) соотвѣтствующіе имъ импульсивные винты, то каждая пара винтовъ (Γ_1) и (C_2), (Γ_2) и (C_1) будутъ взаимны. Дѣйствительно, координаты винтовъ (C_1) и (C_2) пропорціональны (173) величинамъ

$$P_{11} p_1, \ldots\ldots\ldots\ldots P_{61} p_6,$$
$$P_{12} p_1, \ldots\ldots\ldots\ldots P_{62} p_6,$$

а условіе взаимности винтовъ (Γ_1) и (C_2) есть:

$$\sum_{k=1}^{k=6} P_{k1} P_{k2} p_k^2 = 0;$$

это есть вмѣстѣ съ тѣмъ условіе взаимности винтовъ (Γ_2) и (C_1).

Пріемомъ, вполнѣ аналогичнымъ тому, какой былъ употребленъ въ § 46, докажемъ, что изъ группы n винтовъ можно безчисленнымъ числомъ способовъ выбрать n такихъ, что каждые два изъ нихъ будутъ сопряженны; при этомъ въ нашемъ распоряженіи будетъ оставаться $\frac{n(n-1)}{1.2}$ произвольныхъ постоянныхъ. Пріимемъ какую-либо группу n сопряженныхъ винтовъ за основные винты группы; тогда кинетическая энергія, происходящая отъ амплитуды $d\omega$ на какомъ-либо винтѣ (Γ) группы, будетъ:

$$T_\Gamma = M_0 \frac{d\omega^2}{dt^2} U_\Gamma^2, \qquad (189)$$

гдѣ $$U_{\Gamma}^2 = \Gamma_1^2 U_{\Gamma_1}^2 + \ldots + \Gamma_n^2 U_{\Gamma_n}^2. \tag{190}$$

Такова кинетическая энергія тѣла, вращающагося съ n-ой степенью свободы вокругъ винта (Γ) съ амплитудой $d\omega$, если въ число шести координатныхъ винтовъ входятъ n сопряженныхъ, характеризующихъ свободу движенія.

Пусть $\Gamma_1, \ldots \Gamma_n$ и $\Gamma_1', \ldots \Gamma_n'$ координаты двухъ какихъ-либо сопряженныхъ винтовъ группы относительно сопряженныхъ винтовъ $(\Gamma_1), \ldots (\Gamma_n)$. Посмотримъ, какъ напишется условіе ихъ сопряженности. Обозначивъ черезъ $d\omega$ и $d\omega'$ амплитуды на этихъ винтахъ, будемъ имѣть для координатъ этихъ амплитудъ относительно 6-ти главныхъ винтовъ инерціи выраженія:

$$d\omega\Gamma_1 P_{11} + \ldots + d\omega\Gamma_n P_{1n}, \ldots d\omega\Gamma_1 P_{61} + \ldots + d\omega\Gamma_n P_{6n},$$
$$d\omega'\Gamma_1' P_{11} + \ldots + d\omega'\Gamma_n' P_{1n}, \ldots d\omega'\Gamma_1' P_{61} + \ldots + d\omega'\Gamma_1' P_{6n};$$

условіе сопряженности этихъ винтовъ есть:

$$d\omega\, d\omega' \sum_{k=1}^{k=6} p_k^2 (\Gamma_1 P_{k1} + \ldots + \Gamma_n P_{kn})(\Gamma_1' P_{k1} + \ldots + \Gamma_n' P_{kn}) = 0;$$

раскрывъ скобки, получимъ, имѣя въ виду ур. (188):

$$\sum_{k=1}^{k=n} \Gamma_k \Gamma_k' U_{\Gamma_k}^2 = 0. \tag{191}$$

Ур. (182) показываютъ, что n главныхъ винтовъ инерціи тѣла, обладающаго n-ой степенью свободы, представляютъ также группу сопряженныхъ винтовъ; но они вмѣстѣ съ тѣмъ совзаимны. Легко доказать, что изъ числа винтовъ свободы n главныхъ винтовъ инерціи представляютъ единственную группу совзаимныхъ и попарно сопряженныхъ винтовъ. Въ самомъ дѣлѣ, при выводѣ теоремы § 53 пріймемъ за винты $(C_1), \ldots (C_n)$ группу совзаимныхъ и попарно сопряженныхъ винтовъ; тогда ур. (177) обратятся въ такія:

$$O_k(A_{kk}-Qp_{c_k})=0, \qquad k=1,\ldots n,$$

что показываетъ, что искомые винты совпадаютъ съ координатными винтами $(C_1),\ldots(C_n)$.

§ 56. Предположимъ, что тѣло, обладающее свободой n-ой степени, находится подъ дѣйствіемъ непрерывныхъ силъ, при которыхъ имѣетъ мѣсто законъ сохраненія энергіи. Принявъ за начальное положеніе тѣла положеніе O устойчиваго равновѣсія, переведемъ его въ положеніе O', безконечно-близкое къ O, вращеніемъ амплитуды θ вокругъ какого-либо винта (θ). Количество кинетической энергіи, израсходованной при этомъ, означимъ черезъ F_θ. Пусть $\theta_1,\ldots\theta_n$ — координаты (θ) относительно n какихъ-либо винтовъ $(1),\ldots(n)$, характеризующихъ свободу движенія, и $\theta.\theta_k=\theta_k'$; тогда этими величинами θ_k' новое положеніе тѣла вполнѣ опредѣляется, и мы можемъ сказать, что F_θ есть нѣкоторая функція отъ координатъ $\theta_1',\ldots\theta_n'$ амплитуды θ винта перемѣщенія, которую можно представить въ видѣ:

$$F_\theta=H+H_1\theta_1'+\ldots+H_n\theta_n'+H_{11}\theta_1'^2+\ldots\ldots \qquad (192)$$

Но такъ какъ при $\theta_1'=0,\ldots\theta_n'=0$ потенціальная энергія равна нулю, то $H=0$; далѣе, по условію тѣло вышло изъ положенія устойчиваго равновѣсія, слѣдовательно для этого положенія F_θ имѣло minimum [1]), откуда

$$\frac{dF_\theta}{d\theta_1'}=0,\ldots\ldots\frac{dF_\theta}{d\theta_n'}=0;$$

и такъ какъ $\theta_1',\ldots\theta_n'$ суть величины безконечно-малыя, то, ограничиваясь вторыми ихъ степенями въ разложеніи (192), получаемъ:

---

[1]) Между потенціаломъ V и кинетической энергіей существуетъ связь $V=-F_\theta$ (см. W. Schell. Bd. II. S. 542), такъ что maximum'у V соотвѣт. minimum F_θ.

$$F_\theta = H_{11}\theta_1'^2 + 2H_{12}\theta_1'\theta_2' + \ldots + H_{nn}\theta_n'^2. \quad (193)$$

При переходѣ тѣла изъ положенія O въ O' нѣкоторая часть вызванныхъ непрерывныхъ силъ уничтожится реакціями связей, остальныя-же могутъ быть приведены къ безконечно-малой силѣ η на нѣкоторомъ винтѣ (η); мы будемъ называть ее сведеннымъ *непрерывнымъ* импульсомъ на винтѣ (η), въ отличіе отъ импульса мгновеннаго, происходящаго отъ дѣйствія мгновенныхъ силъ. Если η_k есть какая-либо координата винта (η), то соотвѣтствующая координата сведеннаго непрерывнаго импульса будетъ $\eta_k' = \eta.\eta_k$. Перемѣстимъ тѣло опять изъ положенія O' въ O'', измѣнивъ θ_k' на $\theta_k' + \delta\theta_k'$, при чемъ положимъ, что приращенія $\delta\theta_k'$ суть безконечно-малыя высшаго порядка сравнительно съ θ_k. Работа, затраченная при второмъ перемѣщеніи, равна разности значеній функціи F, соотвѣтствующихъ положеніямъ O'' и O', т. е., ограничиваясь первыми степенями безконечно-малыхъ $\delta\theta_k'$, равна:

$$\frac{dF_\theta}{d\theta_1'}\delta\theta_1' + \ldots + \frac{dF_\theta}{d\theta_n'}\delta\theta_n'. \quad (194)$$

Съ другой стороны, второе перемѣщеніе слагается изъ n перемѣщеній вокругъ каждаго изъ координатныхъ винтовъ $(1), \ldots (n)$ съ амплитудами $\delta\theta_1', \ldots \delta\theta_n'$; и, такъ какъ оно происходитъ подъ дѣйствіемъ непрерывныхъ импульсовъ $\eta_1', \ldots \eta_n'$, то затраченная работа равна:

$$-2\eta_1'\delta\theta_1'p_1 - \ldots - 2\eta_n'\delta\theta_n'p_n. \quad (195)$$

Сравнивая выраженія (194) и (195) и имѣя въ виду, что величины $\delta\theta_1', \ldots \delta\theta_n'$ совершенно произвольны, получаемъ:

$$\eta_k' = -\frac{1}{2p_k}\frac{dF_\theta}{d\theta_k'}, \qquad k = 1, \ldots n, \quad (196)$$

или: $$\eta\eta_k = -\frac{\theta}{p_k}(H_{k1}\theta_1 + \ldots + H_{kn}\theta_n), \quad k = 1, \ldots n.$$

§ 57. Для того чтобы винты (η) и (θ) совпадали, мы должны имѣть:

$$
\begin{aligned}
&\theta_1\left(\mathrm{H}_{11}+\frac{\eta}{\theta}\,p_1\right)+\theta_2\mathrm{H}_{12}+\ldots\ldots+\theta_n\mathrm{H}_{1n}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\theta_1\mathrm{H}_{n1}+\theta_2\mathrm{H}_{n2}+\ldots\ldots+\theta_n\left(\mathrm{H}_{nn}+\frac{\eta}{\theta}\,p_n\right)=0.
\end{aligned}
\qquad (197)
$$

Такъ какъ положеніе O тѣла было положеніемъ устойчиваго равновѣсія, при которомъ F_θ имѣетъ minimum, то какъ опредѣлитель

$$
\begin{vmatrix}
\mathrm{H}_{11}, \ldots\ldots \mathrm{H}_{1n}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{H}_{n1}, \ldots\ldots \mathrm{H}_{nn}
\end{vmatrix},
$$

такъ и всѣ его главные миноры суть величины положительныя [1]); отсюда слѣдуетъ, что корни уравненія n-ой степени, получающагося послѣ исключенія $\theta_1, \ldots \theta_k$ изъ системы ур. (197), всѣ дѣйствительны. Каждому корню $\frac{\eta}{\theta}$ соотвѣтствуетъ одна си-

---

[1]) Для того чтобы однородная функція второй степени $f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k$ имѣла при $x_1=0, \ldots x_n=0$ minimum, необходимо, чтобы она могла быть представлена въ видѣ

$$f(x_1, \ldots x_n)=E_1 X_1^2+\ldots+E_m X_m^2$$

гдѣ $E_1>0, \ldots E_m>0$, а $X_1, \ldots X_m$ суть линейныя функціи перемѣнныхъ $x_1, \ldots x_m$ (См. Serret. Cours de calcul différentiel. § 153). Въ томъ случаѣ когда инварьянтъ функціи и всѣ его миноры отличны отъ нуля, $m=n$, и

$$E_1=\Delta_1, \quad \dot{E}_2=\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots E_n=\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

гдѣ

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots\ldots a_{1i} \\ a_{i1}, \ldots\ldots a_{ii} \end{vmatrix};$$

откуда слѣдуетъ, что всѣ миноры Δ_i должны быть положительны (См. Serret. Cours d'algèbre sup. T. I. § 253).

стема значеній неизвѣстныхъ $\theta_1, \ldots \theta_n$, и мы можемъ сказать: въ тѣлѣ, обладающемъ свободой n-ой степени, каждой системѣ непрерывныхъ силъ, при которой имѣетъ мѣсто законъ сохраненія энергіи, соотвѣтствуетъ группа винтовъ, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что перемѣщеніе тѣла (изъ положенія устойчиваго равновѣсія) вокругъ каждаго изъ нихъ вызываетъ сведенный непрерывный импульсъ на немъ-же; каждый изъ этихъ винтовъ называется *главнымъ винтомъ потенціала*.

Между каждыми двумя системами неизвѣстныхъ $\theta_{1l}, \ldots \theta_{nl}$ и $\theta_{1m}, \ldots \theta_{nm}$ и коэффиціентами при $\frac{\eta}{\theta}$ существуетъ опять (179) соотношеніе:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \theta_{kl} \theta_{km} p_k = 0,$$

что показываетъ, что n главныхъ винтовъ потенціала совзаимны.

§ 58. Принявъ главные винты потенціала за координатные винты $(1), \ldots (n)$ будемъ имѣть такія значенія для $\frac{\eta}{\theta}$:

$$\left(\frac{\eta}{\theta}\right)_k = -\frac{H_{kk}}{p_k}, \qquad k=1, \ldots n, \quad (198)$$

и

$$H_{kl}=0, \qquad k \lesseqgtr l, =1, \ldots n.$$

Выраженіе для потенціальной энергіи принимаетъ видъ суммы n квадратовъ:

$$F_\theta = \theta^2(H_{11}\theta_1^2 + H_{22}\theta_2^2 + \ldots + H_{nn}\theta_n^2) = \theta^2 V_\theta^2. \qquad (199)$$

Ур. (198) показываютъ, что если амплитуда на одномъ изъ главныхъ винтовъ потенціала равна θ, то непрерывный импульсъ на томъ-же винтѣ пропорціоналенъ $\frac{H_{kk}}{p_k}\theta$. Предположимъ теперь, что $\theta_1, \ldots \theta_n$ суть координаты относительно главныхъ винтовъ

потенціала какого-либо винта (θ) перемѣщенія; тогда координаты соотвѣтствующаго сведеннаго непрерываго импульса будутъ пропорціональны:

$$\frac{V_1^2}{p_1}\theta_1, \ldots \frac{V_n^2}{p_n}\theta_n, \qquad (200)$$

гдѣ $V_k^2 = H_{kk}$ и есть значеніе V^2 относительно k-аго изъ главныхъ винтовъ потенціала.

Пусть теперь $\theta_{1k}, \ldots \theta_{nk}$, $k=1, \ldots n$, координаты n какихъ-либо винтовъ $(\theta_1), \ldots (\theta_n)$. Сообщивъ послѣднимъ амплитуды $\theta_1, \ldots \theta_n$, будемъ имѣть для координатъ амплитуды θ результирующаго винта такія значенія:

$$\theta_1\theta_{k1} + \theta_2\theta_{k2} + \ldots + \theta_n\theta_{kn}, \qquad k=1, \ldots n;$$

отсюда получаемъ такое значеніе для потенціальной энергіи:

$$F_\theta = \sum_{k=1}^{k=n} V_k^2(\theta_1\theta_{k1} + \ldots + \theta_n\theta_{kn})^2 =$$

$$= \theta_1^2 V_{\theta_1}^2 + \ldots + \theta_n^2 V_{\theta_n}^2 + 2\theta_1\theta_2 \sum_{k=1}^{k=1} V_k^2 \theta_{k1}\theta_{k2} + \ldots\ldots$$

Это выраженіе показываетъ, что потенціальная энергія результирующей амплитуды только тогда равна суммѣ потенціальныхъ энергій амплитудъ слагающихъ, когда послѣднія лежатъ на винтахъ, между координатами которыхъ имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$\sum_{k=1}^{k=n} V_k^2\theta_{kl}\theta_{km} = 0, \qquad l \lesseqgtr m, = 1, \ldots n. \qquad (201)$$

Каждая пара винтовъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію такого вида, называются *сопряженными винтами потенціала*. Легко опять доказать, что при выборѣ изъ числа винтовъ, характеризующихъ свободу, группы n сопряженныхъ винтовъ потенціала мы будемъ имѣть въ своемъ распоряженіи

$\frac{n(n-1)}{1.2}$ произвольныхъ постоянныхъ, и что группа n главныхъ винтовъ потенціала есть единственная группа сопряженныхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ совзаимныхъ винтовъ. Если (θ_l) и (θ_m) пара сопряженныхъ винтовъ, (η_l) и (η_m) соотвѣтствующіе непрерывные винты, то (θ_l) взаименъ съ (η_m) и (θ_m)—съ (η_l). Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ для координатъ винта (η_l) выраженія (200):

$$\frac{V_1^2}{p_1}\theta_{1l}, \ldots \frac{V_n^2}{p_n}\theta_{nl}$$

и подобныя-же выраженія для координатъ винта (η_m); ур. (201) представляетъ условіе взаимности винтовъ (θ_l) и (θ_m), (η_m) и (η_l).

§ 59. Каждому винту (θ) перемѣщенія соотвѣтствуетъ кромѣ винта (η) непрерывныхъ силъ еще винтъ (C) силъ мгновенныхъ, способныхъ въ теченіе времени dt сообщить тѣлу это перемѣщеніе. Если пріймемъ n главныхъ осей инерціи тѣла за координатные винты, то координаты винта мгновенныхъ силъ будутъ (184_1):

$$h.\frac{U_{c_k}^2}{p_{c_k}}\theta_k, \qquad k=1,\ldots n,$$

гдѣ h—коэффиціентъ пропорціональности; координаты-же непрерывнаго импульса получаются изъ ур. (196). Подчинимъ перемѣщеніе тому условію, чтобы винты непрерывныхъ и мгновенныхъ силъ были тождественны; получаемъ n уравненій:

$$h\theta''\frac{U_{c_k}^2}{p_{c_k}}\theta_k = -\frac{\theta}{p_{c_k}}(H_{k1}\theta_1 + H_{k2}\theta_2 + \ldots), \qquad (202)$$

$$k=1,\ldots n,$$

гдѣ θ''—амплитуды на винтахъ мгновенныхъ силъ. Если обозначимъ $h\frac{\theta''}{\theta} = -M_0 s^2$, то ур. (202) приведутся къ виду:

$$\begin{array}{l} \theta_1(H_{11}-M_0U_{C_1}^2s^2)+\ldots\ldots\ldots\ldots+H_{1n}\theta_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_1H_{n1}+\theta_2H_{n2}+\ldots\ldots+\theta_n(H_{nn}-M_0U_{C_n}^2s^2)=0. \end{array} \quad (203)$$

Исключивъ отсюда $\theta_1,\ldots\theta_n$, получимъ уравненіе n-ой степени относительно s^2, корни котораго дѣйствительны. Каждому корню соотвѣтствуетъ одна система значеній $\theta_1,\ldots\theta_n$, а значитъ и одинъ винтъ такого свойства, что если принять его за винтъ перемѣщенія, то соотвѣтствующіе винты непрерывныхъ и мгновенныхъ силъ будутъ тождественны. Такихъ винтовъ n, и называются они *гармоничными* винтами. Мы видѣли, что между каждыми двумя системами неизвѣстныхъ $\theta_{1l},\ldots\theta_{nl}$ и $\theta_{1m},\ldots\theta_{nm}$ и коэффиціентами при s^2 существуетъ соотношеніе

$$\sum_{k=1}^{k=n} U_k^2\theta_{kl}\theta_{km}=0,$$

что показываетъ, что каждая пара гармоничныхъ винтовъ представляетъ пару сопряженныхъ винтовъ инерціи. Это значитъ, что если (η_l) и (η_m) винты перемѣщенія, соотвѣтствующіе импульсамъ на винтахъ (θ_l) и (θ_m), то (θ_m) взамѣнъ съ (η_l) и (θ_l)—съ (η_m). Но по опредѣленію гармоничныхъ винтовъ, винтъ непрерывныхъ силъ тождественъ съ винтомъ силъ мгновенныхъ, слѣдовательно, каждая пара гармоничныхъ винтовъ представляетъ также пару сопряженныхъ винтовъ потенціала.

§ 60. Выведемъ тѣло изъ его начальнаго положенія въ безконечно близкое и, сообщивъ ему какую-либо винтовую скорость, предоставимъ его дѣйствію непрерывныхъ силъ. Такъ какъ начальное положеніе было положеніемъ устойчиваго равновѣсія, то тѣло будетъ совершать около него малыя колебанія. Пусть $\theta_1',\ldots\theta_n'$—координаты перемѣщенія относительно главныхъ винтовъ инерціи, опредѣляющія его положеніе въ какой-либо моментъ t; въ теченіе слѣдующаго промежутка времени dt эти координаты возрастутъ на $d\theta_1',\ldots d\theta_n$ и кинетическая энергія T, соотвѣтствующая положенію въ моментъ t, будетъ:

$$T=M_0\left(U_{C_1}^2\frac{d\theta_1'^2}{dt^2}+\ldots.+U_{C_n}^2\frac{d\theta_n'^2}{dt^2}\right).$$

Обозначивъ по прежнему черезъ F_θ потенціальную энергію, напишемъ уравненія движенія во второй формѣ Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\frac{d\theta_k'}{dt}}\right)+\frac{dF_\theta}{d\theta_k'}=0, \qquad k=1,\ldots.n. \qquad (204)$$

Подставимъ сюда вмѣсто T и F_θ ихъ значенія, положивъ

$$\theta_k'=f_k.\Omega, \qquad k=1,\ldots.n,$$

гдѣ $f_1,\ldots.f_n$ постоянныя, а Ω—неизвѣстная функція времени; тогда получимъ:

$$U_{C_k}^2 f_k\frac{d^2\Omega}{dt^2}+(\text{H}_{k1}f_1+\ldots.+\text{H}_{kn}f_n)\Omega=0, \qquad (205)$$
$$k=1,\ldots.n,$$

и если подчинимъ постоянныя $f_1,\ldots.f_n$ и еще одно s уравненіямъ вида:

$$f_1\text{H}_{k1}+\ldots.+(\text{H}_{kk}-M_0U_{C_k}^2s^2)f_k+\ldots.+\text{H}_{kn}f_n=0, \qquad (206)$$

то всѣ ур. (205) приведутся къ одному:

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2}+s^2\Omega = 0,$$

интегралъ котораго есть:

$$\Omega = \text{H}\,Sin(st+c),$$

гдѣ H и c произвольныя постоянныя.

Сравнивая ур. (206) съ (203), видимъ, что $f_1,\ldots.f_n$ пропорціональны координатамъ гармоничныхъ винтовъ. Обозначивъ $f_{1p},\ldots.f_{np}$ значенія этихъ постоянныхъ, соотвѣтствую-

щія p-ому корню s_p^2, а черезъ $H_1, \ldots H_n$, $c_1, \ldots c_n$—2_n произвольныхъ постоянныхъ, будемъ имѣть для общаго интеграла ур. (204) выраженіе:

$$\theta_k' = f_{1k} H_1 Sin(s_1 t + c_1) + \ldots + f_{nk} H_n Sin(s_n t + c_n), \quad (207)$$

содержащее требуемое число произвольныхъ постоянныхъ. Еслибы изъ корней s_p^2 хотя одинъ былъ отрицателенъ, то соотвѣтствующее слагаемое выраженія (207) содержало-бы подъ знакомъ синуса мнимую функцію, а слѣдовательно могло-бы быть преобразовано въ функцію показательную, неопредѣленно возрастающую съ временемъ; такимъ-же свойствомъ обладали-бы и координаты θ_k'. Такъ какъ это противорѣчило-бы тому условію задачи, по которому тѣло исходитъ изъ положенія устойчиваго равновѣсія, а слѣдовательно можетъ совершать только малыя колебанія, то всѣ корни s_p^2 должны быть положительны.

Какъ начальное перемѣщеніе, такъ и скорость могутъ быть разложены по n координатнымъ винтамъ, такъ что значенія $\theta_1', \ldots \theta_n'$ и $\frac{d\theta_1'}{dt}, \ldots \frac{d\theta_n'}{dt}$, соотвѣтствующія моменту $t = 0$, должны быть разсматриваемы какъ данныя, а потому послужатъ для опредѣленія $2n$ произвольныхъ постоянныхъ ур. (207).

Если начальныя условія таковы, что всѣ $H_2, \ldots H_n$—нули, то ур. (207) приводятся къ такимъ:

$$\theta_k' = f_{1k} H_1 Sin(s_1 t + c_1), \qquad k = 1, \ldots n. \quad (208)$$

Чтобы перевести тѣло изъ положенія устойчиваго равновѣсія въ то, которое оно занимаетъ въ извѣстный моментъ t, нужно сообщить ему нѣкоторую амплитуду на одномъ изъ винтовъ (Γ), вокругъ которыхъ оно можетъ вращаться. $\theta_1', \ldots \theta_n'$ суть слагающія этой амплитуды на винтахъ инерціи, и ур. (208) показываетъ, что онѣ пропорціональны координатамъ $f_{11}, \ldots f_{1n}$ одного изъ гармоничныхъ винтовъ; другими словами, тотъ винтъ,

вокругъ котораго должно вращаться тѣло, чтобы изъ положенія устойчиваго равновѣсія перейти въ то, которое оно занимаетъ въ моментъ t, есть винтъ гармоничный. А такъ какъ это относится ко всякому моменту t, а значитъ и къ сосѣднему, то, очевидно, тѣло будетъ все время совершать колебанія вокругъ этого гармоничнаго винта. Что касается до амплитуды, соотвѣтствующей какому-либо моменту t, то она можетъ быть опредѣлена слѣдующимъ образомъ. Представимъ себѣ круговой маятникъ, колеблющійся изохронно съ тѣломъ; если этотъ маятникъ будетъ приведенъ въ движеніе одновременно съ тѣломъ съ начальной амплитудой и угловой скоростью, соотвѣтственно пропорціональными начальной амплитудѣ и угловой скорости вращенія тѣла вокругъ гармоничнаго винта, то его амплитуда въ въ какой-либо моментъ t будетъ равна той, которую должно на гармоничномъ винтѣ сообщить тѣлу въ его положеніи устойчиваго равновѣсія, чтобы перевести его въ положеніе, занимаемое имъ въ моментъ t.

Въ общемъ случаѣ (207), начальное винтовое движеніе и начальная скорость могутъ быть разложены по n гармоничнымъ винтамъ, и вмѣсто одного маятника прійдется взять n такихъ, чтобы каждый изъ нихъ былъ изохроненъ съ соотвѣтствующимъ гармоничнымъ винтомъ и имѣлъ-бы соотвѣтствующую начальную амплитуду и угловую скорость. Амплитуды этихъ маятниковъ въ моментъ t будутъ равны тѣмъ амплитудамъ, которыя должны быть сообщены тѣлу на каждомъ изъ гармоничныхъ винтовъ въ его положеніи устойчиваго равновѣсія, чтобы перевести его въ положеніе, занимаемое имъ въ разсматриваемый моментъ.

§ 61. Въ заключеніе укажемъ еще на одно интересное свойство гармоничныхъ винтовъ.

Если тѣло стѣснено въ своихъ движеніяхъ настолько, что можетъ вращаться только вокругъ одного винта (θ), и если мы выведемъ его изъ положенія устойчиваго равновѣсія на амплитуду θ и сообщимъ ему нѣкоторую начальную скорость, то

оно будетъ постоянно колебаться вокругъ того же винта. Такъ какъ по закону сохраненія энергіи сумма кинетической и потенціальной энергіи постоянна, то

$$M_0 U_\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + F_\theta = Const,$$

или

$$M_0 U_\theta^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} + \theta^2 V_\theta^2 = Const.$$

Продифференцировавъ по θ, получимъ уравненіе,

$$\frac{d^2\theta^2}{dt^2} + \frac{V_\theta^2}{M_0 U_\theta^2}\theta^2 = 0,$$

котораго интегралъ:

$$\theta = A\, Sin \sqrt{\frac{V_0^2}{M_0 U_\theta^2}}\; t + B\, Cos \sqrt{\frac{V_0^2}{M_0 U_\theta^2}}\, t,$$

гдѣ A и B произвольныя постоянныя; отсюда опредѣляемъ періодъ одного колебанія:

$$\pi \frac{U_\theta}{V_\theta} \sqrt{M_0}.$$

Предположимъ теперь, что тѣло обладаетъ свободой n-ой степени. Тогда по отношенію къ каждому винту (θ), вокругъ котораго оно можетъ вращаться, можно находить періодъ полнаго колебанія въ предположеніи, что введены новыя связи, и тѣло получаетъ возможность вращаться именно вокругъ винта (θ). Обозначивъ черезъ $\theta_1, \ldots. \theta_n$ координаты винта (θ) относительно n главныхъ винтовъ инерціи, будемъ имѣть для періода одного колебанія слѣдующее выраженіе:

$$\pi \sqrt{\frac{U_1^2\theta_1^2 + \ldots. + U_n^2\theta_n^2}{H_{11}\theta_1^2 + 2H_{12}\theta_1\theta_2 + \ldots + H_{nn}\theta_n^2}\, M_0}.$$

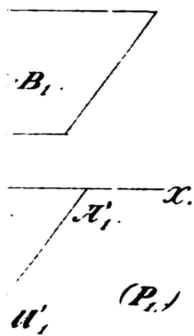
Будемъ искать винтъ (θ) подъ условіемъ, чтобы это выраженіе имѣло maximum или minimum; это равносильно отысканію minimum'а и maximum'а функціи

$$s^2 = \frac{H_{11}\theta_1^2 + 2H_{12}\theta_1\theta_2 + \ldots + H_{nn}\theta_n^2}{(U_1^2\theta_1^2 + \ldots + U_n^2\theta_n^2)M_0}$$

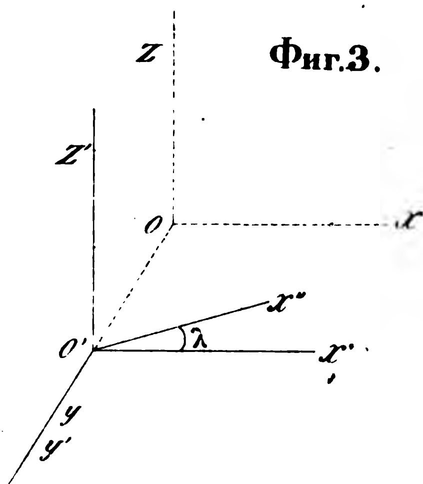
Приведя къ одному знаменателю и продиффенцировавъ по перемѣннымъ $\theta_1, \ldots \theta_n$, получаемъ для опредѣленія этихъ перемѣнныхъ тѣже ур. (203), которыми опредѣляются координаты гармоничныхъ винтовъ. Отсюда заключаемъ, что существуетъ n искомыхъ винтовъ и что они гармоничны.

Важнѣйшія погрѣшности.

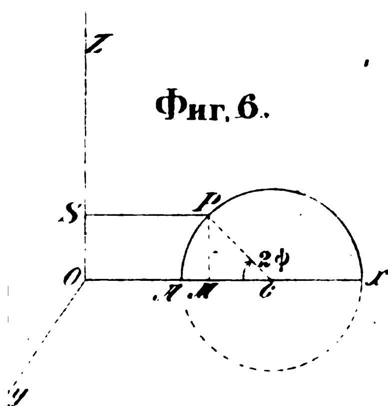
Стр.	*Строка*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ читать:*
6	4 сн.	опредѣляетъ знакъ момента	опредѣляется знакомъ синуса.
14	3 сн.	$\sqrt{X^2+Z^2}$	$\sqrt{X^2+Y^2}$
16	12 сн.	$\cos\psi -$	$\cos\psi +$
17	1 св.	$\frac{J}{R}$	$\frac{J}{R^2}$
20	4 св.	(38)	(37)
36	11 св.	безконечно великъ	равенъ $L\xi+M\eta+N\zeta=\cos\varphi$: если-же параметры обоихъ винтовъ безк. велики, то отн. мом. равенъ нулю.
42	6 сн.	(70)	(79)
46	10 св.	$\lambda=-\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\,tg\,\psi$	$\lambda=-\sqrt{-\frac{p_2}{p_1}}\,tg\,\psi$
49	11 св.	ψ	2ψ
50	11 сн.	(82)	(81)
56	6 св.	ось	директрису
59	6 сн.	$p_3=\frac{ab}{c},\ p_2=-\frac{ac}{b}$	$p_3=-\frac{ab}{c},\ p_2=\frac{ac}{b}$
60	2 св.	$p_3'=\frac{ab}{c}=p_3,\ p_1=-\frac{cb}{a}$	$p_3'=-\frac{ab}{c}=p_3,\ p_1=\frac{cb}{a}$
64	4 сн.	1, 0, 0.	0, 0.
64	6 сн.	$-p\sin\psi+$	$-p\sin\psi-$
74	3, 4, 20 св.	$-p$	$+p$
75	8 св.	$p_0'-p$	$p_0'+p$
76	2 сн.	N_1	M_1
78	12 сн.	Z_0	X_0



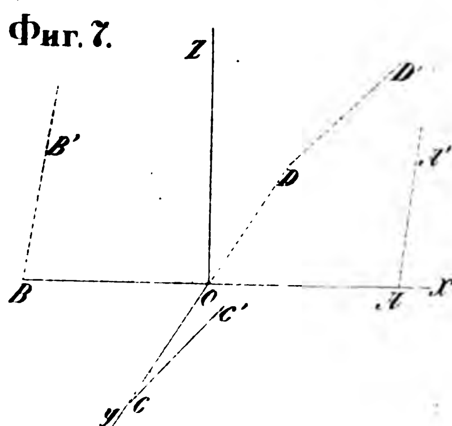
Фиг. 3.



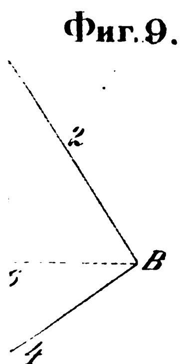
Фиг. 6.



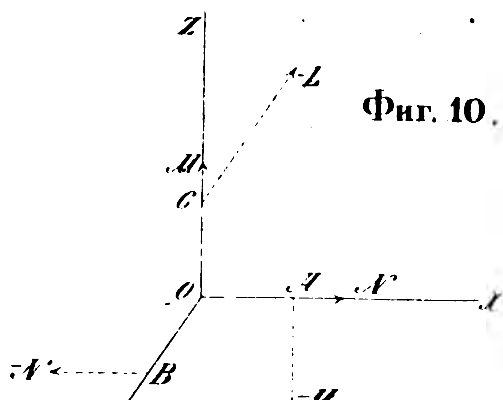
Фиг. 7.



Фиг. 9.



Фиг. 10.



Стр.	*Строка*	*Напечатано:*	*Слѣдуетъ читать:*
79	8 св.	(123)	(125)
82	7 св.	$R_з = \frac{\Omega_{C,6}}{\Omega_{8,3}}$.	$\frac{\Omega_{C,6}}{\Omega_{6,3}}$, ...
86	4 сн.	коеффиціэнтовъ	коэффиціентовъ
89	7 сн.	$R_н$	R_{6n}
91	10 св.	$(C_н)$	(C_k)
111	2 сн.	$Cн$	C_n
113	11 сн.	C_k^m	C_{km}
117	7 сн.	M^0	M_0
120	10 св.	кинетической	потенціальной
»	въ выноскѣ	кинетической	потенціальной
125	10 св.	(θ_l) и (θ_m) , (η_m) и (η_l)	(θ_l) и (η_m) , (θ_m) и (η_l)
126	2 сн.	$d\theta_н$	$d\theta_н'$
128	1 св.	2_n	2 н

Страница 113 по ошибкѣ помѣчена 115.

Къ вопросу о вѣроятности случайныхъ ошибокъ.

Ц. Руссьяна.

Въ основаніи всѣхъ почти изслѣдованій въ теоріи вѣроятностей, касающихся вида функціи, выражающей вѣроятность системы случайныхъ ошибокъ, лежитъ та гипотеза, что эта функція зависитъ только отъ величинъ ошибокъ т. е. что

$$p=f(x-a_1, x-a_2, x-a_3, \ldots x-a_{n-1}, x-a_n)$$

гдѣ x есть величина, подлежащая измѣренію, а $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ найденныя ея значенія изъ n наблюденій. Наиболѣе вѣроятное значеніе x удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{df(x-a_1, x-a_2, \ldots x-a_n)}{dx}=0.$$

Не безъинтереснымъ, поэтому, кажется мнѣ одно свойство всякой произвольной зависимости вида:

$$\varphi(x-a_1, x-a_2, \ldots x-a_n)=0 \qquad (1)$$

Это свойство состоитъ въ томъ, что, если x удовлетворяетъ зависимости (1), то

$$x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n}+\Phi(a_1-a_2, a_1-a_3, \ldots a_1-a_n), \qquad (2)$$

гдѣ видъ функціи $\Phi(a_1-a_2, a_1-a_3, \ldots a_1-a_n)$ опредѣляется видомъ функціи φ въ (1).

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ частныя производныя по $a_1, a_2 \ldots$ $\ldots a_{n-1}, a_n$ отъ (1), считая x функціей отъ $a_1, a_2, \ldots a_n$ тождественно равны нулю т. е., полагая $x-a_1=z_1$, $x-a_2=z_2, \ldots$ $\ldots x-a_n=z_n$

$$\frac{d\varphi}{dz_1}\left(\frac{dx}{da_1}-1\right)+\frac{d\varphi}{dz_2}\frac{dx}{da_1}+\ldots+\frac{d\varphi}{dz_n}\frac{dx}{da_1}=0$$

$$\frac{d\varphi}{dz_1}\frac{dx}{da_2}+\frac{d\varphi}{dz_2}\left(\frac{dx}{da_2}-1\right)+\ldots+\frac{d\varphi}{dz_n}\frac{dx}{da_2}=0$$

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\varphi}{dz_1}\frac{dx}{da_n}+\frac{d\varphi}{dz_2}\frac{dx}{da_n}+\ldots+\frac{d\varphi}{dz_n}\left(\frac{dx}{da_n}-1\right)=0.$$

Полагая, что $\frac{d\varphi}{dz_1}, \frac{d\varphi}{dz_2}, \ldots \frac{d\varphi}{dz_n}$ не равны нулю, мы должны имѣть для возможности совмѣстнаго существованія системы (3) n уравненій линейныхъ и однородныхъ относительно $\frac{d\varphi}{dz_1}, \frac{d\varphi}{dz_2}, \ldots$ $\ldots \frac{d\varphi}{dz_n}$, слѣдующее условіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{da_1}-1, & \frac{dx}{da_1}, & \frac{dx}{da_1}, & \ldots & \frac{dx}{da_1} \\ \frac{dx}{da_2}, & \frac{dx}{da_2}-1, & \frac{dx}{da_2}, & \ldots & \frac{dx}{da_2} \\ \frac{dx}{da_3}, & \frac{dx}{da_3}, & \frac{dx}{da_3}-1, & \ldots & \frac{dx}{da_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dx}{da_n}, & \frac{dx}{da_n}, & \frac{dx}{da_n}, & \ldots & \frac{dx}{da_n}-1 \end{vmatrix} = 0$$

Этотъ опредѣлитель можно преобразовать въ другой ему равный, взявъ вмѣсто первой горизонтали сумму всѣхъ горизонталей, а остальныя оставивъ безъ перемѣны.

Тогда получимъ, что

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{k=n}\frac{dx}{da_k}-1, & \sum_{k=1}^{k=n}\frac{dx}{da_k}-1, & \ldots\ldots & \sum_{k=1}^{k=n}\frac{dx}{da_k}-1 \\ \frac{dx}{da_2}, & \frac{dx}{da_2}-1, & \ldots\ldots & \frac{dx}{da_2} \\ \frac{dx}{da_3}, & \frac{dx}{da_3}, & \ldots\ldots & \frac{dx}{da_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{dx}{da_n}, & \frac{dx}{da_n}, & \ldots\ldots & \frac{dx}{da_n}-1 \end{vmatrix}=0.$$

Этотъ послѣдній мы можемъ еще преобразовать, взявъ вмѣсто каждой k-той вертикали разность k-той и $(k+1)$-ой, оставивъ n-ую безъ перемѣны; тогда

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & 0,\ldots\ldots & 0, & 0, & \sum_{k=1}^{k=n}\frac{dx}{da_k}-1, \\ 1, & -1, & 0,\ldots\ldots & 0, & 0, & \frac{dx}{da_2} \\ 0, & 1, & -1,\ldots\ldots & 0, & 0, & \frac{dx}{da_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0,\ldots\ldots & 1, & -1, & \frac{dx}{da_{n-1}} \\ 0, & 0, & 0,\ldots\ldots & 0, & 1, & \frac{dx}{da_n}-1 \end{vmatrix}=0.$$

а этотъ послѣдній равенъ

$$=\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{dx}{da_k}-1\right)\begin{vmatrix} 1, & -1, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & \ldots\ldots & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots\ldots & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots & 0, & 1 \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{dx}{da_k}-1.$$

Итакъ, x опредѣленное изъ ур-нія (1), удовлетворяетъ диференціальному ур-нію въ частныхъ производныхъ:

$$\frac{dx}{da_1}+\frac{dx}{da_2}+\ldots+\frac{dx}{da_n}=1. \qquad (4)$$

Интегрированіе этого ур нія приводится къ интегрированію системы n совокупныхъ уравненій:

$$da_1=da_2=da_3=\ldots=da_{n-1}=da_n=dx$$

Система ихъ n интеграловъ можетъ быть представлена въ n видахъ:

$$\begin{array}{llccl} x-a_1=c_1 & x-a_2=c_1 & : & : & x-a_n=c_1 \\ a_1-a_2=c_2 & a_1-a_2=c_2 & : & : & a_1-a_2=c_2 \\ a_1-a_3=c_3 & a_1-a_3=c_3 & : & : & a_1-a_3=c_3 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & : & : & \ldots\ldots \\ a_1-a_n=c_n, & a_1-a_n=c_n & : & : & a_1-a_n=c_n, \end{array}$$

а потому и общій интегралъ уравненія (4) можетъ имѣть n формъ:

$$x-a_1=\Phi_1(a_1-a_2,\ a_1-a_3,\ldots a_1-a_n),$$
$$x-a_2=\Phi_2(a_1-a_2,\ a_1-a_3,\ldots a_1-a_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x-a_n=\Phi_n(a_1-a_2,\ a_1-a_3,\ldots a_1-a_n).$$

Складывая эти уравненія, получимъ:

$$x = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}+\Phi(a_1-a_2, a_1-a_3, \ldots a_1-a_n). \quad (2)$$

гдѣ Φ есть символъ произвольной функціи, такъ какъ мы пришли-бы къ дифференціальному уравненію (4), исходя изъ зависимости (1) какого угодно вида, потому что члены $\frac{d\varphi}{dz_1}, \frac{d\varphi}{dz_2}, \ldots \frac{d\varphi}{dz_n}$ исключились, но для каждаго даннаго вида функціи φ въ (1), функція $\Phi(a_1-a_2, a_1-a_3, \ldots a_1-a_n)$ будетъ имѣть опредѣленный видъ, зависящій отъ вида функціи φ въ (1).

ОПЫТНОЕ ИЗСЛѢДОВАНІЕ

МЕХАНИЧЕСКИХЪ СВОЙСТВЪ

МАСЕЛЪ И КОЛЛОИДОВЪ.

Г. Г. Де-Метца.

Привать—доцента Императорскаго Новороссійскаго университета.

РАЗСУЖДЕНІЕ

на степень магистра физики.



ПРЕДИСЛОВІЕ.

Предлагаемое вниманію читателя опытное изслѣдованіе механическихъ свойствъ маселъ и коллоидовъ принадлежитъ къ числу вопросовъ молекулярной физики, и именно я здѣсь трактую о двойномъ преломленіи свѣта въ жидкостяхъ въ связи съ ихъ внутреннимъ треніемъ и ихъ сжимаемостью. Эти изслѣдованія были вызваны работою профессора Kundt'a: «Ueber die Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten» (Wied. Ann., Bd. 13, p. 110).

Въ первой главѣ, я вкратцѣ излагаю общій историческій ходъ развитія идеи временнаго двойнаго преломленія свѣта въ изотропныхъ тѣлахъ, за время отъ 1812 года и до послѣднихъ дней. Этотъ обзоръ даетъ мнѣ возможность установить два интересныхъ закона: 1° тождества механической и оптической (она-же въ данномъ случаѣ и кристаллографическая) осей и 2° пропорціональности между молекулярнымъ измѣненіемъ строенія тѣла и внѣшнею деформирующею силою.

Во второй главѣ, я даю отчетъ объ опытахъ проф. Kundt'a и своихъ. Устанавливая отсутствіе всякой связи между механически-оптическимъ эффектомъ Kundt'a и внутреннимъ треніемъ разныхъ жидкостей, я, наобо-

ротъ, нахожу пропорціональную зависимость между ними для одной и той-же жидкости.

Въ третьей главѣ, я занимаюсь сжимаемостью маселъ и коллоидовъ и констатирую, что механически-оптическій эффектъ Kundt'а не зависитъ отъ упругости деформируемой жидкости.

Въ четвертой, я вкратцѣ касаюсь теоріи этихъ явленій по Kundt'у и указываю на ея слабыя мѣста.

Результаты, сообщаемые мною во второй главѣ, были получены въ Физическомъ Институтѣ Страсбургскаго университета; результаты-же третьей главы добыты въ Физической лабораторіи Императорскаго Новороссійскаго университета. Такъ какъ я пользовался во все время работы непрерывными совѣтами и наставленіями моихъ высокоуважаемыхъ профессоровъ August Kundt'а и Θеодора Никифоровича Шведова, то я считаю своею пріятнѣйшею обязанностью выразить имъ здѣсь мою глубокую признательность и благодарность.

Одесса, 20 марта
1889 г.

Глава I.

Историческій очеркъ.

Временному двойному преломленію свѣта въ изотропныхъ тѣлахъ, съ 1812 года и до послѣдняго времени, посвящено весьма почтенное число мемуаровъ, которыми удалось прочно установить нѣсколько общихъ законовъ, характеризующихъ явленія этого рода. Вотъ почему я считаю небезъинтереснымъ остановить на нихъ вниманіе читателя и въ настоящей главѣ кратко изложить результаты сдѣланныхъ работъ.

§ 1. Еще старые опыты Seebeck'а (1812), Brewster'а (1815) и Fresnel'я (1819) показали, что при деформированіи твердаго изотропнаго тѣла, помощью надавливанія или вытяженія, въ немъ происходитъ особаго рода группировка молекулъ и измѣненіе упругости, которыя по отношенію къ прямолинейно-поляризованному лучу напоминаютъ собою распредѣленіе упругости въ одноосныхъ кристаллахъ, т. е. по одному направленію упругость больше, чѣмъ по направленію взаимноперпендикулярному. Это особенное распредѣленіе упругостей во время деформаціи изотропнаго тѣла и обусловливаетъ въ немъ двойное преломленіе свѣта. Оно называется временнымъ, когда съ прекращеніемъ дѣйствія деформирующей силы тѣло вновь возвращается въ свое первоначальное изотропное состояніе; и случайнымъ, когда изотропное тѣло сохраняетъ распредѣленіе молекулъ и упругостей такимъ, какимъ оно было создано случайно

подѣйствовавшей силою. Эти любопытныя явленія подверглись неоднократной провѣркѣ и многостороннему изученію, вслѣдствіе чего получилась возможность придти къ общему заключенію, что не только твердыя изотропныя тѣла, но кристаллы, органическія ткани, пластическія массы и даже жидкости, при извѣстныхъ условіяхъ воздѣйствія на нихъ механическихъ силъ, способны измѣнять природу прямолинейнополяризованнаго луча и давать двойное преломленіе свѣта.

2. Мы можемъ группировать всѣ относящіяся сюда явленія въ слѣдующіе четыре класса.

I) Двойное преломленіе изотропныхъ твердыхъ тѣлъ отъ сжатія или растяженія.

II) Двойное преломленіе стекла отъ измѣненія температуры и закаливанія.

III) Двойное преломленіе въ пластическихъ массахъ.

IV) Двойное преломленіе въ жидкостяхъ.

Разберемъ теперь подробно каждую группу.

I. Двойное преломленіе въ изотропныхъ твердыхъ тѣлахъ отъ сжатія или растяженія.

§ 3. Первые опыты по двойному преломленію изотропныхъ твердыхъ тѣлъ вслѣдствіе сжатія или растяженія принадлежатъ Sir David Brewster'у [1]). Онъ сжималъ стекляный кубъ между платформами обыкновеннаго пресса; пропуская затѣмъ поляризованный лучъ черезъ пару его параллельныхъ плоскостей и принимая его въ анализаторъ, онъ видѣлъ хроматическія явленія, изученіе которыхъ его привело къ первому закону:

I. Сжатіе и растяженіе производятъ противоположные эффекты двойнаго преломленія. Причемъ *сжатіе* отвѣчаетъ двойному преломленію одноосныхъ *отрицательныхъ* кристалловъ, а *расширеніе—положительныхъ.*

Еще болѣе интересны его опыты съ стекляною пластинкою (длиною около 13 с. m.), концы которой закрѣплены, а

[1]) Brewster. Philosophical Transactions, 1816, p. 156—171.

деформація производится по серединѣ ея надавливаніемъ винта. Тогда верхняя половина пластинки растягивается, т. е. представляетъ собою отрицательный кристаллъ; средняя часть ея остается изотропною, нейтральною; нижняя, напротивъ того, сжимается и, слѣдовательно, представляетъ собою положительный кристаллъ.

Изъ этихъ опытовъ Brewster пришелъ ко второму закону:

II. *Ось искусственнаго кристалла параллельна линіямъ сжатія или растяженія.*

Продолжая свои изслѣдованія, Brewster искалъ числовой зависимости между механическою деформаціею (силою давленія или растяженія) и оптическимъ эффектомъ (разностью хода между обыкновенными и необыкновеннымъ лучами). Съ этою цѣлью онъ сравнивалъ цвѣта изохроматическихъ линій двойнаго преломленія съ цвѣтами колецъ Newton'а и далъ третій законъ:

III. *Разность хода между преломленными въ стеклѣ лучами пропорціональна сжатію или расширенію.*

§ 4. Почти одновременно съ изслѣдованіями Brewster'а, вопросъ о временномъ двойномъ лучепреломленіи обогатился опытами извѣстнаго Augustin Fresnel'я [1]), которому удалось помощью сжатія призмъ по направленію ихъ преломляющаго ребра получить даже раздвоеніе свѣтоваго луча, до 6—7 минутъ на 1 метрѣ разстоянія. Этотъ опытъ состоялъ въ томъ, что, взявъ семь прямоугольныхъ стеклянныхъ призмъ, изъ которыхъ четыре были немного длиннѣе остальныхъ трехъ, онъ сложилъ параллелепипедъ такимъ образомъ, что между четырьмя, лежащими на плоскостяхъ гипотенузы, вставилъ три болѣе короткихъ. При надавливаніи металлическою оправою на четыре выступающія призмы получалось упомянутое раздвоеніе лучей.

Изъ другаго мемуара Fresnel'я [2]) видно, что онъ произ-

---

[1]) Fresnel. Ann. de Ch. et de Phys. (2), t. 20, 1822, p. 195.

[2]) Fresnel. Ann. de Ch. et de Phys. (3), t. 17, 1846, p. 316—338. Этотъ мемуаръ былъ представленъ Парижской Академіи Наукъ, 5 ноября 1819 года, но былъ затерянъ въ бумагахъ постояннаго секретаря Fourier и оттого такъ поздно напечатанъ.

водилъ также опыты съ надавливаніемъ пластинки, но нѣсколько иначе, чѣмъ Brewster. Именно, онъ закрѣплялъ одинъ конецъ пластинки неподвижно, а другой, свободный нажималъ винтомъ, заставляя ее уклоняться отъ первоначальнаго положенія.

§ 5. Такимъ образомъ, опыты Fresnel'я внесли мало существеннаго, а работы Brewster'а не отличались ни особою полнотою, ни особою точностью. Вотъ почему, въ 1854 г., Wertheim [1]) пересмотрѣлъ этотъ вопросъ и провѣрилъ его законы по болѣе усовершенствованной методѣ и съ лучшими инструментами. Метода Wertheim'а была въ общихъ чертахъ тою-же, что и Brewster'а при сжатіи стекляннаго куба: сжимаемый кубъ помѣщался между поляризующимъ Николемъ и двоякопреломляющимъ анализаторомъ; ихъ плоскости поляризаціи составляли уголъ въ 45° съ вертикалью, а между собою были параллельны. Вслѣдствіе этого, въ полѣ зрѣнія было видно два изображенія діафрагмы: обыкновенное — бѣлое и необыкновенное — черное; когда производилось сжатіе или растяженіе накладываніемъ на платформу пресса грузовъ, то эти изображенія окрашивались въ дополнительные цвѣта. Нагрузку можно было увеличивать до тѣхъ поръ, пока поочередно свѣтлое изображеніе діафрагмы не дѣлалось чернымъ, а черное — свѣтлымъ. Эта перемѣна окраски соотвѣтствуетъ разности хода Δ въ полъ волны, т. е. $\Delta = \frac{1}{2}\lambda$, между обыкновеннымъ и необыкновеннымъ лучами. Wertheim изслѣдовалъ: кронгласъ, флинтгласъ, зеркальное стекло, кронгласъ de Clichy и квасцы, употребляя нагрузки отъ 10 kgr. до 600 kgr Результаты весьма обстоятельныхъ опытовъ Wertheim'а выражены имъ въ рядѣ законовъ, между которыми первое мѣсто занимаютъ слѣдующіе [2]):

1°. «Двойное преломленіе, или разность хода (Δ) между двумя лучами, пропорціонально механическому удлиненію или сокращенію; но эти послѣднія не строго пропорціональны на-

---

[1]) Wertheim. Ann. de Ch. et de Phys. (3) t. 40, 1854, p. 156—221.

[2]) Wertheim. loc. cit., p. 189—191, p. 217—218.

грузкамъ. Взявъ за абсциссы нагрузки, а за ординаты производимое ими удлиненіе или сокращеніе, получаютъ для давленій—вогнутую кривую къ оси абсциссъ, а для вытяженій—выпуклую кривую къ той же оси. Обѣ эти кривыя выравниваются съ обѣихъ сторонъ по мѣрѣ увеличенія нагрузки и, наконецъ, сливаются въ прямую, которая отвѣчаетъ общепринятому коэффиціенту упругости».

2°. «Разность хода не зависитъ отъ длины волны λ; слѣдовательно, дисперсія этого рода двойнаго лучепреломленія незначительна» р. 197 и р. 219.

3°. Оптическія оси совпадаютъ съ механическими для всякаго *дѣйствительно* изотропнаго тѣла, будетъ-ли это тѣло обладать отрицательнымъ двойнымъ преломленіемъ давленія или положительнымъ двойнымъ преломленіемъ вытяженія» р. 218.

4°. «Двоякопреломляющая способность различныхъ изотропныхъ тѣлъ различна; нельзя установить никакого соотношенія между этою способностью и показателемъ обыкновеннаго преломленія или даже плотностью» р. 219.

§ 6. Въ 1855 г., Bravais [1]) изобрѣлъ свой полярископъ и съ нимъ провѣрилъ опыты Brewster'а на кубахъ стекла и каменной соли. Давленію въ n атмосферъ соотвѣтствуетъ разность хода:

Вещество	Разность хода Δ	Предѣлы давленій n
Стекло . .	0.00050 n	0 — 11 атмосферъ
Кам. соль.	0.00059 n	0 — 7 »

§ 7. Въ 1873 г., E. Mach [2]) сдѣлалъ рядъ опытовъ по тому-же вопросу, остановившись на прямоугольныхъ стеклянныхъ стержняхъ богемскаго стекла, въ которыхъ онъ вызывалъ

[1]) Bravais. Ann. de Ch. et de Phys., (3), t. 43, 1855, p. 129.

[2]) Mach. Optisch—Akustische Versuche. Prag, 1873, p. 1—25.

двойное преломленіе тѣмъ, что, закрѣпивъ неподвижно одинъ конецъ стержня, нагружалъ другой нѣкоторымъ грузомъ. Онъ пользовался болѣе сложною оптическою методою. Лучъ свѣта проходилъ черезъ: 1° поляризующій Николь, установленный плоскостью поляризаціи подъ угломъ въ 45° къ вертикали, 2° испытуемый стеклянный стержень, 3° гипсовую пластинку, 4° кварцевый компенсаторъ, 5° второй Николь, установленный плоскостью поляризаціи перпендикулярно къ первому и подъ угломъ въ 45° къ вертикали, и 6° спектроскопъ, въ оптическомъ полѣ котораго видѣнъ былъ спектръ, покрытый интерференціонными полосами. Эти полосы съ измѣненіемъ нагрузки стекляннаго стержня мѣняютъ свое мѣсто. Опыты Mach'а подтверждаютъ 3-ій законъ Brewster'а и устанавливаютъ, что *при нагрузкѣ въ 50 kgr. на одинъ квадратный сантиметръ поперечнаго сѣченія приходится всего 0.00127 разности хода въ кварцевой пластинкѣ равной по толщинѣ стержню*; кромѣ того, изъ нихъ вытекаетъ, что *наибольшая скорость распространенія свѣта въ стеклѣ соотвѣтствуетъ плоскости поляризаціи, которая заключаетъ направленіе натяженій.*

§ 8. Въ 1880 г., Macé de l'Epinay [1]) сдѣлалъ большую работу по вопросу о случайномъ двойномъ преломленіи въ закаленныхъ стеклахъ. Провѣривъ нѣкоторыя положенія Wertheim'а, онъ показалъ, что законъ о независимости между разностью хода Δ и длиною волны λ справедливъ только въ предѣлахъ ошибокъ около $1^0/_0$. Этотъ законъ оказался непремѣнимымъ къ стекламъ съ большимъ свѣторазсѣяніемъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ, по изслѣдованіямъ Macé de l'Epinay, абсолютная разность хода убываетъ отъ краснаго цвѣта къ фіолетовому; кромѣ того, законъ Wertheim'а имѣетъ мѣсто только при правильныхъ сжатіяхъ, если-же сжатіе производится какъ-нибудь, то разность хода возрастаетъ отъ краснаго къ фіолетовому или

---

[1]) Macé de l'Epinay. Ann. de Ch. et de Phys. (5), t. 19, 1880, p. 1—90.

наоборотъ, смотря потому, будетъ-ли свѣторазсѣяніе даннаго стекла среднее или большое.

§ 9. Къ этой области можно еще отнести нѣсколько опытовъ Biot [1]) (1820 г.) и Kundt'а [2]) (1864 г.), въ которыхъ временное двойное преломленіе вызывается звуковыми колебаніями стекляннаго стержня. Вслѣдствіе періодическаго сгущенія и разрѣженія въ узловыхъ точкахъ, частицы эѳира колеблются по длинѣ стержня иначе, чѣмъ поперекъ, и оттого стержень періодически пріобрѣтаетъ свойства кристаллической пластинки, вырѣзанной параллельно оптической оси. Kundt показалъ, что при расширеніи замѣчается двойное преломленіе положительныхъ кристалловъ, а при сгущеніи—отрицательныхъ; эти результаты намъ уже извѣстны по другимъ опытамъ §§ 3, 5.

§ 10. Наконецъ, интересные опыты со стекломъ были сдѣланы Kerr'омъ [3]); въ нихъ стеклянная пластинка деформировалась разностью потенціаловъ на двухъ проволокахъ, лежавшихъ внутри ея. Эти проволоки проложены другъ противъ друга въ не насквозь высверленныхъ углубленіяхъ и разъединены слоемъ стекла въ 6 m. m. Здѣсь электрическое натяженіе даетъ начало двойному преломленію, характеризующему положительные и отрицательные кристаллы. Стекло и кварцъ —отрицательные, а янтарь — положительный кристаллы. Такимъ образомъ, мы впервые наталкиваемся на такой случай, когда одна и таже механическая сила вызываетъ въ разныхъ діэлектрическихъ тѣлахъ разные оптическіе эффекты; мало того, что изотропныя тѣла такъ относятся къ деформирующей силѣ, но даже кварцъ, положительный по своей природѣ кристаллъ, дѣлается отрицательнымъ. Нѣчто подобное мы встрѣтимъ еще въ § 15, когда рѣчь будетъ идти о пластическихъ тѣлахъ.

---

[1]) Müller — Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 8-te Auflage, 1879. Braunschweig. Bd. II, p. 540.

[2]) Kundt. Pogg. Ann., Bd. 123, 1864, p. 541.

[3]) Kerr. Philosophical Magazine, (4), V. 50, 1875. p. 337.

§ 11. Совокупность этихъ работъ устанавливаетъ съ достовѣрностью слѣдующія положенія:

1°. Механическое сжатіе и растяженіе твердаго изотропнаго тѣла обусловливаетъ временное двойное лучепреломленіе.

2°. Двойное преломленіе, производимое растяженіемъ, соотвѣтствуетъ положительнымъ кристалламъ.

3°. Двойное лучепреломленіе, производимое сжатіемъ, соотвѣтствуетъ отрицательнымъ кристалламъ.

4°. Иногда одно и тоже механическое дѣйствіе въ разныхъ средахъ можетъ вызвать разное двойное лучепреломленіе, но вообще это—явленіе рѣдкое.

5°. Получаемое въ этомъ случаѣ двойное лучепреломленіе измѣряется разностью хода Δ между обыкновеннымъ и необыкновеннымъ лучами, и эта разность весьма приблизительно пропорціональна механическому усилію, вызывающему оптическій эффектъ.

6°. Оптическая ось искусственнаго кристалла совпадаетъ съ осью механическаго дѣйствія.

7°. Дисперсія въ этомъ двойномъ лучепреломленіи ничтожна и зависитъ отъ свѣтопреломляющей способности изучаемаго тѣла.

8°. Огромныя механическія усилія вызываютъ ничтожную разность хода.

II. Двойное преломленіе въ закаленномъ стеклѣ.

§ 12. Это явленіе было открыто, въ 1812 году, Seebeck'омъ [1]) при быстромъ охлажденіи закаленнаго до красна стекла. Этотъ родъ двойнаго преломленія, какъ уже указано въ § 1, нельзя смѣшивать съ предыдущимъ, ибо оно не имѣетъ временнаго характера. Разъ пластинка пріобрѣла такія свойства, она сохраняетъ ихъ навсегда. Вслѣдствіе этого, его называютъ «случайнымъ» двойнымъ преломленіемъ въ отличіе отъ «временнаго». Такимъ образомъ, быстро охлажденное стекло

---

[1]) Seebeck. Schweigger's Journal für Chemie und Physik. Nürnberg, Bd. VII, 1813, p. 284—308; Bd. XII, 1814, p. 1—16.

пріобрѣтаетъ также свойства кристаллическихъ пластинокъ. Я лишь въ нѣсколькихъ словахъ укажу на развитіе этого вопроса, такъ какъ онъ мало связанъ съ временнымъ характеромъ остальныхъ интересующихъ меня явленій. Одновременно съ Seebeck'омъ это явленіе изучалъ Brewster [1]) (1814—1816 г.) и далъ ему надлежащее объясненіе, доказавъ, что оно зависитъ отъ закаливанія стекла. Въ 1869 г., Dufour обратилъ вниманіе на «larmes bataviques», и еще недавно de la Bastie производилъ опыты надъ стекломъ, закаленнымъ въ маслѣ; de Luques изучалъ структуру сильно закаленнаго стекла, а Mascart—слабое закаливаніе продажныхъ стеколъ. Вообще эти явленія были мало изучены, и только въ послѣднее время обширный трудъ Macé d'Epinay [2]) нѣсколько освѣтилъ эту область высшей оптики. Онъ нашелъ, что наблюдаемыя въ поляризованномъ свѣтѣ энтоптическія фигуры (ихъ назвалъ этимъ именемъ Seebeck, потому что онѣ видны внутри стекла) въ своемъ распредѣленіи на прямоугольной пластинкѣ слѣдуютъ закону, выражаемому уравненіемъ:

$$y = A(K^x + K^{-x}),$$

въ которомъ A и K суть двѣ постоянныя, а x есть перемѣнное разстояніе отъ середины пластинки до наблюдаемой фигуры; постоянная A зависитъ отъ длины волны λ и ей обратно пропорціональна, а постоянная K отъ λ не зависитъ.

III. Двойное преломленіе въ пластическихъ массахъ.

§ 13. Первыя работы принадлежатъ перу того-же Brewster'а [3]) [4]); въ 1815 году, онъ произвелъ цѣлый рядъ интересныхъ опытовъ по двойному преломленію въ студенистыхъ

---

[1]) Brewster. Philosophical Transactions, 1814, p.436—439 и Philosophical Transactions, 1816, p. 46—114.

[2]) Macé de l'Epinay. loc. cit. Здѣсь же можно найти подробныя литературныя указанія по этому вопросу.

[3]) Brewster. Philosophical Transactions, 1815, p. 60—64.

[4]) Brewster. Philosophical Transactions, 1816, p. 172—178.

массахъ — древесной смолы, желатины, рыбьяго клея и смѣси канифоли съ воскомъ. Онъ получалъ весьма рѣзкое явленіе двойнаго преломленія при растяженіи и сжатіи желэ и рыбьяго клея, подобно тому какъ и въ стеклѣ, но въ большей мѣрѣ. Этимъ изслѣдованіямъ Brewster приписываетъ особое значеніе, считая возможнымъ отсюда прямо перейти къ двойному преломленію свѣта въ жидкихъ тѣлахъ [1]).

§ 14. Послѣ работъ Brewster'а, этотъ вопросъ былъ надолго забытъ. Только въ 1866 году, J. C, Maxwell [2]) обратилъ на него вниманіе и замѣтилъ, что въ очень густомъ канадскомъ бальзамѣ появляется двойное преломленіе именно въ моментъ движенія лопатки въ его массѣ. Руководясь теоретическими воззрѣніями Poisson'а [3]) на природу внутренняго тренія жидкостей, по которымъ вязкая жидкость можетъ быть разсматриваема, какъ упругое твердое тѣло періодически разжижающееся и отвердѣвающее, причемъ эти періоды весьма коротки, Maxwell уже искалъ двойнаго преломленія въ растворахъ сахара и аравійскаго гумми. Съ этой цѣлью онъ заключалъ слой жидкости между двумя концентрическими цилиндрами, изъ которыхъ одинъ вращался, а другой былъ въ покоѣ. Однако въ этихъ растворахъ ему не удалось констатировать искомаго двойнаго преломленія. Далѣе онъ качественно изучилъ двойное преломленіе желатины, гуттаперчевой кожи и морскаго киселя (медузы). Изъ этихъ опытовъ Maxwell хотѣлъ вывести признаки, отличающіе твердое тѣло отъ жидкаго, и именно, имѣетъ-ли данная жидкость сравнительно съ твердымъ тѣломъ очень малую твердость (Steifigkeit, Rigidity) или очень малое время разслабленія (Abspannungszeit, time of relaxation). Время разслабленія какимъ-либо образомъ растянутаго тѣла есть такое, которое необходимо для полнаго уничтоженія растяженія, предпо-

[1]) Brewster, loc. cit., 1815, p. 64.

[2]) Maxwell. Pogg. Ann., 1874, Bd. 151, p. 151—154.

[3]) Poisson. Journal de l'Ecole polytéchnique, 1829, t. 13, Cah. XX.

лагая, что ходъ разслабленія во всякій моментъ времени таковъ, какъ въ начальный [1]). Maxwell полагаетъ, что канадскій бальзамъ имѣетъ малую твердость и большое время разслабленія; растворы-же гумми и сахара, вѣроятно, наоборотъ—тверже, но текучи оттого, что обладаютъ малымъ временемъ разслабленія.

§ 15. Независимо отъ Maxwell'а, въ 1873 г., Mach [2]) повторилъ опыты съ пластическими массами: съ желатиною, канифолью, канадскимъ бальзамомъ, фосфорною кислотою и размягченнымъ въ огнѣ стекломъ. Эти тѣла подъ вліяніемъ удара, толчка или быстраго сгибанія обнаруживали признаки двойнаго преломленія. Особенно интересенъ и важенъ въ этихъ изслѣдованіяхъ тотъ фактъ, что названныя вещества при однихъ и тѣхъ-же механическихъ воздѣйствіяхъ бываютъ то оптически положительны, то оптически отрицательны. Такъ напримѣръ, твердая фосфорная кислота въ палочкахъ при давленіи—отрицательна, при вытяженіи—положительна, совершенно какъ стекло; пластическая-же фосфорная кислота при давленіи положительна. Изъ этого можно заключить, что для нѣкотораго физическаго состоянія метафосфорная кислота къ давленію оптически безразлична. *Канадскій бальзамъ, какъ стекло, при давленіи развиваетъ двойное преломленіе отрицательныхъ кристалловъ, а фосфорная кислота—положительныхъ.* Эти опыты какъ-бы даютъ основаніе предполагать существованіе молекулярнаго двойнаго лучепреломленія, подобно молекулярной вращательной поляризаціи.

§ 16. Такимъ образомъ ни Maxwell'у, ни Mach'у не удалось найти временнаго двойнаго преломленія въ чистыхъ жидкостяхъ. Но немного времени спустя, честь открытія этого явленія выпала на долю Kerr'а и Kundt'а. Kerr при электрическомъ натяженіи, а Kundt при механическихъ условіяхъ, испробованныхъ Maxwell'омъ, нашли временное двойное преломленіе у огромнаго ряда жидкостей.

[1]) Maxwell. loc. cit., p. 154.
[2]) Mach. loc. cit., p. 25—34.

IV Двойное преломленіе въ жидкихъ тѣлахъ.

§ 17. Опыты Kerr'a[1]) произведены по обычной идеѣ; плоскій стекляный сосудъ съ испытуемою жидкостью помѣщался между двумя скрещенными николями и подъ угломъ въ 45° къ вертикальной плоскости. Самый сосудъ представлялъ собою пустой стекляный параллелепипедъ, въ днѣ и крышкѣ котораго отвѣсно укрѣплены подвижные электроды шарообразной или иной формы. При такомъ расположеніи опыта направленіе механическаго усилія должно быть вертикальное. Когда между электродами нѣтъ искры и нѣтъ электрическаго тока, а дѣйствуетъ лишь разность потенціаловъ, то многіе діэлектрическія жидкости обнаруживаютъ давно искомое временное двойное преломленіе. Открывъ это явленіе, Kerr нашелъ здѣсь тѣ-же любопытныя явленія, которыя уже для канадскаго бальзама и пластической фосфорной кислоты отмѣтилъ Mach (см. § 15), а именно, однѣ жидкости даютъ отрицательное двойное преломленіе сжатаго стекла, а другіе положительное—вытянутаго стекла, при одномъ и томъ-же расположеніи знаковъ разности потенціалъ на электродахъ. Съ положительнымъ двойнымъ преломленіемъ оказались слѣдующія жидкости [2]):

Сѣрнистый углеродъ.

Кумолъ
Параффинное масло (уд. вѣсъ 0.890).

Хлористый углеродъ.
Ксилолъ
Толуолъ
Цимолъ
Бензолъ

Амиленъ

Параффинное масло (уд. вѣсъ 0.814)

---

[1]) Kerr. Philosophical Magazine. (4) v. 50, 1875, p. 446—458.
[2]) Kerr. Philosophical Magazine, (5), v. 8, 1879 p. 244.

Спермацетовое масло
Терпентинъ
Бромтолуолъ

Съ отрицательнымъ двойнымъ преломленіемъ:

Рѣпное масло
Миндальное
Оливковое
Маковое
Сурѣпное
Орѣховое
Горчичное
Льняное
Касторовое [1])

Тюлепій жиръ
Тресковый
Свинной
Воловьихъ ногъ.

Впослѣдствіи этотъ списокъ былъ пополненъ Kerr'омъ [2]) еще числомъ около 100 тѣлъ разнаго химическаго состава, и изъ общаго изученія ихъ — положительныхъ оказалось больше, чѣмъ отрицательныхъ.

Важно будетъ замѣтить, что измѣренія оптическаго эффекта въ зависимости отъ разности потенціаловъ на электродахъ не только привели къ общему заключенію о возрастаніи оптическаго эффекта съ возрастаніемъ разности потенціаловъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ Kerr'у [3]) удалось съ достаточною точностью получить для сѣрнистаго углерода и нѣкоторыхъ другихъ жидкостей слѣдующій законъ:

«*Напряженіе электрооптическаго дѣйствія даннаго діэлектрическаго тѣла, т. е. разность хода обыкновеннаго и*

[1]) Kerr. Philosophical Magazine. (4), v. 50, 1875, p. 457.
[2]) Kerr. Philosophical Magazine. (5). v. 13, 1882, p. 259.
[3]) Kerr. Philosophical Magazine. (5), v. 8, 1879, p. 234—238.

необыкновеннаго лучей на единицу толщины діэлектрическаго тѣла, измѣняется прямо пропорціонально квадрату результирующей электрической силы» [1]).

Кромѣ того, всѣ его опыты приводятъ къ общему выводу тождества оптической и механической осей [2]).

§ 18. Эти въ высшей степени интересные опыты были повторены и подтверждены Röntgen'омъ, Quincke, Brongersma и др.. Röntgen'у [3]) удалось сдѣлать нѣсколько интересныхъ видоизмѣненій и пополненій въ опытахъ Kerr'а. Между прочимъ, онъ открылъ двойное преломленіе у глицерина, дистилированной воды и сѣрнаго эѳира. А Quincke [4]) нашелъ опытное разъясненіе этихъ явленій въ неравномѣрномъ расширеніи и сокращеніи, вызываемыхъ дѣйствіемъ электричества въ изоляторахъ. Что-же касается ихъ раздѣленія на положительныя и отрицательныя, то, по его мнѣнію, оно зависитъ отъ закона, которому слѣдуетъ измѣненіе показателя преломленія даннаго тѣла съ возрастаніемъ или убываніемъ температуры, т. е. съ убываніемъ или возрастаніемъ плотности. Тѣла, слѣдующія закону возрастанія показателя преломленія съ возрастаніемъ температуры (стекло) даютъ отрицательное двойное преломленіе; тѣла-же, слѣдующія обратному закону (сѣрнистый углеродъ), даютъ положительное двойное преломленіе. Quincke удалось непосредственно наблюдать сокращеніе объема при электризованіи рѣпнаго, миндальнаго и оливковаго маселъ и расширеніе у эѳира.

§ 19. Наблюденія по вопросу о двойномъ преломленіи свѣта въ жидкостяхъ, въ 1881 г., были обогащены блестящею работою профессора August Kundt'а [5]). Онъ остановился на экспериментальной методѣ, предложенной еще J. C. Maxwell'омъ

---

[1]) Kerr. Philosophical Magazine. (5), v. 9, 1880, p. 158.
[2]) Kerr. Philosophical Magazine. (5), v. 13, 1882, p. 260.
[3]) Röntgen. Wied. Ann., Bd. 10, 1880, p. 87.
[4]) Quincke. Wied. Ann., Bd. 10, 1880, p. 536, 536 и 553.
[5]) Aug. Kundt. Wied. Ann., Bd. 13, 1881, p 110—133.

(см. § 14), методѣ одного вращающагося цилиндра внутри другаго неподвижнаго, и открылъ двойное преломленіе у маселъ и коллоидовъ. Чисто химическія жидкости такого явленія не обнаруживаютъ, и въ этомъ заключается затрудненіе въ правильной теоретической постановкѣ вопроса и его объясненія. Хотя профессоръ Kundt останавливается на гидродинамическихъ уравненіяхъ Stokes'a, тѣмъ не менѣе эти уравненія безсильны объяснить истинную причину явленія, потому что Stokes вводитъ въ нихъ коэффиціентъ внутренняго тренія жидкости η, не входя въ болѣе детальное развитіе мысли о механизмѣ послѣдняго, вслѣдствіе чего явленіе остается необъясненнымъ, такъ какъ между нимъ и внутреннимъ треніемъ жидкости нѣтъ вполнѣ простаго и яснаго соотношенія. Вотъ списокъ изслѣдованныхъ тѣлъ.

Съ двойнымъ преломленіемъ:

1) Касторовое масло.

2) Оливковое масло.

3) Оливковое масло съ петролеумомъ (пополамъ)

4) Оливковое масло (одна часть) съ петролеумомъ (двѣ части).

5) Сурѣпное масло.

6) Льняное масло.

---

7) Коллодіумъ.

8) Коллодіумъ съ спиртомъ и эѳиромъ.

9) Гумми аравійское.

10) Канадскій бальзамъ съ бензоломъ.

11) Желатинирующій клей.

12) Нежелатинирующій клей.

Безъ двойнаго преломленія:

1) Оливковое масло (одна часть) съ петролеумомъ (три части).

2) Петролеумъ.

3) Бензолъ.

4) Вода.
5) Эөиръ.
6) Алкоголь.
7) Глицеринъ.
8) Жидкое стекло.

Концентрированные растворы въ водѣ:
9) Сахара.
10) Хлористаго кальція.
11) Сѣрноватистаго натрія.
12) Метафосфорной кислоты.
Неопредѣленнаго характера:
1) Альбуминный растворъ.
2) Декстринный растворъ.
3) Терпентинное масло.

Профессоръ Kundt искалъ связи между двойнымъ преломленіемъ и внутреннимъ треніемъ изучаемыхъ жидкостей, однако сопоставленіе чиселъ показало, что двойное преломленіе отъ внутренняго тренія совершенно не зависитъ и не стоитъ съ нимъ въ связи. Разсматривая основныя начала этого явленія, Kundt останавливается на воззрѣніяхъ Maxwell'a, согласно которымъ внутреннее треніе жидкости η есть произведеніе изъ времени разслабленія T на коэффиціентъ твердости E, т. е.

$$\eta = E.T, \tag{1}$$

причемъ Kundt полагаетъ, что физическое состояніе тѣлъ зависитъ отъ величины T. Въ твердыхъ тѣлахъ время разслабленія T можетъ быть безконечно велико, а такъ какъ для нихъ опытный коэффиціентъ твердости E-конеченъ, то отсюда—коеффиціентъ η тоже безконечно великъ. Въ жидкихъ тѣлахъ тогда, наоборотъ, время разслабленія T должно быть очень мало, но въ маслахъ и коллоидахъ по абсолютной величинѣ своей оно имѣетъ нѣсколько большее значеніе, чѣмъ у остальныхъ жидкостей. Если одинъ множитель T приведеннаго уравненія (1) по ги-

потезѣ очень малъ, то и другой E долженъ быть также малъ, потому что коэффиціентъ η, опредѣленный въ случаѣ жидкихъ тѣлъ опытомъ,—малая величина. Эта зависимость между коэффиціентами η, E и T до сихъ поръ не могла быть провѣренною на опытѣ, ибо для твердыхъ тѣлъ возможно знать только E, а для жидкихъ—η, поэтому лишь при знаніи времени T можно было-бы разрѣшить этотъ вопросъ, но пока намъ неизвѣстна экспериментальная метода для опредѣленія коэффиціента T. Что-же касается коэффиціента E, то, по мнѣнію Sir. W. Thomson'а, для жидкихъ тѣлъ онъ не можетъ быть опредѣленъ даже приблизительно изъ объемной ихъ упругости. Поэтому пока уравненіе Maxwell'а носитъ чисто гипотетическій характеръ. Впрочемъ, Maxwell опредѣлилъ время T для воздуха изъ опытнаго коэффиціента его тренія η и E равнаго $^3/_5$ объемной упругости и нашелъ

$$T = \frac{1}{5\ 099\ 100\ 000}\ sec.$$

Kundt высказываетъ далѣе мнѣніе, что двойное преломленіе есть функція отъ E и T, т. е.

$$\Delta = f(E, T), \qquad (2)$$

но, разумѣется, опредѣлить теперь видъ этой функціи довольно трудно. По Maxwell'у, однако, должно быть:

$$\Delta = K.F = K.E.S.e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (3)$$

$$\Delta_1 = K.F_1 = K.E:S.e^{-\frac{t_1}{T}}, \qquad (4)$$

гдѣ K есть множитель пропорціональности, F—натяженіе, S—полная деформація, а t и t'—времена отъ начала деформаціи. Изъ уравненій (3) и (4) вытекаетъ

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = e^{-\frac{t_1 - t}{T}} \qquad (5)$$

Послѣднее уравненіе прямо показываетъ, что если знать Δ и Δ_1 для временъ t и t_1, то величина T становится извѣстною. Вопросъ только въ томъ, какъ расположить опытъ, чтобы получить значеніе T и вообще измѣримо-ли T по своей величинѣ?

§ 20. Оставивъ въ сторонѣ эти теоретическія соображенія, я [1]), по совѣту и подъ руководствомъ самаго профессора Kundt'а, продолжалъ начатую имъ работу, причемъ старался на числахъ подмѣтить нѣкоторые законы этого явленія. Мнѣ удалось показать на нѣсколькихъ маслахъ, что 1° двойное преломленіе пропорціонально скорости вращенія одного изъ цилиндровъ, что 2° для одного и того-же масла двойное преломленіе пропорціонально коэффиціенту внутренняго тренія, и что 3° двойное преломленіе маселъ и коллоидовъ не зависитъ отъ коэффиціента объемной упругости. Подробному разбору этихъ положеній посвящаются слѣдующія главы.

§ 21. Все вышеизложенное даетъ возможность утверждать съ достаточнымъ основаніемъ, что:

1° Молекулярное измѣненіе структуры даннаго изотропнаго тѣла прямо пропорціонально внѣшней силѣ.

2°. Ось механическаго дѣйствія есть оптически—кристаллографическая ось искусственнаго кристалла.

3°. Знакъ одноосная искусственнаго кристалла не всегда зависитъ отъ знака механическаго дѣйствія; иногда онъ зависитъ также отъ физическаго состоянія тѣла, и одному и тому-же механическому дѣйствію могутъ соотвѣтствовать два кристаллографическихъ знака.

---

[1]) G. de Metz. Wied. Ann., Bd. 35, 1888, p. 497—507.

Глава II.

О двойномъ преломленіи жидкихъ тѣлъ.

§ 22. Извѣстно, что двойное преломленіе свѣта возможно лишь въ такой средѣ, гдѣ упругость свѣтоноснаго эѳира по двумъ направленіямъ различна; тогда по направленію наибольшей упругости идетъ одна система волнъ, а по направленію наименьшей — другая, вслѣдствіе чего лучъ, попавшій въ подобную среду, раздваивается. Это свойство хотя и составляетъ постоянную особенность кристаллическихъ тѣлъ всѣхъ системъ, исключая кубической, тѣмъ не менѣе въ такой чистой формѣ раздвоеніе луча встрѣчается у сравнительно немногихъ кристалловъ; поэтому двойное преломленіе кристаллическихъ формъ было хорошо изучено Biot'омъ и Brewster'омъ только съ открытіемъ хроматической поляризаціи, въ 1811 году.

§ 23. Пропуская лучъ свѣта по разнымъ направленіямъ кристалла, скажемъ для опредѣленности—кристалла исландскаго шпата, находимъ, что обыкновенный лучъ характеризуется постояннымъ показателемъ преломленія $n_{(o)}=1.6585$, а необыкновенный—перемѣннымъ показателемъ преломленія въ предѣлахъ отъ 1.6585 до 1.4865. За показателя преломленія необыкновеннаго луча принимаютъ наименьшее изъ всѣхъ значеній $n_{(e)}=1.4865$. Оба луча пріобрѣтаютъ показателей преломленія $n_{(o)}=1.6585$ и $n_{(e)}=1.4865$ въ томъ только случаѣ, когда падающій лучъ составляетъ уголъ въ 90° съ направленіемъ главной оси кристалла; если-же падающій лучъ идетъ по самой оси кристалла, то необыкновенный лучъ исчезаетъ, а вмѣстѣ съ нимъ и двойное лучепреломленіе.

§ 24. Поэтому, желая воспроизвести искусственное двойное преломленіе въ слоѣ изотропной жидкости, его необходимо такъ оріентировать относительно падающаго луча, чтобы послѣдній шелъ перпендикулярно къ оси этого искусственнаго кристалла, т. е., согласно § 21, къ оси механическаго дѣйствія. Кромѣ того, вслѣдствіе незначительности этого рода двойнаго преломленія, нельзя ожидать раздвоенія лучей, а потому при изученіи ихъ свойствъ нужно пропускать черезъ жидкость поляризованный лучъ свѣта, а не естественный, и только на основаніи анализа этого послѣдняго судить объ оптическихъ эффектахъ, вызванныхъ приложенными механическими силами. Остается такимъ образомъ заранѣе рѣшить вопросъ, какое именно направленіе занимаетъ механическая (она-же въ системѣ одноосныхъ кристалловъ, согласно уже сказанному раньше, будетъ оптическая и кристалло-графическая) ось по отношенію къ радіусу тѣхъ концентрическихъ поверхностей, между которыми, по методѣ Maxwell'а и Kundt'а, происходитъ вращеніе жидкаго слоя, и каковы силы, обусловливающія это двойное преломленіе? Отвѣтъ на эти вопросы лежитъ въ расположеніи самаго опыта. При вращеніи внутренняго цилиндра и неподвижности внѣшняго, слой жидкости, прилегающій къ подвижному цилиндру, вращается со скоростью V; слой, прилегающій къ неподвижному, остается въ покоѣ; всѣ промежуточные слои вращаются, слѣдовательно, съ перемѣнною по радіусу скоростью, въ предѣлахъ отъ 0 до V. Это замедленіе происходитъ вслѣдствіе сопротивленія скольженію одного слоя по другому. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ натяженіе по касательной къ радіусу, и въ этой деформаціи лежитъ объясненіе явленія. Однако, недостаточно указать на происхожденіе деформирующей силы, нужно точно опредѣлить ея направленіе; Kundt опредѣляетъ въ этомъ случаѣ направленіе осей упругости подъ угломъ въ 45° къ касательной и къ радіусу, проходящему черезъ данную точку жидкости. Подробности представлены на фигурѣ 3-ей, причемъ если ось $b'b'$ есть ось сжатія, то ось $a'a'$—ось растяженія.

§ 25. Эти положенія a priori слѣдуетъ, однако, принимать съ нѣкоторою осмотрительностью. Во-первыхъ, самъ профессоръ Kundt [1]) показалъ на опытѣ съ коллодіумомъ и гумми аравійскимъ, что такое разсужденіе приводитъ къ противорѣчію съ опытомъ. Вмѣсто теоретическаго угла въ 45°, коллодіумъ дѣлаетъ уголъ всего въ 25°, а гумми аравійское—въ 40°; оливковое, льняное и рѣпное масла, правда, согласуются съ теоріей. Во-вторыхъ, и это еще важнѣе, приведенныя теоретическія разсужденія обнаруживаютъ свое безсиліе главнымъ образомъ въ томъ, что они не въ состояніи найти причины—почему однѣ жидкости (масла и коллоиды) даютъ двойное преломленіе, а другія его не даютъ. Мнѣ кажется поэтому, что первенствующую роль въ опредѣленіи направленія осей нужно пока отдать опыту и руководиться только имъ.

§ 26. Я началъ свое изслѣдованіе съ того, что повторилъ опыты профессора Kundt'а съ его маленькимъ приборомъ, въ которомъ вращеніе внутренняго цилиндра поддерживалося помощью часоваго механизма. Мнѣ удалось прослѣдить описанные имъ факты, но при этомъ я замѣтилъ въ оптическомъ полѣ большое непостоянство явленія, обусловленное неравномѣрностью движенія часоваго механизма; сверхъ того, явленіе было очень кратковременно. Послѣ этой пробы я долженъ былъ перейти къ измѣренію величины новаго двойнаго преломленія, а для этой цѣли нужно было имѣть хорошій моторъ. Испробовавъ нѣсколько штукъ пружинныхъ механизмовъ, я убѣдился въ ихъ непригодности и перешелъ къ башеннымъ часамъ съ падающимъ грузомъ въ 100 kgr. Правда, послѣдніе дали хорошій эффектъ, но крайне слабый; они не только не въ состояніи были производить необходимую работу, но даже не побѣждали простаго тренія на осяхъ моего прибора.

Наконецъ, я остановилъ свое вниманіе на электромоторѣ, который я себѣ изготовилъ послѣ небольшихъ передѣлокъ въ

[1]) Kundt. loc. cit., p. 123—126.

маленькой динамомашинѣ Siemens'а, служащей для взрывовъ минъ, но когда и она оказалась слабою, то профессоръ Kundt любезно предоставилъ въ мое распоряженіе газъ-моторъ въ четыре лошадиныя силы съ динамомашиною Грамма, дававшею при короткомъ замыканіи токъ въ 18 Ampère'овъ. Этотъ токъ я пропускалъ черезъ вторую динамомашину Грамма, которая служила мнѣ электромоторомъ.

Считаю небезъинтереснымъ остановиться на достоинствахъ и недостаткахъ этого двигателя, такъ какъ въ моихъ измѣреніяхъ постоянство вращенія было однимъ изъ весьма существенныхъ требованій и съ нимъ связана оцѣнка точности моихъ опытовъ. Вообще можно сказать, что его скорость чувствительно постоянна; такъ, изъ цѣлаго ряда опытовъ я могъ убѣдиться въ томъ, что, установивъ опредѣленную скорость вращенія введеніемъ соотвѣтственнаго сопротивленія въ гальваническую цѣпь, электромоторъ поддерживалъ ее въ теченіи времени, потребнаго на производство пяти полныхъ опытовъ. Наблюдаемыя колебанія единичны въ рядѣ чиселъ скоростей и скорѣе указываютъ на ошибку въ отсчетѣ времени по секундобойщику, чѣмъ на дѣйствительное измѣненіе скорости. На основаніи всѣхъ моихъ наблюденій я считаю скорость мотора постоянною до 3%. Замѣчу тѣмъ не менѣе, что столь благопріятный результатъ получается лишь при весьма тщательномъ и опрятномъ уходѣ и содержаніи всѣхъ трехъ машинъ: обѣихъ динамомашинъ и газоваго мотора; какъ только загрязнялись коллекторы электромотора или наступала пора чистить газомоторъ, то скорость вообще падала, становилась крайне непостоянною и измѣнялась скачками.

§ 27. Покончивъ съ моторомъ, перейду къ описанію прибора, въ которомъ вращались жидкости. Идея этого прибора та-же, что большаго и малаго приборовъ Kundt'а [1]), только механическое его выполненіе гораздо проще и цѣлесообразнѣе.

[1]) Kundt. loc. cit., p. 112—116.

На прямоугольной латунной рамѣ (фиг. 2-ая, въ $^1/_5$ нат. величины) лежитъ въ подшипникахъ *BBBB* ось подвижнаго внутренняго цилиндра *cccc* длиною въ 10 c. m., расположеннаго концентрически ко второму неподвижному внѣшнему цилиндру *dddd* на разстояніи по радіусу отъ 0.5 c. m. до 1 c. m. Вся рама прикрѣплена помощью четырехъ винтовъ *ffff* къ цинковому ящику (15×10×15 c. m.), при построеніи котораго было обращено особое вниманіе на сокращеніе его длины до полезнаго дѣйствія, т. е. до 10 c. m. вращающагося внутренняго цилиндра, вслѣдствіе значительнаго поглощенія свѣта маслами.

Передаточный механизмъ (фиг. 1) состоитъ изъ твердой оси *pq*, на которой насажено колесо *R* съ выемкою по окружности для безконечнаго ремня, идущаго отъ электромотора. Одинъ конецъ этой оси соединенъ съ осью *OO'* подвижнаго цилиндра спиралью, которая употребляется врачами для сверленья зубовъ, а другой — съ осью счетчика оборотовъ C Savart'a [1]). Производя въ теченіи нѣсколькихъ мѣсяцевъ изслѣдованіе, я пришелъ къ оцѣнкѣ спирали; выгода ея употребленія сравнительно съ коническими зацѣпленіями не подлежитъ никакому сомнѣнію. Наибольшее достоинство ея состоитъ въ передачѣ вращенія безъ толчковъ и сотрясеній даже при большихъ скоростяхъ.

§ 28. Оптическая метода была слѣдующая. Наполненный жидкостью только что описанный ящикъ ставился между двумя скрещенными Nicol'ями *N* и *A*, коихъ плоскости поляризаціи были соотвѣтственно установлены горизонтально и вертикально. Передъ анализаторомъ, оправленнымъ въ раздѣленный кругъ, находился весьма чувствительный компенсаторъ Babinet *K*, интерференціональная полоса котораго стояла подъ угломъ въ 45° къ плоскости поляризаціи анализатора, согласно воззрѣ-

[1]) Jamin et Bouty, Cours de Physique. Paris, 1881, t. III, fasc. I, p. 28.

ніямъ профессора Kundt'a [1]). Эта полоса по обыкновенію лежала между двумя нитями и визировалась вмѣстѣ съ ними помощью маленькой трубы Dubosq'a L.

Свѣтъ былъ различный: иногда солнечный, но чаще всего газовый, отъ сильной лампы «Präcisionsbrenner'a» (усовершенствованной лампы Argand'a).

Употребленіе однороднаго свѣта при газовой лампѣ, вслѣдствіе сильнаго его поглощенія въ толстомъ слоѣ масла (15 c. m.), было невозможно: солнце-же свѣтило очень рѣдко. Потому всѣ наблюденія сдѣланы съ бѣлымъ свѣтомъ. Ходъ свѣтоваго луча понятенъ изъ фигуры 1-ой.

Картина оптическаго поля была двоякая. Когда жидкость находилась въ покоѣ, то въ полѣ видна была одна черная интерференціонная полоса между двумя нитями (фиг. 3-я, α), а при вращеніи жидкости полоса принимала форму (фиг. 3-я, β) изогнутой линіи въ сторону вращенія. Maximum искревленія приходится на конецъ f полосы, прилегающій къ вращающемуся цилиндру cc, а minimum его стоитъ приблизительно на $^1/_3$ отъ неподвижнаго цилиндра dd. Нижній конецъ полосы h, вблизи неподвижнаго цилиндра dd, также искривленъ въ сторону вращенія.

§ 29. Мои измѣренія заключались въ приведеніи перемѣщеннаго конца полосы f въ первоначальное положеніе между обѣихъ нитей; это перемѣщеніе и есть выраженіе двойнаго преломленія, т. е. разности хода между обыкновеннымъ и необыкновеннымъ лучами Δ. Разумѣется, мнѣ пришлось ограничиться опредѣленной частью полосы, такъ какъ вслѣдствіе ея искривленія компенсаторомъ возможно привести между нитей только одну какую-либо часть ея. Я остановился на мѣстѣ наибольшаго ея искривленія и измѣрялъ ея отклоненія въ части, отстоявшей на 1 m. m. отъ вращающагося цилиндра. Этимъ способомъ мною опредѣлена разность хода Δ. Относя всѣ раз-

[1]) Kundt. loc. cit., p. 120.

ности хода Δ къ ходу микрометрическаго винта компенсатора Babinet, мнѣ нужно было знать, каково значеніе каждаго дѣленія скалы и барабана винта въ частяхъ длины волны λ, другими словами, каковы постоянныя компенсатора? Съ этою цѣлью я воспользовался формулою Jamin'a [1]), по которой

$$\Delta = \frac{1}{2}\frac{D}{\gamma}\lambda,$$

γ означаетъ постоянное разстояніе между двумя сосѣдними интерференціонными полосами компенсатора въ дѣленіяхъ микрометра, а D есть отклоненіе отъ начальнаго положенія на произвольное число дѣленій того-же микрометра; такимъ образомъ разность хода Δ выражается абсолютно въ длинѣ волны λ. Я опредѣлилъ, при свѣтѣ натрія, постоянную γ послѣдовательнымъ приведеніемъ лѣвой и правой боковыхъ полосъ между обѣихъ нитей; изъ этого перемѣщенія въ среднихъ числахъ я нашелъ:

γ лѣво $= 61$ дѣленіе скалы $+ 34.70$ дѣленія микрометра
γ право $= 61$ » » $+ 57.59$ » »

зная же изъ другаго ряда опытовъ, что одно дѣленіе скалы равно 57.81 дѣленія барабана, получимъ

γ лѣво $= 3561.11$
γ право $= 3584.00$.

Откуда среднее значеніе

$\gamma = 3572.56$ дѣленія барабана.

Изъ приведенныхъ чиселъ видно, что ошибка въ опредѣленіи крайнихъ значеній постоянной γ не превышаетъ 0.6%; кромѣ того, абсолютное значеніе этой постоянной указываетъ на огромную чувствительность компенсатора. Изъ сравненія моихъ чиселъ съ числами Jamin'a, я нахожу, что мой компенсаторъ въ 281,3 раза чувствительнѣе его; онъ былъ изготовленъ

[1]) Jamin. Ann. de Ch. et de Phys., (3), t. 29, 1850, p. 273

Meyerstein'омъ и имѣлъ на всемъ протяженіи подвижной кварцевой пластинки лишь 3 полосы при натріевомъ освѣщеніи.

Результаты.

§ 30. Первою моею задачею было опредѣленіе соотношенія между скоростью вращенія V внутренняго цилиндра и соотвѣтственною разностью хода Δ, т. е. опредѣлить характеръ

$$\Delta = F(V),$$

и первыя-же изслѣдованія показали, что въ предѣлахъ ошибокъ опыта можно положить

$$\Delta = \alpha V.$$

Измѣренія были произведены со свѣжею и старою оливою, тресковымъ жиромъ, сладкимъ миндальнымъ масломъ и смѣсью свѣжей оливы съ 5,5% твердаго параффина; рицинное масло дало нѣсколько иной результатъ, о чемъ будетъ сказано ниже. Теперь приведу числа для свѣжей оливы.

Таблица I. Свѣжая олива изъ Ниццы.

V	D	Δ	α
6,06	52,31	0,00732	0,00120
6,66	57,81	0,00809	0,00121
7,14	58,81	0,00823	0,00115
16,00	133,62	0,01870	0,00117
17,25	148,62	0,02080	0,00120
22,29	182,93	0,02560	0,00115
25,00	205,24	0,02872	0,00115
26,66	217,47	0,03043	0,00114
31,25	271,49	0,03799	0,00121
33,33	283,10	0,03962	0,00119
34,12	285,68	0,03998	0,00117
36,84	303,83	0,04252	0,00115
43,43	372,48	0,05213	0,00120
43,75	360,86	0,05049	0,00115
44,64	379,48	0,05311	0,00119
46,66	383,08	0,05361	0,00115
50,00	422,25	0,05909	0,00118
53,84	459,77	0,06434	0,00119
55,55	471,68	0,06601	0,00119
63,63	533,65	0,07468	0,00117

Среднее ариѳметическое изъ 91 подобной установки даетъ значеніе

$$\alpha = 0.001175;$$

ошибка отдѣльныхъ наблюденій составляетъ 5.8%. Вообще говоря, эта ошибка весьма значительна при опредѣленіи физической постоянной, но въ явленіяхъ подобнаго рода она неизбѣжна по слѣдующимъ причинамъ:

1°. Скорость мотора въ наилучшемъ случаѣ постоянна лишь до 3%, какъ сказано въ § 26.

2°. Установка интерференціонной полосы производится быстро для избѣжанія порчи всего прибора при дѣйствіи большихъ скоростей Эта установка несомнѣнно влечетъ ошибку, въ особенности еще потому, что интерференціонная полоса рѣзкая и черная до вращенія внутренняго цилиндра становится диффузною и расплывчатою съ возрастаніемъ скоростей, и при очень большихъ скоростяхъ нужно уже имѣть достаточный навыкъ при опредѣленіи величины отклоненія.

3°. При вращеніи внутренняго цилиндра происходитъ обогрѣваніе жидкости, точная оцѣнка котораго почти невозможна, такъ какъ термометръ, даже погруженный въ слой жидкости между обоими цилиндрами, указываетъ какую-то среднюю температуру, а не температуру изучаемаго элементарнаго слоя. Между тѣмъ извѣстно, какъ велико вліяніе температуры на физическія постоянныя жидкости. Ошибка на температуру, какъ будетъ показано ниже, огромна.

Приведенная процентная оцѣнка ошибокъ не будетъ, впрочемъ, казаться столь выходящею изъ ряда вонъ, если я напомню, что въ изслѣдованіяхъ Wertheim'а [1]) средній коэффиціентъ оптической упругости нѣкоторыхъ тѣлъ вычисляется при ошибкѣ отдѣльныхъ наблюденій въ %.

[1]) Wertheim. loc. cit., p. 186—187.

Названіе вещества	Ошибки въ %
Каменная соль..........	13
Квасцы................	30
Кронгласъ.............	16
Плавиковый шпатъ.......	22
Флинтъ de Guinand......	11
Флинтъ тяжелый de Feil..	18

У Hodkinson'a [1]), при опредѣленіи средняго отношенія временнаго сжатія металловъ къ нагрузкѣ, ошибки отдѣльныхъ наблюденій колеблются между 9% и 18.2%. Вслѣдствіе всего этого, я считаю возможнымъ брать среднее значеніе коэффиціента α, какъ изъ приведенной таблицы, такъ и изъ другихъ таблицъ, ибо предѣлы моихъ ошибокъ лежатъ значительно ближе между собою, именно отъ 4% до 7%.

§ 31. Въ слѣдующей таблицѣ привожу среднія значенія коэффиціента α для изслѣдованныхъ тѣлъ.

Таблица II.

	ρ	η	α	G	Z	F
Свѣжая олива.........	0,915	0,000588	0,001175	6 –63	91	5,8%
Старая олива..........	0,925	0,000930	0,001331	5–35	44	6,5
Миндальное сладк. масло	0,915	0,000544	0,000899	7–62	77	4,0
Тресковый жиръ.......	0,923	0,000453	0,000906	16–63	69	6,5
Свѣжая олива съ 5,5% твердаго парафина.	0,907	0,000545	0,000717	14–50	33	7,0

Значеніе приведенныхъ колоннъ таково: ρ—есть удѣльный вѣсъ при 20° C.; η—коэффиціентъ внутренняго тренія; α—искомый коэффиціентъ двойнаго преломленія; G—предѣлы скоростей V, выраженные въ числѣ оборотовъ въ 1 секунду; Z—число отдѣльныхъ установокъ; F—предѣлы ошибокъ отдѣльныхъ наблюденій.

§ 32. Изъ расмотрѣнія таблицъ I-й и II-й приходимъ къ заключеніямъ:

[1]) Wertheim. loc. cit, p. 162—164.

1°. Наблюдаемая разность хода Δ между обыкновеннымъ и необыкновеннымъ лучами пропорціональна скорости V вращенія внутренняго цилиндра, т. е.

$$\Delta = \alpha . V.$$

2°. Постоянный множитель α различенъ для различныхъ жидкостей и по абсолютной величинѣ очень малъ; его можно назвать коэффиціентомъ двойнаго преломленія, и онъ представляетъ собою разность хода при скорости вращенія въ одинъ оборотъ въ одну секунду въ слоѣ масла въ 10 с. m.

3°. Нельзя установить никакой связи между найденнымъ коэффиціентомъ двойнаго преломленія α и коэффиціентомъ внутренняго тренія η, а равно и плотностью ρ.

4°. Наблюденія можно считать хорошими только при средней скорости вращенія V; при маломъ числѣ оборотовъ (отъ 2 до 10 въ секунду) скорость слишкомъ непостоянна, а при очень большомъ (за 60 оборотовъ въ секунду) жидкость сильна обогрѣвается и приборъ дрожитъ. Кромѣ того, интерференціоная полоса на столько искривляется, что ее нельзя привести между нитей компенсатора, и становится диффузною.

5°. Наблюдаемую разность хода Δ должно относить къ средней длинѣ волны, такъ какъ всѣ масла были окрашены въ зеленовато-желтый цвѣтъ отъ соприкосносенія съ мѣдными частями аппарата. Черезъ слой масла пропускался пучекъ бѣлыхъ лучей, потому что вслѣдствіе сильнаго поглощенія свѣта въ изучаемыхъ маслахъ употребленіе монохроматическаго свѣта оказалось невозможнымъ. Тѣмъ не менѣе однако, немногія изслѣдованія съ монохроматическимъ свѣтомъ разной длины волнъ приводятъ къ заключенію, что разность хода отъ этого замѣтно не мѣняется; такимъ образомъ и сюда можно приложить законъ Wertheim'а о независимости разности хода Δ отъ длины волны λ.

6^0. Примѣсь 5.5% твердаго параффина къ чистой свѣжей оливѣ уменьшила значеніе коэффиціента двойнаго преломленія α съ 0.001175 до 0.000717, т. е. на 40%.

Двойное преломленіе есть функція температуры.

§ 33. Къ подобному выводу я пришелъ послѣ долгихъ и неудачныхъ опредѣленій коэффиціента α для рицинназо масла, отличающагося большою вязкостью. До сихъ поръ я не обращалъ особаго вниманія на температуру, потому что профессоръ Kundt [1]) въ своемъ резюме прямо говоритъ:

«Величина внутренняго тренія жидкостей не имѣетъ главнаго значенія въ проявленіи двойнаго преломленія». Убѣдившись, однако, въ обратномъ, я выполнилъ изслѣдованія по слѣдующему плану: *A*. Опредѣлилъ коэффиціентъ двойнаго преломленія α при постоянной скорости вращенія V, но при разной температурѣ t жидкости, т. е. $\Delta=f(t^0)$ при $V=const$. *B*. Нашелъ зависимость между измѣненіями внутренняго тренія и температуры одной и той-же жидкости, т. е. $\eta=\mathfrak{B}(t^0)$. *C*. И вновь разъискалъ форму функціи $\Delta=F(V)$ при посредствѣ этихъ данныхъ и при постоянной температурѣ, т. е. $\Delta=F(V)$ при $t^0=const$.

A. Двойное преломленіе свѣта какъ функція температуры жидкости.

§ 34. Желая найти зависимость между измѣненіями температуры и двойнаго лучепреломленія, мнѣ необходимо было нѣсколько перестроить внѣшній неподвижный цилиндръ, дабы поддерживать произвольную, но постоянную температуру во внутреннемъ жидкомъ слоѣ. Съ этою цѣлью внѣшній цилиндръ былъ перестроенъ въ цилиндръ о двухъ стѣнахъ, между которыми легко могли циркулировать вода или паръ, не смѣшиваясь ни съ внутреннимъ слоемъ масла, ни съ внѣшнею его массою.

---

[1]) Kundt. loc. cit., p. 128.

Опытъ, однако, немедленно показалъ, что при температурѣ кипѣнія воды разность хода крайне ничтожна, а при постоянной температурѣ водопровода, 14° — 15°С., машины не побѣждали всего тренія, и скорость вращенія внутренняго цилиндра доходила всего до 30—35 оборотовъ въ секунду. Поэтому я отказался отъ постоянныхъ температуръ и перешелъ къ непрерывно убывающимъ вслѣдствіе охлажденія. Именно, обогрѣвъ масло до 45°С., я вливалъ его въ аппаратъ, гдѣ оно сейчасъ же отдавало свое тепло металлическимъ частямъ и доходило всего до 40°С—это былъ верхній предѣлъ; нижній-же—былъ градусовъ 16°С. Измѣреніе температуръ по весьма хорошимъ, раздѣленнымъ до 0.02°С., термометрамъ Geissler'а дѣлалось одновременно съ соотвѣтственными отсчетами компенсатора Babinet. Одинъ изъ этихъ термометровъ (см. фиг. 1-ю) былъ погруженъ во внутренній жидкій слой, а другой во внѣшнюю массу; отсчеты перваго обозначены черезъ T_{int}, а послѣдняго—черезъ T_{ext}.

§ 35. Результаты наблюденій надъ рицинымъ масломъ и старою оливою выражены въ таблицахъ III-ей и IV-ой.

Скорость, разумѣется, въ этихъ опытахъ поддерживалась постоянною введеніемъ въ гальваническую цѣпь или выключеніемъ изъ нея соотвѣтственнаго сопротивленія.

Таблица III. Рицинное масло.

T_{int}	T_{ext}	δ	Δ
21,75	20,50	+ 1,25	0,119
22,50	22,10	+ 0,40	0,115
23,12	21,64	+ 1,48	0,110
24,18	23,10	+ 1,08	0,106
24,80	23,70	+ 1.10	0,099
26.23	25,30	+ 0,93	0,089
31,18	31,02	+ 0,16	0,062
31,45	31,30	+ 0,15	0,061
33,00	33,00	0.00	0,056
36,00	36,33	-- 0,33	0,048
36,25	36,60	— 0,35	0,046
37.15	37,35	— 0,20	0,043
37,80	38,00	— 0,20	0,042

$V = \frac{500 \text{ оборотовъ}}{17 \text{ секундъ}} = 29{,}41$; число установокъ 88.

Таблица IV. Старая олива.

T_{int}	T_{ext}	δ	Δ
16,60	16,60	0,00	0,0489
17,00	17,00	0,00	0.0485
17,40	17,10	+ 0,30	0.0460
20,60	?	—	0,0421
20,80	20,80	0,00	0,0417
24,00	24,00	0,00	0,0368
26,10	25,70	+ 0,40	0,0347
26,60	26,20	+ 0,40	0,0342
30,00	30,10	— 0,10	0,0297
30,90	30,90	0,00	0,0296
34,50	34,20	+ 0,30	0,0268
35,30	34,80	+ 0,50	0,0264
36,50	?	—	0,0236
36,80	36,80	0,00	0,0264
38,50	38,80	— 0,30	0,0252
38,80	38,80	0,00	0,0238

$V = \frac{500 \text{ оборотовъ}}{17 \text{ секундъ}} = 29.41$; число установокъ 55.

На основанія приведенныхъ чиселъ построены двѣ кривыя $\Delta = f(t)$, коихъ абсциссы суть температуры t (1 m. m. $= 0.1^0$ C.), а ординаты разности хода Δ (1 m. m. $= 0.0005\Delta$). Колонна δ показываетъ разность показаній $T_{int} - T_{ext}$. Какъ легко усмотрѣть, въ ходѣ этой разности нѣтъ никакой правильности, а по абсолютной величинѣ она иногда достигаетъ огромнаго значенія въ 1.48^0 C. (см. табл. III-ю); впрочемъ, въ таблицѣ IV-ой столь значительныя отступленія ужъ не встрѣчаются, что слѣдуетъ приписать гораздо меньшей вязкости старой оливы сравнительно съ рициннымъ масломъ. Во всякомъ случаѣ, *ходъ обѣихъ кривыхъ совершенно правильный и впервые показываетъ на зависимость между двойнымъ лучепреломленіемъ въ жидкостяхъ и ихъ температурою.*

B. Внутреннее треніе жидкостей какъ функція температуры.

§ 36. Найдя соотношеніе между двойнымъ лучепреломленіемъ и температурою, нужно было отрѣшиться отъ основнаго

взгляда профессора Kundt'а на отсутствіе связи между двойнымъ лучепреломленіемъ и внутреннимъ треніемъ жидкостей; съ этою цѣлью я изслѣдовалъ измѣняемость коэффиціента внутренняго тренія рициннаго масла и старой оливы съ температурою Предѣлы температуръ были тѣ-же, что въ предыдущемъ параграфѣ, а метода общепринятая—Poiseuille'я, при постоянномъ давленіи. Именно, одинъ конецъ стекляной трубы (діаметръ 2 c. m., длина $1^m.4$) былъ загнутъ подъ прямымъ угломъ и спаянъ съ капилляромъ, свободный конецъ котораго былъ расширенъ. Другой конецъ ея былъ установленъ вертикально, и въ него была вправлена особая воронка; непрерывнымъ капаніемъ она пополняла расходъ капилляра, а излишекъ прихода отводила въ сторону, въ другой сосудъ. Такимъ образомъ, верхній уровень въ большой трубкѣ оставался постояннымъ, а вмѣстѣ съ нимъ и давленіе. Изогнутое колѣно съ капилляромъ стояло горизонтально и было такъ помѣщено вдоль цинковой ванны вмѣстимостью въ $70 \times 15 \times 15$ c. m. cub., что расширенная часть капилляра проходила черезъ малую боковую стѣнку во внѣшнее пространство. Въ ванну наливалась вода желаемой температуры (14°—40° С) и соотвѣтственнымъ приливаніемъ то горячей, то холодной воды она поддерживалась постоянною до 0.02° С. въ теченіи цѣлаго часа.

Вычисленіе коэффиціента внутренняго тренія η было произведено по извѣстной формулѣ [1]).

$$\eta = \frac{\pi}{128} \cdot \frac{H.D^4}{Q.L}.$$

L означаетъ длину капилляра, D—діаметръ его, H—давленіе въ m. m. ртутнаго столба, а

$$Q = \frac{P}{T\rho(1+\theta t)};$$

здѣсь P выражаетъ вѣсъ въ миллиграммахъ жидкости, протек-

[1]) Jamin et Bouty, Cours de Physique. t. 1, fasc. II, 1882, p. 103.

шей за T секундъ средняго времени; ρ—есть плотность, θ—коэффиціентъ расширенія [1]), а t есть температура ванны.

§ 37. Результаты этихъ опытовъ представлены въ двухъ послѣдующихъ таблицахъ:

Таблица V. Рицинное масло.

L=217.5 m. m.; θ=0.000761; D=0.6274 m. m; H=98.22—98.68 m. m.; ρ=0.956 при 19.4° C.

t	Q	η
40°C.	0,9804	0,001758
35	0,6998	0,002463
30	0,4852	0,003538
25	0,3292	0,005230
20	0,2345	0,007348
15.65	0,1745	0,009829

Таблица VI. Старая олива.

L=264 m. m.; θ=0.0007418; D=0.6274 m. m.; H=96.24 m. m.; ρ=0.928 при 15.25° C.

t	Q	η
40°C.	3,8662	0,0003585
35	3,2066	0,0004323
30	2,4952	0,0005555
25	1,9787	0,0007005
20	1,4895	0,0009306
14.9	1,1125	0,0012459

Эти обѣ таблицы переведены въ кривыя $\eta = \mathfrak{B}(t)$ (см. фиг. 4); причемъ за ось абсциссъ опять приняты температуры (1 m. m.=0.1°C.), а за ось ординатъ—коэффиціентъ внутренняго тренія η (1 m. m.=0.00005 η). Полученныя такимъ образомъ кривыя указываютъ: 1° на правильность ихъ хода и 2° на огромное измѣненіе коэффиціента внутренняго тренія съ температурою; по сравненію же съ кривыми $\Delta = f(t)$, онѣ

[1]) Коэффиціенты расширенія были опредѣлены помощью пикнометра; см. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik, Leipzig. 1880, p. 75.

даютъ основаніе утверждать 3°, что въ *одной и той-же жидкости двойное преломленіе почти пропорціонально коэффиціенту внутренняго тренія.*

Эта зависимость, однако, не можетъ быть выражена на подобіе предыдущей въ формѣ простой пропорціональности.

Хотя указанная сейчасъ зависимость получена только для рициннаго и оливковаго маселъ, тѣмъ не менѣе, на основаніи опытовъ §§ 30 и 31 можно утверждать, что она настолько-же обща, какъ и законъ пропорціональности между механическимъ и оптическимъ эффектами.

C. Двойное лучепреломленіе какъ функція скорости вращенія при постоянной температурѣ.

§ 39. Въ виду сказаннаго раньше при описаніи прибора, я не могъ поддерживать въ немъ постоянной температуры, а потому производилъ опыты съ перемѣнною температурою въ предѣлахъ колебаній отъ 3°—4° С, а затѣмъ, при помощи таблицъ III-ей и IV-ой, интерполировалъ и приводилъ наблюденія къ постоянной температурѣ. Результаты этихъ изслѣдованій помѣщены въ слѣдующихъ двухъ таблицахъ.

Таблица VII. Рицинное масло при 25° C.

Показатель преломленія $n_D = 1.4780$ при 25° C.

V	Δ
6,90	0,047
8,10	0,052
8,33	0,053
8,57	0,055
8,82	0,057
11,77	0,078
12,00	0,079
13,04	0,083
13,64	0,082
20,00	0,108
20,83	0,113
30,77	0,150
35,71	0,175
38,46	0,181
41,66	0,194
55,55	0,249

Число установокъ 93.

Таблица VIII. Старая олива при 23° С.

Показатель преломленія $n_D = 1.4708$ при 23° С.

V	Δ
8,11	0,013
8,82	0,012
9,70	0,015
12,50	0,019
14,29	0,020
15,00	0,021
20,09	0,025
26,14	0,034
29,41	0,039
31,25	0,041
35,71	0,046
41,66	0,054
45,45	0,060
50,00	0,065
55,55	0,073

Число установокъ 41.

Числовыя данныя обѣихъ таблицъ представлены графически на фиг. 5-ой; за абсциссы приняты скорости V (1 m. m. = 0.2 оборота), за ординаты разность хода Δ (1 m. m. = 0.001λ). Всматриваясь въ кривую оливковаго масла, замѣчаемъ дѣйствительно зависимость близкую къ пропорціональной; кривая-же рициннаго масла показываетъ на отставаніе разности хода Δ съ возрастаніемъ скоростей. Я полагаю, что вообще въ этихъ опытахъ нельзя требовать большей точности, такъ какъ измѣреніе температуръ производится довольно грубо, а температуры, какъ видно изъ таблицъ III-ей и IV-ой, оказываютъ огромное вліяніе на изучаемыя явленія. Впрочемъ, слабое отступленіе отъ пропорціональности мы замѣчаемъ уже въ опытахъ Wertheim'а [1]) съ твердыми тѣлами, такъ что, быть можетъ, оно лежитъ въ природѣ этихъ явленій.

---

[1]) Wertheim. loc. cit., p. 191 и p. 217—218.

Заканчивая эту главу, я хочу сдѣлать нѣсколько дополненій къ описанію явленія.

§ 40. Прежде всего замѣчу, что форма интерференціонной полосы компенсатора принимаетъ нѣсколько иную форму, чѣмъ описываетъ профессоръ Kundt. Я наблюдалъ у всѣхъ маселъ у точки b (фиг. 3-я) поворотъ полосы въ сторону движенія внутренняго цилиндра cc, такъ что казалось будто у неподвижнаго цилиндра dd движеніе жидкости столь-же сильно, какъ и у подвижнаго. Объясненіе этого факта я нашелъ въ распредѣленіи температуръ во вращающемся слоѣ жидкости. Въ дѣйствительности мы видимъ, что у подвижнаго цилиндра жидкость будетъ обогрѣта гораздо сильнѣе, чѣмъ у неподвижнаго, слѣдовательно, разность хода Δ_1, если-бы скорость вращенія жидкихъ частицъ была одинакова возлѣ того и другаго, у подвижнаго цилиндра было-бы меньше разности хода Δ_2 у неподвижнаго; но скорость вращенія V_1 у подвижнаго цилиндра больше скорости V_2 у неподвижнаго, и отсюда получается суммированіе двухъ взаимно-противоположныхъ механическихъ эффектовъ, которые при допущеніи разности температуръ въ 5^0 C. вполнѣ даютъ возможность начертить кривую, подобную опытной.

Такую кривую я получилъ изъ уравненія:

$$\Delta = -A.\eta \frac{2aV}{b^2-a^2} \cdot \frac{b^2}{r^2},$$

которое профессоръ Kundt установилъ для этого рода двойнаго преломленія. Въ немъ a и b суть радіусъ внутренняго и внѣшняго цилиндровъ, r есть радіусъ изучаемой частицы жидкости между a и b, A—факторъ пропорціональности, а η—коэффиціентъ внутренняго тренія.

§ 41. Изъ только что приведеннаго уравненія видно, какъ велико вліяніе того факта, на какомъ разстояніи находится внѣшній цилиндръ отъ внутренняго. На самомъ-же дѣлѣ, имѣя два внѣшнихъ цилиндра dd въ 5 m. m. и 10 m. m. разстоянія, т. е.

$b=a+5$ m. m. и $b=a+10$ m. m., я не могъ констатировать той разницы, величина которой изъ него опредѣляется теоретически.

§ 42. При изученіи двойнаго преломленія рициннаго масла я натолкнулся на особенность, которой не могъ пріискать точнаго объясненія. Полоса компенсатора при покоящейся жидкости была совершенно черна, когда-же жидкость приходила въ движеніе, то она переходила въ зеленоватую, и только вращеніемъ анализирующаго Николя *A* (фиг. 1) я могъ возстанавливать нарушенный черный цвѣтъ. Такимъ образомъ, здѣсь есть какъ-бы вращеніе плоскости поляризаціи, но возможно, что мы имѣемъ дѣло съ болѣе сложными свѣтовыми колебаніями двойнаго-же преломленія. Любопытно будетъ замѣтить, что это вращеніе пропорціонально скорости V и обратно пропорціонально температурѣ t. Я произвелъ измѣреніе этой величины φ и кстати замѣчу, что при $t=24^0$ C. $\varphi=17^0 42'$.

Заключеніе.

Все до сихъ поръ изложенное можно резюмировать такъ:

1°. Двойное преломленіе свѣта во вращающихся жидкостяхъ присуще не всѣмъ имъ, а только коллоидамъ и масламъ по преимуществу.

2°. Это двойное преломленіе свѣта нельзя пока поставить въ связь ни съ однимъ изъ извѣстныхъ физическихъ свойствъ жидкостей, и теорія не въ состояніи разъяснить его отсутствія у нѣкоторыхъ изъ нихъ.

3°. Направленіе механической, а стало быть и оптической, оси теоретически слѣдуетъ считать подъ угломъ въ 45^0 съ касательною къ радіусу разсматриваемой частицы; опытъ, однако, указываетъ, что иногда оно можетъ составлять уголъ въ 40^0 и 25^0 [1]).

4°. Знакъ двойнаго преломленія зависитъ отъ направленія

[1]) Kundt. loc. cit., p. 123 и 126.

движенія жидкости; при движеніи ея по часовой стрѣлкѣ полоса компенсатора отклоняется влѣво отъ своего начальнаго положенія, а при движеніи противъ часовой стрѣлки—вправо.

5°. Измѣренная разность хода Δ зависитъ отъ скорости вращенія V и температуры t, такъ что Δ достигаетъ своего maximum при V=maximum и при t=minimum.

6°. Двойное преломленіе есть такимъ образомъ функція двухъ параметровъ V и t, и если одинъ изъ нихъ сдѣлать const, то тогда Δ пропорціонально другому. Отсюда:

7°. Во-первыхъ, если t = const, двойное преломленіе Δ пропорціонально скорости вращенія V, т. е. $\Delta = \alpha . V$, причемъ коэффиціентъ α различенъ для различныхъ жидкостей.

8°. Во-вторыхъ, если V=const, двойное преломленіе почти пропорціонально коэффиціенту внутренняго тренія η изучаемой жидкости, т. е. $\Delta = \beta . \eta$, причемъ множитель β различенъ для различныхъ жидкостей.

9°. Примѣсь вещества, не обладающаго двойнымъ преломленіемъ отъ вращенія, къ другому, обладающему имъ, необыкновенно сильно ослабляетъ разность хода Δ послѣдняго, не смотря на то, что коэффиціентъ внутренняго тренія η его измѣняется ничтожно.

10°. Выводъ 8-ой составляетъ парадоксъ съ выводомъ 3° § 32 и опытами профессора Kundt'а и моими о независимости двойнаго преломленія Δ отъ коэффиціента η.

11°. Разность хода Δ между обыкновеннымъ и необыкновеннымъ лучами достигаетъ въ этого рода опытахъ ничтожной величины: minimum въ 0.01λ (олива съ параффиномъ) и maximum 0.2487λ (рицинка) на 10 с. m. свѣтоваго луча; λ слѣдуетъ отнести къ длинѣ волны средней части спектра, а Δ —къ толщинѣ слоя въ 10 с. m.

12°. Разность хода, повидимому, не зависитъ отъ длины волны, т. е. дисперсія этого двойнаго преломленія не велика.

Глава III.

О сжимаемости маселъ и коллоидовъ.

§ 43. Продолжая разъискивать возможную зависимость явленія Kundt'а отъ какихъ-либо еще другихъ физическихъ свойствъ жидкостей, я остановился на ихъ сжимаемости, а вмѣстѣ съ тѣмъ и ихъ упругости. Подобная мысль казалась мнѣ тѣмъ болѣе возможною и допустимою, что, какъ извѣстно, скорость распространенія C свѣтовой волны въ данной средѣ прямо пропорціональна корню квадратному изъ упругости послѣдней E и обратно пропорціональна ея массѣ M, т. е.

$$C = \sqrt{\frac{E}{M}}. \tag{1}$$

A priori можно было-бы думать, что жидкости, дающія явленія двойнаго преломленія, должны имѣть или большія значенія для C, или же малыя, но во всякомъ случаѣ такія, что рядъ чиселъ, выражающій упругость жидкостей съ двойнымъ преломленіемъ, будетъ значительно разниться отъ ряда чиселъ, выражающихъ упругость жидкостей, не обладающихъ двойнымъ преломленіемъ.

Въ виду того, что литература вопроса о сжимаемости жидкихъ тѣлъ вообще не отличается обиліемъ матеріяла, а тѣмъ болѣе въ ней нѣтъ достаточныхъ указаній на интересующія

меня масла и коллоиды, я рѣшилъ произвести въ этой области самостоятельныя изслѣдованія, причемъ поставилъ себѣ задачею найти коэффиціенты сжатія тѣхъ жидкостей, которыя упоминаются какъ въ мемуарѣ профессора Kundt'a [1]), такъ и въ моемъ [2]). Моя задача, впрочемъ, была отчасти облегчена работами профессора G. Quincke [3]) и Grassi [4]), у которыхъ я нашелъ нѣсколько необходимыхъ мнѣ чиселъ.

Метода.

§ 44. Метода, на которой я остановился по совѣту профессора Ѳ. Н. Шведова, была въ общихъ чертахъ метода Jamin'a [5]), т. е. такая, въ которой кажущееся сжатіе жидкости сейчасъ-же исправляется на расширеніе піезометра показаніями «tube correcteur»—поправочной трубки. Эта метода заслуживаетъ полнаго вниманія и одобренія по своей простотѣ и надежности, такъ какъ она свободна отъ всякаго рода теоретическихъ предположеній объ измѣняемости емкости піезометра. Мнѣ достаточно будетъ указать на примѣръ, цитируемый самимъ Jamin'омъ [6]) и касающійся опредѣленія коэффиціента сжимаемости k ртути.

		k
Безъ поправки кажущееся сжатіе		0,00000173
Съ поправкою	по Colladon et Sturm'у	0,00000503
	по Poisson'у	0,00000333
	по Wertheim'у	0,00000283
	по Jamin'у	0,00000187

Изъ приведеннаго ряда видно, насколько числа съ теоретическою поправкою превышаютъ дѣйствительную сжимаемость

[1]) A. Kundt. loc. cit., p. 122—128.
[2]) G. de Metz. loc. cit., p. 499.
[3]) G. Quincke. Wied. Ann., Bd. 19, 1883, p. 401—411.
[4]) Grassi. Ann. de Ch. et de Phys. (3) t. 31, 1851, p. 477.
[5]) Jamin et Bouty, Cours de Physique. Paris, 1882, t. I, fasc. II, p. 132—133 и Comptes Rendus de l'Académie des sciences, t. 66, 1868, p. 1104.
[6]) Jamin et Bouty. loc. cit., p. 127 и p. 133.

ртути, если истинною величиною послѣдней считать число Jamin'а, и насколько они различны между собою. Всѣ опредѣленія коэффиціентовъ сжимаемости до методы, предложенной Jamin'омъ, основывались на идеяхъ Poisson'а и исчисленіяхъ Lamé, но и послѣ методы Jamin'а профессора Quincke [1]) и Röntgen & Schneider [2]) не покинули ихъ, принявъ за величину поправки на уменьшеніе единицы объема стеклянаго сосуда при давленіи въ одну атмосферу

$$+0.00000292.$$

Насколько, однако, эта величина измѣнчива отъ одного сорта стекла къ другому и не строго опредѣлена, видно изъ чиселъ приводимыхъ въ статьѣ профессора Quincke [3]). Именно, вмѣсто постоянной теоретической поправки

$$0.00000292$$

иногда нужно было придавать:

$$0.00000246$$
$$0.00000467$$
$$0.00000337$$

чтобы перейти отъ наблюдаемаго кажущагося сжатія воды къ истинному, принимая за таковое числа Grassi [4]).

Всего сказаннаго достаточно, чтобы оправдать выборъ методы Jamin'а, гдѣ все предоставлено опыту и ничего—предвзятымъ теоретическимъ идеямъ.

§ 45. Переходя къ описанію приборовъ, съ которыми мнѣ пришлось работать въ Физической лабораторіи Императорскаго Новороссійскаго университета, я замѣчу предварительно, что механизмъ сжимаемости жидкостей требуетъ трехъ существенно разныхъ составныхъ частей: А. Насоса, производящаго же-

[1]) Quincke. Wied. Ann., Bd 19, 1883, p. 403.
[2]) Röntgen und Schneider. Wied. Ann., Bd. 29, 1886, p. 198—189.
[3]) Quincke. loc. cit., p. 404—405 и p. 408—409.
[4]) Grassi, loc. cit., p. 448—452 и 477.

лаемое давленіе въ піезометрѣ; В. Піезометра, въ которомъ сжимается жидкость и С. Манометра, указывающаго на степень давленія въ піезометрѣ. Опишу теперь по порядку всѣ эти части.

А. *Насосъ.*

Во все время изслѣдованія я пользовался прекраснымъ насосомъ Cailletet, отъ описанія котораго я себя освобождаю, такъ какъ оно дано въ учебникахъ [1]). Онъ выстроенъ въ мастерскихъ E. Ducretet et C-ie à Paris и совершенно схожъ съ описываемымъ у Jamin'а; имъ можно производить легко и скоро огромныя давленія, которыя онъ прекрасно удерживаетъ въ теченіи большаго времени. Подобное свойство представляется весьма цѣннымъ качествомъ, такъ какъ оно даетъ возможность экспериментировать не торопясь и при установившемся давленіи. Мои опыты были сдѣланы при давленіи въ 10 атмосферъ.

В. *Піезометръ.*

§ 46. Я придалъ піезометру нѣсколько иную форму, чѣмъ обыкновенно, и это измѣненіе состояло въ капиллярномъ придаткѣ *bc* (фиг. 6) внизу піезометра *ab*. Подобный придатокъ имѣлъ большое практическое значеніе при опростаніи сосуда, его промывкѣ и сушкѣ, тогда какъ пользованіе обыкновенными піезометрами при изученіи сжимаемости вязкихъ жидкостей крайне затруднительно. Послѣ каждаго опыта, когда одна жидкость замѣнялась другою, я отрѣзывалъ самую незначительную часть оконечности *c*, вслѣдствіе чего сосудъ становился открытымъ въ точкахъ *c* и *d*, и его можно было удобно и легко опростать и наполнять. Этотъ пріемъ не осложняется излишними опредѣленіями емкости сосуда *V*; достаточно знать точное ея значеніе въ началѣ ряда опытовъ, потому что урѣзываніе оконечности *c* не превышаетъ измѣненія объема даже на 2 кубическихъ миллиметра, каковая поправка все таки принималась въ разсчетъ.

[1]) Jamin et Bouty, Cours de Physique. t. I., facs. I., 1882. p. 129.

Но даже если-бы ее и не принять, то на общую емкость въ 48000 и 50000 m. m. cub. она составила-бы ничтожнѣйшую ошибку; чтобы по возможности уменьшить ошибки и продлить время пользованія однимъ и тѣмъ-же нижнимъ капилляромъ, я не срѣзывалъ кончикъ *c* ножомъ, а отшлифовывалъ его на камнѣ. Во все время опытовъ я пользовался двумя піезометрами *A* и *B*, изготовленными изъ одной трубы, коихъ емкость *V* была

$$V_A=50622 \text{ m. m. cub. при } 16^\circ C.$$

$$V_B=48272 \text{ m. m. cub. при } 16^\circ C.$$

§ 47. Только что описанный сосудъ вмастиковывался разъ навсегда на хорошемъ сургучѣ въ латунную трубку въ формѣ буквы *T*, какъ это всегда дѣлается въ опытахъ при сжимаемости газовъ [1])

На эту трубку *aa* была надѣта другая *bb*, которая скользила по шпунту первой и которая сверху отдѣльно заливалась сургучемъ съ предосторожностью, чтобы слой сургуча въ трубкѣ *bb* не сообщался съ слоемъ трубки *aa*. Пространство незалитое сургучемъ посредствомъ отверстія *o* въ стѣнкѣ трубки *bb* сообщалось съ наружнымъ воздухомъ. Это нѣсколько сложное устройство необходимо для того, чтобы быть увѣреннымъ въ правильности показаній поправочной трубки C^1 (фиг. 7-я). Свободный конецъ трубки *bb* имѣлъ винтовую нарѣзку, по которой ходила большая гайка съ приспособленіями для вмастикованія стеклянаго колпака и передачи внутрь его давленія изъ насоса. Когда весь приборъ свинченъ и установленъ, то изъ насоса поступаетъ черезъ отверстіе *f* вода въ колпакъ, сжимаетъ въ немъ воздухъ и понижаетъ уровень въ капиллярѣ *C*. Стекляный колпакъ выбирался такой длины, чтобы при 10 атмосферахъ давленія вода насоса никоимъ образомъ не

---

[1]) Jamin et Bouty. loc. cit, t. I, fasc. I, p. 129; см. на fig 64-й стальной цилиндръ, въ которомъ помѣщается трубка съ угольною кислотою или инымъ газомъ.

попадала внутрь капилляра *C*. Теперь не трудно объяснить, зачѣмъ трубкѣ *aabb* придана сложная форма. Дѣло въ томъ, что вода въ колпакѣ находится подъ давленіемъ и потому стремится выйти наружу; самое слабое мѣсто можетъ представить именно слой сургуча. Поэтому, если-бы онъ былъ цѣльный отъ края *bb* до *aa* самаго стальнаго цилиндра, то при течи вода изъ подъ колпака могла-бы просочиться въ стальной цилиндръ, увеличить объемъ заполняющей его воды и измѣнить отсчетъ поправочной трубки C^1. А такъ какъ по измѣненію уровня въ трубкѣ C^1 мы судимъ о расширеніи піезометра отъ давленія внутри его, то наши отсчеты были-бы ошибочны. Очевидно, что при описываемомъ устройствѣ просачиваніе не могло повлечь за собой такой ошибки; если-бы слой сургуча *bb* и оказался слабымъ, то вода изъ подъ колпака выливалась-бы прямо черезъ отверстіе *o* наружу, отчего внутри прибора вообще падало-бы давленіе, но что не имѣло-бы ни малѣйшаго значенія на показаніе поправочной трубки.

§ 48. Вся эта часть, т. е. стальной цилиндръ съ піезометромъ, поддерживалась при постоянной температурѣ тѣмъ, что она была погружена въ большое ведро воды. Самое ведро было тщательно обернуто войлокомъ и такимъ образомъ долго сохраняло постоянную температуру.

C. *Манометръ.*

§ 49. Манометръ былъ воздушный, вертикальный, закрытый; онъ представленъ на фиг. 8-ой. Резервуаръ его былъ выточенъ изъ стали и въ миніатюрѣ представлялъ собою стальной цилиндръ для сжатія газовъ при насосѣ Cailletet; стеклянная-же трубка для него была пріобрѣтена отъ Alvergniat à Paris и отличалась большою правильностью калибра, безъ систематическаго уклоненія отъ цилиндрической формы. Она была прокалибрована по методѣ R. Bunsen'a [1]); длина ея $L = 82$ c. m., внѣшній діаметръ $R = 12.5$ m. m., внутренній $r = 6.5$ m. m.. Дѣ-

[1]) R. Bunsen. Gasometrische Methoden. Braunschweig, 1857, p. 31—36.

ленія не были нанесены на самомъ стеклѣ во избѣжаніе его хрупкости; я закрѣпилъ позади его хорошую латунную высеребренную скалу отъ барометра въ дюймахъ, такъ что одно дѣленіе скалы моего манометра есть 0.1 дюйма=2.54 m. m.

Этотъ манометръ былъ выстроенъ въ мастерскихъ Императорскаго Новороссійскаго университета механикомъ I. А. Тимченко, а опредѣленіе его постоянныхъ сдѣлано мною по слѣдующему плану.

§ 50. Опредѣлить постоянныя даннаго воздушнаго манометра—значитъ найти на его скалѣ точки, которыя соотвѣтствовалибы давленію $p=1, 2, 3 \ldots n$ атмосферъ, когда противъ нихъ останавливался ртутный менискъ. Эти точки, однако, далеко не неподвижны; онѣ измѣняются съ температурою воздуха заключеннаго въ манометрической трубкѣ и съ внѣшнимъ барометрическимъ давленіемъ. Можно заранѣе вычислить величину поправокъ на эти два фактора, но гораздо проще руководиться непосредственными опредѣленіями, которыя легко производить, если кромѣ закрытаго въ цѣпь давленій ввести еще открытый манометръ. Я пользовался во все время изслѣдованія хорошимъ сифоннымъ ртутнымъ манометромъ Alvergniat à Paris, раздѣленнымъ на 0.5 m. m. и поднимающимъ давленіе до 1.25 атмосферы. Сифонный манометръ служитъ двоякимъ цѣлямъ.

1°. До запайки вертикальнаго, онъ даетъ возможность знать точную величину давленія h ртутнаго столба въ вертикальномъ манометрѣ противъ любаго дѣленія его скалы x.

2°. Послѣ запайки вертикальнаго, при помощи его легко на скалѣ найти мѣста въ $^1/_4$, $^2/_4$, $^3/_4$, $^4/_4$ и $^5/_4$ атмосферы.

Зная-же на скалѣ вертикальнаго манометра одну изъ попослѣднихъ точекъ и соотвѣтственное ей давленіе ртутнаго столба h въ m. m, уже не трудно по закону Mariotte'а вычислить послѣдующія точки высшихъ давленій.

§ 51. Сравненіе хода сифоннаго манометра съ вертикальнымъ открытымъ выразилось двумя рядами чиселъ, которыя бы-

ли выражены мною графически; взявъ показанія x вертикальнаго за ось абсциссъ въ дюймахъ, а сифоннаго—y за ось ординатъ въ m. m., можно было написать уравненіе этой линіи въ формѣ

$$y=105.5+26.5\,x, \tag{1}$$

такъ что, если x взято по скалѣ въ дюймахъ, то y и равное ему h выражены въ m. m..

Я теперь сдѣлаю вычисленіе послѣдовательныхъ точекъ, зная, что длина запаяннаго вертикальнаго манометра отъ нуля дѣленій скалы до самаго верху

$$L=26.75 \text{ дюймовъ}, \tag{2}$$

и пользуясь закономъ Mariotte'a и ур. (1).

Предположимъ, что сифонный манометръ показывалъ 0.5 атмосферы, когда верхній мениск ртути вертикальнаго остановился противъ дѣленія скалы 2.8. Очевидно, что вслѣдствіе цилиндричности трубы, объемъ будетъ пропорціоналенъ длинѣ, а потому половина остающагося объема будетъ равна

$$\frac{26.75 \text{ д.}-2.80 \text{ д.}}{2}=11.975 \text{ д.}$$

При поднятіи ртути на высоту

$$2.8 \text{ д.}+11.975 \text{ д.}=14.775 \text{ д.},$$

давленіе увеличилось-бы вдвое, т. е. дѣленію скалы 14.775 д. соотвѣтствовало-бы давленіе въ одну атмосферу, если-бы самая ртутная колонна отъ уровня въ стальномъ цилиндрѣ до дѣленія 14.775 д. не имѣла ни вѣса, ни давленія. Но изъ ур. (1) находимъ, что $y=497.2$ m. m., или $h=0.652$ атм. при $x=14.775$. Такимъ образомъ, точкѣ скалы

14.775 д.

соотвѣтствуетъ давленіе въ

1.652 атм.

§ 52. Приведеннаго примѣра вполнѣ достаточно, чтобы указать на способъ опредѣленія естественныхъ точекъ манометра. Передъ серіей опытовъ даннаго дня я опредѣлялъ точку въ 0.5 атмосферы и затѣмъ находилъ при помощи данныхъ ур. (1) и (2) тѣ точки скалы, которыя отвѣчали желаемымъ давленіямъ. При этомъ способѣ я былъ избавленъ отъ разъисканія формы манометрической кривой и отъ приближеннаго по ней вычисленія давленій.

Чтобы дать понятіе о колебаніяхъ постоянныхъ манометра въ зависимости отъ атмосфернаго давленія и температуры, я прилагаю двѣ таблицы. Одна изъ нихъ, табл. IX, составлена для того случая, когда 0.5 атм. = 2.8 д., а другая, табл. X,— когда 0.5 атм. = 3.3 д.

Таблица IX.

p	x	y
0.500	2,800	179,7
1,652	14,775	497,0
4,165	20,762	655,7
9.294	23,756	735,0

Таблица X.

p	x	y
0,500	3,300	192,95
1,661	15,025	503,66
4,187	20,887	659,01
9,340	23,818	736,68

Взятыя мною предѣльныя значенія 2,8 д. и 3.3 д. были крайними колебаніями точки въ 0.5 атм. за все время опытовъ. Изъ приведенныхъ чиселъ видно, что не можетъ быть и рѣчи о фиксированіи постоянныхъ точекъ манометра. Лучше всего это вытекаетъ изъ слѣдующей таблицы XI-ой, въ которой приведены всѣ варіаціи давленія p въ зависимости отъ начальной точки, причемъ вся эта таблица составлена для четвертой

естественной точки, соответственными давленіями которой я только и пользовался.

Таблица XI.

x	p
½ атм.=2.8 д.	9.294
2.9	9.303
3.0	9.312
3.1	9.322
3.2	9.331
3.3	9.340

Данныя этой таблицы показываютъ, однако, что колебанія постоянныхъ сравнительно малы и не превышаютъ 0.5°/₀. Мои измѣренія свободны отъ этой ошибки, такъ какъ я непрерывно пользовался сифоннымъ манометромъ въ теченіи всѣхъ опытовъ.

Манипуляціи.

§ 53. Наполненіе піезометра испытуемою жидкостью всегда производилось въ пустотѣ, при помощи насоса Carré [1]), слѣдующимъ образомъ. На верхній капилляръ піезометра плотно надѣвалась каучуковая пробка, которая закупоривала особую стеклянную трубку *B* (фиг. 9); эта трубка служила пріемникомъ жидкости, и въ ней очень легко было заставить кипѣть всякую жидкость непосредственнымъ подогрѣваніемъ ея на горѣлкѣ Bunsen'а. Чтобы кипѣніе совершалось при низкой температурѣ, верхній конецъ трубки *B* сообщался посредствомъ толстой каучуковой трубы съ насосомъ Carré, и внутри ея и піезометра производилось разрѣженіе воздуха. Послѣдовательными разрѣженіями и сгущеніями воздуха наполненіе піезометра совершалось быстро, и когда въ немъ накоплялось достаточное количество жидкости, самый піезометръ погружался въ кипящую воду, вслѣдствіе чего большинство жидкостей энер-

[1]) Jamin et Bouty, Cours de Physique. t. I, fasc. I, p. 252—254.

гично кипѣло и наполняло сосудъ безъ малѣйшихъ слѣдовъ воздуха. Послѣ этого піезометръ медленно охлаждался до слѣдующаго дня и съ большою предосторожностью помѣщался въ стальной цилиндръ, наполненный дистиллированною водою. Такъ какъ этотъ послѣдній игралъ роль внѣшняго резервуара *BB* съ поправочною трубкою *G* въ опытахъ Jamin'а [1]), то я всегда обращалъ особое вниманіе, чтобы въ немъ не было ни одного пузырька воздуха. Поправочная трубка была оправлена въ боковое отверстіе стальнаго цилиндра.

§ 54. При изслѣдованіи такихъ жидкостей какъ вода, эѳиръ, алькоголь, о сжимаемости судятъ по перемѣщенію уровня въ длинномъ капиллярѣ, пренебрегая потерею жидкости на смачиваніе стѣнъ его. Противъ этого едва-ли можно что-нибудь возразить, такъ какъ ошибка эта должна совершенно исчезать среди другихъ. Но когда рѣчь идетъ о сжимаемости вязкихъ жидкостей, какъ масла и коллоиды, то нужно непремѣнно устранить эту ошибку. Я обыкновенно приливалъ около 50—80 m. m. cub. воды къ воднымъ растворамъ и химически чистаго бензола къ масламъ, чѣмъ приводилъ условія измѣренія сжимаемости маселъ и коллоидовъ къ условіямъ сжимаемости воды и бензола. Подобный пріемъ уже отчасти практиковался проф. Quincke [2]) при опытахъ съ глицериномъ. Röntgen & Schneider [3]) въ своихъ изслѣдованіяхъ густыхъ растворовъ дѣлаютъ общую поправку для всѣхъ изученныхъ ими тѣлъ; они нашли, что на стѣнкахъ капилляра, коего среднее поперечное сѣченіе равно 0.003604 q. c. m. пристаетъ столько раствора, что на протяженіи 1 c. m. жидкая нить укорачивается на 0.012 c. m. Мнѣ кажется, что эта ошибка должна быть въ прямо пропорціональной зависимости отъ коэффиціента внутренняго тренія, а потому чѣмъ вязче жидкость, тѣмъ осмотрительнѣе нужно производить измѣренія.

[1]) Jamin et Bouty. loc. cit., t. I, fasc. II, p. 132

[2]) Quincke. Wied. Ann., Bd. 19, 1883, p. 405.

[3]) Röntgen & Schneider. Wied. Ann., Bd. 29, 1886, p. 182.

§ 55. Наблюденія я производилъ слѣдующимъ образомъ.

1°. Опредѣлялъ на скалѣ манометра точку въ $^1/_2$ атмосферы по сравненію съ сифоннымъ и по этой точкѣ вычислялъ четвертую естественную, какъ показано въ §§ 51 и 52. Соотвѣтствующее ей давленіе колебалось отъ 9.294 атм. до 9.340 атм.

2°. Затѣмъ дѣлалъ одновременные отсчеты одинъ на капиллярѣ піезометра C, другой на поправочной трубкѣ C^1 и третій по термометру Alvergniat, раздѣленному до 0.02°C.

3°. Послѣ этого медленно поднималъ насосомъ давленіе до вычисленной четвертой естественной точки, давалъ время установиться этому давленію и опять одновременно записывалъ показанія трубокъ C и C^1, а также и термометра.

4°. Наконецъ, медленно-же освобождалъ давленіе и, давъ ему вновь установиться, читалъ показанія трубокъ C, C^1 и термометра.

5°. Изъ этихъ данныхъ впослѣдствіи вычислялись коэффиціенты сжимаемости изучаемыхъ тѣлъ k и коэффиціенты расширенія піезометра δ. Назвавъ черезъ V весь объемъ жидкости, наполняющей піезометръ, черезъ C—его измѣненіе, а давленіе—черезъ p, находимъ коэффиціентъ кажущейся сжимаемости

$$\varkappa = \frac{C}{V.p}, \qquad (2)$$

и соотвѣтственно коэффиціентъ расширенія піезометра

$$\delta = \frac{C^1}{V.p}. \qquad (3)$$

Коэффиціентомъ дѣйствительной сжимаемости k называютъ

$$\varkappa - \delta = k. \qquad (4)$$

Показанія C и C^1 даются въ m. m. cub., въ которыхъ выраженъ и весь объемъ V.

6°. Каждый коэффиціентъ k мною опредѣленъ какъ среднее изъ многихъ наблюденій по сказанному плану. При этомъ

я дѣлаю разницу между сжимаемостью при увеличеніи давленія отъ 0 атм. до 10 атм. и расширеніемъ при уменьшеніи давленія отъ 10 атм. до 0 атм. Въ дальнѣйшемъ я буду обозначать первый коэффиціентъ черезъ k_1, а второй—черезъ k_2, соотвѣтственно чему показанія трубки C буду называть C_1 и C_2, а показанія трубки C^1—γ_1 и γ_2. Такимъ образомъ

$$k_1 = \frac{C_1 - \gamma_1}{V.p}, \tag{5}$$

а

$$k_2 = \frac{C_2 - \gamma_2}{V.p}. \tag{6}$$

Впослѣдствіи будетъ видно изъ таблицъ, что не для всѣхъ тѣлъ $k_1 = k_2$.

Результаты.

§ 56. Прежде всего я изучилъ сжимаемость воды, чтобы сравнить свои наблюденія съ наблюденіями Grassi, котораго всѣ цитируютъ. Полученныя числа привожу въ слѣдующей таблицѣ.

Таблица XII. Дистиллированная вода.

$p = 9.327$; $V_A = 48263$; 30/XII, 1888.

	C_1	C_2	t	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	28.55	28.55	12°.58 C.	7.05	7.05
	28.55	28.55	»	7.00	7.05
	28.50	28.50	»	7.00	7.05
	28.55	28 50	»	7.10	7.00
	28.50	28.55	»	7.15	7.10
	28.50	28.50	12.59	7.10	7.10
Среднее	28.52	28.52	12.58	7.07	7.06

$k_1 = 0.000047651$,

$k_2 = 0.000047673$.

Среднее $K = 0.000047662$.

Эта таблица показываетъ:

1°. Что колонны C_1 и C_2, γ_1 и γ_2 между собою хорошо сходятся.

2°. Что постоянная k_1 равна постоянной k_2, вслѣдствіе чего можно взять ихъ среднее $K = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

3°. Сопоставивъ значеніе коэффиціента сжимаемости воды k съ числами другихъ изслѣдователей при $t = 12°.6$ С.,

Имена	k
Regnault [1])	0.00004668
Grassi [2])	0.00004779
Amaury et Descamps [3])	0.00004619
Quincke [4])	0.00004774
Röntgen & Schneider [5])	0.00004782
De-Metz	0.00004766
Среднее	0.00004733

нахожу близкое согласіе между моимъ числомъ и числами другихъ наблюдателей.

§ 57. Послѣ этого я перешелъ къ изученію сжимаемости маселъ и коллоидовъ и подвергъ изслѣдованію слѣдующія тѣла.

Масла.

1) Касторовое.

2) Оливковое.

3) Оливковое съ бензоломъ (пополамъ).

4) Оливковое (одна часть) съ бензоломъ (двѣ части).

---

[1]) Regnault. Mémoires de l'Institut de France. Tome 21, 1847, p. 455. Къ сожалѣнію, здѣсь не указана точно температура.

[2]) Grassi. loc. cit., p. 477.

[3]) Amaury et Descamps. Comptes Rendus de l'Académie des sciences Tome 68, 1869, p. 1564.

[4]) Quincke. loc. cit., p. 411.

[5]) Röntgen & Schneider. Wied. Ann., Bd. 29, 1886, p. 196—199.

5) Оливковое съ жидкимъ параффиномъ.
6) Льняное.
7) Миндальное сладкое.
8) Тресковый жиръ.

---

9) Бензолъ.
10) Параффинъ.

---

11) Глицеринъ.

Коллоиды:

12) Коллодіумъ.
13) Гумми аравійское.
14) Канадскій бальзамъ съ бензоломъ.
15) Желатинирующій клей.
16) Нежелатинирующій клей.

---

17) Жидкое стекло (Natronwasserglas).
18) Метафосфорная кислота въ водѣ.
19) Сахаръ въ водѣ.

---

20) Вода.

§ 58. Теперь я перейду къ детальному разбору отдѣльныхъ тѣлъ и представлю всѣ полученные мною результаты въ рядѣ таблицъ, а не среднихъ чиселъ, дабы можно было лучше и полнѣе судить какъ о механизмѣ сжимаемости жидкостей, такъ и о достоинствахъ и недостаткахъ методы Jamin'а.

§ 59. Олива чистая изъ Италіи; плотность $d=0.9145$ при $t=16^{0}.8$ C. Піезометръ наполненъ при обогрѣваніи масла до 100^{0} и при помощи насоса Carré; не смотря на продолжительное подогрѣваніе, оно кипѣло только въ верхней трубѣ, но не въ піезометрѣ, между тѣмъ какъ въ одномъ изъ предварительныхъ опытовъ $^{26}/_{X}$ 1888 г. оно хорошо кипѣло при томъже расположеніи опыта. Въ капиллярѣ надъ оливою находился столбикъ чистаго бензола.

Таблица XIII. Олива чистая изъ Италіи.

$p=9.294$; $V_B=48266$; $^{11}/_1$, 1889 г.

C_1 (m. m. cub.)	C_2 (m. m. cub.)	t C.	γ_1 (m. m. cub.)	γ_2 (m. m. cub.)
32.50	32.50	14°.82	6.80	6.80
31.95	31.60	14.80	6.60	6.70
31.90	31.60	14.80	6.75	6.95
32.00	31.70	14.79	6.80	6.80
32.10	31.80	14.77	6.65	6.70
Среднее 32.09	31.84	14.80	6.72	6.79

$$k_1=0.000056556,$$
$$k_2=0.000055844.$$
$$\frac{k_1+k_2}{2}=0.000056200.$$

Таблица XIV. Олива чистая изъ Италіи.

$p=9.30$; $V_B=48265$; $^{12}/_1$ 1889 г.

C_1 (m. m. cub.)	C_2 (m. m. cub.)	t C.	γ_1 (m. m. cub.)	γ_2 (m. m. cub.)
32.30	31.90	14.76	6.80	6.80
32.20	32.00	»	6.80	6.80
32.20	32.10	»	6.80	6.80
32.10	32.10	»	6.80	6.80
32.05	31.90	»	6.80	6.80
Среднее 32.17	32.00	14.76	6.80	6.80

$$k_1=0.000056520,$$
$$k_2=0.000056142.$$
$$\frac{k_1+k_2}{2}=0.000056331.$$
$$K=0.000056266.$$

Разсматривая полученныя числа для коэффиціентовъ сжатія оливы, мы видимъ, что процессъ сжатія даетъ большія зна-

ченія k_1, а расширенія—меньшія k_2, а сопоставляя между собою таблицы XIII-ую и XIV-ую, усматриваемъ близкое согласіе коэффиціентовъ сжатія k_1 и расширенія k_2. Если малую разницу значеній k_1 и k_2 приписать измѣненію температуры внутри піезометра, то истинное значеніе сжатія будетъ $\frac{k_1+k_2}{2}=K$.

§ 60. Можно было-бы думать, что приливаніе бензола въ верхнюю часть капилляра піезометра можетъ существенно повліять на опредѣленіе коеффиціентовъ k_1, k_2 и K, однако, этого не наблюдается. Изъ опытовъ Amagat [1]), Quincke [2]) и моихъ для коэффиціента сжатія бензола получается гораздо большее число, чѣмъ для оливы и многихъ другихъ маселъ; стало быть, отъ этой прибавки можно было ожидать увеличенія сжимаемости, а между тѣмъ его не только не видно, но напротивъ того, числа значительно падаютъ. Это, конечно, вполнѣ понятно, потому что на стѣнкахъ капилляра остается большее количество вязкой жидкости и гораздо меньшее—жидкости съ слабою вязкостью. На роль вязкости въ опредѣленіи коэффиціента сжатія еще раньше обратили вниманіе Quincke и Röntgen [3]), но Quincke воспользовался этою мыслью лишь при опредѣленіи коэффиціента сжатія глицирина (его вязкость въ 300 разъ больше вязкости воды по Schöttner'у), а Röntgen изъ опыта пришелъ къ заключенію, что ошибка на вязкость есть 1.2% со знакомъ +, слѣдовательно, получаемыя числа для C_1 и γ_2 нужно уменьшать на 1.2%. Я полагаю, что поправка Röntgen'а годна лишь для мало вязкихъ растворовъ, потому что мною были непосредственно получены другіе результаты для той-же оливы безъ колонны бензола.

---

[1]) Amagat. Ann. de Chim. et de Phys., (5) t. 11, 1877, p. 535.
[2]) Quincke. loc. cit., p. 409.
[3]) Röntgen und Schneider. loc. cit., p. 182.

Таблица XV. Олива.

$p=9.30$; $V_A=50523$; $^{27}/_{XI}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
35.09	34.04	15.50	6.885	6.885

$$k_1=0.00006004,$$
$$k_2=0.00005780,$$
$$\frac{k_1+k_2}{2}=0.00005892.$$
$$\text{Quincke}=0.00005990.$$

Изъ сравненія коэффиціентовъ таблицъ XIII и XIV съ коэффиціентами табл. XV усматриваемъ между ними разницу въ 4.5%, и она очевидно обусловливается лишь различнымъ способомъ измѣреній, такъ какъ сравненіе среднихъ значеній таблицъ XIII и XIV даетъ

$$K=0.000056200,$$
а
$$K=0.000056331,$$
т. е. разность всего въ 0.24%.

§ 61. Теперь интересно сравнить насколько полученныя мною числа отличаются отъ чиселъ Quincke, при чемъ намъ нужно пользоваться лишь коэффиціентами k_1, такъ какъ числа Quincke получены именно при возрастаніи давленія подъ колоколомъ воздушнаго насоса. Изъ таблицъ XIII-ой и XIV-ой среднее значеніе

	1) $k_1=0.00005654$ при $t=14^0.78$ C.
изъ таблицы XV-ой	2) $k_1=0.00006004$ » $t=15^0.50$ »
или	3) $k_1=0.00005951$ » $t=14^0.78$ »
а по Quincke	4) $k_1=0.00005939$ » $t=14^0.78$ »

Эти числа ясно указываютъ на согласіе между моими опытами и Quincke, когда мы оперируемъ при однихъ и тѣхъ-же условіяхъ; въ самомъ дѣлѣ, числа 3-ей и 4-ой строкъ отличаются на 0.2%. Но зато 1-ая строка съ 4-ой даетъ

разницу въ 4.8°/₀, которая не носитъ въ себѣ ничего удивительнаго послѣ замѣчаній § 60.

Такимъ образомъ, не смотря на разное происхожденіе оливковаго масла, на различіе методовъ Quincke и моего, на различіе въ предѣлахъ давленія (Quincke пользовался давленіемъ около $^1/_2$ атмосферы и меньше, а у меня 9.3 атмосферы), наши результаты вполнѣ сравнимы.

§ 62. Изучивъ сжатіе чистой оливы, я перешелъ къ сжатіямъ смѣсей: a) оливы съ бензоломъ и b) оливы съ параффиномъ.

Таблица XVI. 1 часть оливы съ 1 частью бензола.

$p=9.328$; $V_B=48261$; $^{16}/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
37.00	36.60	14.83	7.20	7.00
36.40	35.60	14.83	7.05	7.05
36.40	35.95	14.82	7.10	7.05
36.50	35.80	14.76	7.00	7.00
36.60	35.60	14.76	7.00	7.05
Среднее 36.58	35.91	14.80	7.07	7.03

$k_1=0.000065552$,

$k_2=0.000064152$.

Таблица XVII. 1 часть оливы съ 1 частью бензола.

$p=9.328$; $V_B=48257$; $^{16}/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
36.20	36.10	14.76	7.00	7.05
36.15	35.90	14.76	7.00	7.05
36.10	36.10	14.73	7.00	7.00
36.05	35.75	14.73	7.00	7.00
36.10	35.80	14.73	7.00	6.95
36.55	36.30	14.72	7.05	7.10
Среднее 36.19	35.99	14.74	7.01	7.02

$k_1=0.000064824$,

$k_2=0.000064357$.

Смѣсь оливы и бензола была приготовлена изъ оливы § 59 и бензола § 64; при наполненіи она хорошо прокипѣла въ піезометрѣ. Среднее значеніе коэффиціента сжатія изъ таблицъ XVI и XVII есть

$$K = 0.000064496.$$

§ 63. Смѣси той-же оливы съ 5.5% и 6.9% жидкаго параффина. Коэффиціенты ихъ сжимаемости были опредѣлены въ разное время въ три пріема по причинамъ, о которыхъ будетъ сказано ниже. При наполненіи эти смѣси кипѣли слабо; поверхъ смѣси находилась колонна бензола; $d = 0.908$ при 18°.3 C.

Таблица XVIII. Смѣсь 5.5% параффина съ оливою.

$p = 9.312$; $V_B = 48262$; 14/I 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
31.70	31.20	14.80	7.20	7.15
31.70	31.55	14.80	7.20	7.15
31.90	31.40	14.78	7.25	7.00
31.70	31.60	14.78	7.20	7.30
31 90	31.80	14.77	7.20	--
Среднее 31.78	31.51	14.78	7.21	7.15

$k_1 = 0.000054671,$
$k_2 = 0.000054204.$

Таблица XIX. Олива съ 5.5% параффина.

$p = 9.312$; $V_B = 48262$; 14/I 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
31.80	31.30	14.72	7.15	7.15
31.80	31.50	14.73	7.15	7.15
31.70	31.40	14.74	7.10	7.20
31.80	31.40	14.73	7.05	7.10
31.75	31.50	14.72	7.05	7.15
32 00	31.65	14.70	7.15	7.20
Среднее 31.81	31.46	14.72	7.11	7.16

$k_1 = 0.000054960,$
$k_2 = 0.000054070.$

Таблица XX. Олива съ 6.9% параффина.

$p=9.298$; $V_B=48241$; $^{26 \text{ и } 27}/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
31.60	31.80	14.95	7.00	7.00
31.60	31.20	14.90	7.15	7.00
31.35	31.50	14.90	7.10	6.95
31.70	31.60	14.88	7.10	7.00
31.75	31.85	14.90	7.05	7.00
31.65	31.60	14.91	7.00	6.95

Среднее 31.61 31.59 14.91 7.07 6.98

$k_1=0.000054710,$

$k_2=0.000054866.$

$K_{5.5\%}=0.000054476$ при 14°.75 C.

$K_{6.9\%}=0.000054788$ » 14°.91 C.

§ 64. Чтобы обсудить полученные здѣсь результаты, необходимо теперь остановить вниманіе на сжимаемости бензола и параффина. Начнемъ съ бензола. Изученный мною бензолъ былъ полученъ мною изъ химической лабораторіи Императорскаго Новороссійскаго университета, гдѣ онъ помѣченъ «Benzol krystallisirbar, Chemische Fabrik von Trommsdorff in Erfurt»; онъ былъ безцвѣтный и не дурнаго запаха; $d=0.8816$ при 18°.2 C. Подъ насосомъ Carré прекрасно кипѣлъ. Онъ представляетъ большой интересъ при изслѣдованіи по своему непостоянству и чувствительности къ способу сжатія или расширенія. Какъ сейчасъ будетъ видно изъ таблицъ, оказывается, что его коэффиціенты могутъ принимать довольно разнообразныя значенія, смотря по тому—будетъ-ли давленіе поднято быстро или медленно, будетъ-ли оно спущено быстро или медленно.

Таблица XXI. Бензолъ.

$p=9.328$; $V_A=50609$; $^{22}/_{XII}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
44.2	44.0	14.78	7.90	7.90
44.4	42.8	14.78	8.00	8.00
43.8	42.5	14.77	7.80	7.80
43.2	41.4	14.76	7.80	7.80
43.0	41.8	14.75	7.75	7.75

Среднее 43.72 42.50 14.77 7.85 7.85

$k_1=0.000075983$,
$k_2=0.000073398$.

Таблица XXII. Бензолъ.

$p=9.328$; $V_A=50609$; $^{22}/_{XII}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
41.30	40.00	14.74	7.75	7.75
40.40	40.00	14 74	7.70	7.70
41.35	40.80	14.73	7.65	7.65
41.10	40.50	14.72	7.55	7.75
41.40	40 60	14.71	7.70	7.70
41.30	40.60	14.70	7.65	7.70

Среднее 41.14 40.42 14.72 7.67 7.71

$k_1=0.000070899$,
$k_2=0.000069310$.

Таблица XXIII. Бензолъ.

$p=9.322$; $V_A=50609$; $^{22}/_{XII}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
41.50	39.50	14.70	—	—
41.00	40.30	14.70	7.80	7.80
41.30	39.50	14.69	7.75	7.85
41.20	40.00	14.68	7.75	7.75
41.00	39.80	14.67	7.75	7.70
40.90	39.80	14.67	7.80	7.80

Среднее 41.15 39.81 14.69 7.77 7.78

$k_1=0.000070753$,
$k_2=0.000067893$.

Приведенные въ этихъ трехъ таблицахъ коэффиціенты имѣютъ совершенно разныя значенія; въ таблицѣ XXI-ой даны числа по обыкновенному способу установившагося состоянія давленія; въ таблицѣ XXII-ой при быстромъ увеличеніи давленія и средней скорости ослабленія его; въ таблицѣ XXIII-ей—при быстромъ увеличеніи и мгновенномъ ослабленіи Истиннымъ коэффиціентомъ я считаю

$$K=0.000074690,$$

т. е. среднее значеніе k_1 и k_2 таблицы XXI-ой.

Интересно сравнить полученныя мною числа съ числами Amagat [1]) и Quincke [2]):

$$\text{Quincke } k_1=0.00006252,$$
$$\text{Amagat } k_1=0.00007362.$$

Причемъ относительно числа Amagat должно замѣтить, что въ немъ мною сдѣлана поправка на расширеніе сосуда на основаніи моихъ опытовъ (табл. XXI-ая), такъ какъ Amagat самъ этихъ поправокъ не вноситъ. Его число есть кажущееся сжатіе 0.000090 при 16° C. и при $p=37.2$ атм. Изъ сравненія приведенныхъ чиселъ легко усмотрѣть, что коэффиціенты сжатія бензола значительно разнятся между собою; причина этого разногласія лежитъ, вѣроятно, въ различіи употребленныхъ методовъ, давленій и главнымъ образомъ различнаго химическаго состава вещества. Уже у Quincke находимъ, что коэффиціентъ сжимаемости бензола изъ бензойной кислоты

$$k=0.00006610 \text{ при } 16^\circ.78 \text{ C.}$$

§ 65. Посмотримъ теперь, какому закону сжимаемости подчиняются смѣси двухъ жидкостей. Въ § 62 мы нашли, что одна часть оливы съ одною частью бензола имѣетъ

$$K=0.00006450,$$

[1]) Amagat. loc. cit., p. 535.
[2]) Quincke. loc. cit., p. 410.

а если вычислить изъ табл. XIII-ой, XIV-ой и XXI-ой, то

$$K=0.00006548,$$

т. е. они отличаются между собою всего на 1.5%. Отсюда приходимъ къ заключенію, что *при смѣшеніи двухъ жидкостей результирующая сжимаемость пропорціональна сжимаемости составныхъ частей*. Этотъ выводъ я провѣрилъ еще съ другою смѣсью, состоявшей изъ одной части масла и двухъ частей бензола; полученное опытное число вполнѣ согласовалось съ вычисленнымъ.

§ 66. Прозрачный и безцвѣтный жидкій параффинъ кипѣлъ слабо подъ насосомъ Carré; $d=0.8602$ при $t=17°$C.; сверху былъ прилитъ бензолъ.

Таблица XXIV. Жидкій параффинъ.

$p=9.322$; $V=48255$; 17/1 1889 г.

	C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	35.75	35.50	14.66	7.20	7.30
	36.00	35.75	14.80	7.40	7.30
	36.10	35.70	14.79	7.35	7.30
	36.00	35.80	14.78	7.15	7.25
	36.20	?	14.78	7.10	?
	36.30	?	14.78	7.20	?
Среднее	36.06	35.69	14.76	7.23	7.29

$$k_1=0.000064090,$$
$$k_2=0.000063134.$$

Таблица XXV. Жидкій параффинъ.

$p=9.300$; $V=48255$; 19/1 1889 г.

	C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	35.00	34.60	14.94	7.10	7.10
	35.20	34.60	14.94	7.05	7.10
	35.00	34.90	14.92	7.05	7.10
	34.90	34.65	14.92	7.15	7.20
	34.90	34.45	14.92	7.10	7.20
	35.20	34.70	14.90	7.15	7.20
Среднее	35.03	34.65	14.92	7.10	7.15

$$k_1=0.000062237,$$
$$k_2=0.000061278,$$
$$K=0.000062685 \text{ при } t=14^0.84 \text{ C.}$$

§ 67. Интересно теперь сопоставить опытныя числа сжимаемости смѣси оливы съ параффиномъ съ вычисленными на основаніи закона пропорціональности. Мы видѣли, что въ § 63

5.5%	6.9%
$K=0.000054476$	$K=0.000054788$,

а вычисленные коэффиціенты на основаніи §§ 59 и 66

$K=0.000056619$ $K=0.000056709$,

что даетъ разницу въ 3.4%—3.8% и притомъ въ обратную сторону противъ вывода § 65.

§ 68. Этотъ результатъ мнѣ казался сомнительнымъ, вотъ почему я повторилъ дважды опыты со смѣсями оливы и параффина, но, какъ видно изъ § 63, результатъ остался тотъже, а потому приходимъ къ заключенію, что *по даннымъ сжатіямъ составныхъ частей не всегда можно опредѣлить характеръ сжатія результирующей смѣси.*

§ 69. Рицинное масло кипѣло хорошо подъ насосомъ Carré; $d=0.9629$ при $t=18^0.6$ C.; оно было взято изъ склада

Таблица XXVI. Рицинное масло.

$p=9.326$; $V=50618$; 16/XII 1888 г.

	C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	30.00	29.60	14.87	7.65	7.50
	29.80	29.75	—	7.70	7.60
	29.90	29.50	—	7.70	7.60
	30.40	29.60	—	7.70	7.60
	29.90	29.60	—	7.60	7.60
	29.70	29.60	—	7.50	7.50
	29.90	29.50	14.86	7.60	7.60
Среднее	29.94	29.59	14.87	7.63	7.57

$$k_1=0.000047261,$$
$$k_2=0.000046646.$$

Таблица XXVII. Рицинное масло.

$p=9.326$; $V=50618$; $^{17}/_{\text{XII}}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
30.20	30.10	15.01	—	7.65
30.30	30.30	—	7.75	7.60
30.10	29.90	—	7.70	7.60
30.10	29.80	—	7.60	7.60
30.05	29.80	—	7.60	7.50
30.30	30.00	15.02	7.70	7.60
30.20	29.90	—	7.70	7.70
30.10	30.10	—	7.75	7.75
Среднее 30.17	29.99	15.01	7.68	7.62

$$k_1=0.000047642,$$
$$k_2=0.000047388,$$
$$K=0.000047234 \text{ при } t=14^{\circ}.94 \text{ C.}$$

Штулькерца года два назадъ и лежало все время въ лабораторіи; это самое масло изслѣдовалъ проф. Шведовъ при изученіи внутренняго его тренія. Сверху былъ прилитъ бензолъ для точности опытовъ, ибо безъ него совершенно нѣтъ возможности изучать сжатіе рициннаго масла; вслѣдствіе его огромной вязкости, оно цѣликомъ остается на стѣнкахъ капилляра, а воздухъ лишь тонкою, неправильною струею врывается внутрь. Одинъ рядъ измѣреній, произведенныхъ въ такихъ условіяхъ, далъ коэффиціентъ сжимаемости

$$k=0.000058001,$$

т. е. на 18.5% больше приведеннаго.

§ 70. Свѣтлый и прозрачный тресковый жиръ при наполненіи подъ насосомъ не кипѣлъ; $d=0.925$ при $t=18^{\circ}.3$ C. Сверху прилита колонна бензола.

Таблица XXVIII. Тресковый жиръ.

$p=9.293$; $V=48261$; $^{21}/_{1}$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cud.			m. m. cub.	
31.00	31.25	14.85	7.30	7.30
31.20	30.95	14.85	7.20	7.15
31.30	30.60	14.84	7.25	7.25
30.80	30.70	14 83	7.20	7.20
31.20	31.00	14.82	7.25	7.25
31.20	30.90	14.82	7.15	7.15
Среднее 31.12	30.90	14.83	7.22	7.22

$k_1=0.000053290$,
$k_2=0.000052799$.

Таблица XXIX. Тресковый жиръ.

$p=9.298$; $V=48261$; $^{23}/_{1}$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
31.35	31.00	14.82	7.00	7.00
31.35	30.90	—	7.00	7.10
31.80	31.30	—	7.15	7.20
31.40	31.00	—	7.10	7.10
31.25	31.10	—	7.15	7.15
31.20	31.10	—	7.15	7.15
Среднее 31.39	31.07	14.82	7.09	7.12

$k_1=0.000054153$,
$k_2=0.000053373$,
$K=0.000053404$ при $t=14^\circ.82$ C.

§ 71. Льняное масло, прозрачное какъ олива, при наполненіи не кипѣло; $d=0.928$ при $t=22^\circ.5$ C. Сверху прилита колонна бензола.

Таблица XXX. Льняное масло.

$p=9.303$; $V=48245$; $^{24}/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
30.60	30.00	14.79	7.15	7.15
30.55	30.00	14.79	7.10	7.15
30.55	30.40	14.78	7.25	7.30
30.70	30.40	14.78	7.15	7.20
30.75	30.25	14.78	7.10	7.10
30.60	30.20	14.78	7.10	7.15
Среднее 30.62	30.21	14.78	7.14	7.17

$k_1=0.000052315$,

$k_2=0.000051334$,

$K=0.000051825$ при $t=14^0.78$ C.

§ 72. Сладкое миндальное масло изъ Италіи при наполненіи не кипѣло; $d=0.914$ при $t=22^0.5$ C. Сверху прилита колонна бензола.

Таблица XXXI. Миндальное сладкое масло изъ Италіи.

$p=9.312$; $V=48244$; $^{25}/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
31.50	31.00	14.76	7.20	7.30
31.30	31.00	—	7.30	7.30
31.30	31.20	14.75	7.25	7.30
31.50	31.00	14.74	7.20	7.20
31.30	31.20	—	7.15	7.15
31.45	31.00	—	7.05	7.10
Среднее 31.39	31.07	14.75	7.19	7.22

$k_1=0.000053868$,

$k_2=0.000053089$,

$K=0.000053473$ при $14^0.75$ C.

Quincke даетъ для миндальнаго масла съ поправкою на емкость сосуда

$$k_1 = 0.000056,$$

а безъ поправки $k_1 = 0.000053$.

§ 73. Очень густой глицеринъ при наполненіи кипѣлъ; $d = 1.2453$ при $t = 16^0.5$ С. Сверху дѣленій на 40 прилито дистиллированной воды.

Таблица XXXII. Глицеринъ.

$p = 9.328$; $V = 50613$; 19/XII 1888 г.

	C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	18.10	18.10	15.00	7.55	7.75
	18.00	18.00	—	7.40	7.70
	18.00	18.00	—	7.40	7.60
	18.00	18.10	—	7.50	7.65
	18.10	18.00	—	7.45	7.50
Среднее	18.04	18.04	15.00	7.46	7.64

$$k_1 = 0.000022410,$$
$$k_2 = 0.000022028.$$

Таблица XXXIII. Глицеринъ.

$p = 9.335$; $V = 50613$; 20/XII 1888 г.

	C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	18.10	17.80	14.99	7.55	7.80
	18.00	17.90	98	7.65	7.80
	18.15	18.00	97	7.50	7.60
	18.05	17.50	—	7.50	7.40
	17.95	18.15	—	7.30	7.70
	18.15	18.15	—	7.60	7.75
Среднее	18.07	17.92	14.98	7.52	7.67

$$k_1 = 0.000022329,$$
$$k_2 = 0.000021694.$$

Таблица XXXIV. Глицеринъ.

$p=9.338$; $V=50613$; $^{20}/_{XII}$ 1888 г.

C_1 (m. m. cub.)	C_2 (m. m. cub.)	t C.	γ_1 (m. m. cub.)	γ_2 (m. m. cub.)
18.40	18.00	14.80	7.60	7.70
18.00	17.80	14.80	7.40	7.50
18.00	17.80	14.79	7.40	7.50
18.05	17.70	14.78	7.40	7.50
18.00	17.80	14.77	7.40	7.40
18.00	?	14.77	7.40	?
Среднее 18.07	17.82	14.78	7.43	7.52

$$k_1=0.000022513,$$
$$k_2=0.000021793.$$

Откуда среднее значеніе

$$K=0.000022128 \text{ при } t=14^{0}92 \text{ C.}$$

Обозрѣніе этихъ чиселъ показываетъ, что глицеринъ по сжимаемости рѣзко отличается отъ органическихъ маселъ, изслѣдованныхъ до сихъ поръ; мы встрѣчаемъ коэффиціентъ сжатія у Quincke [1]).

$$k_1=0.00002514.$$

Эти два числа отличаются между собою на $12^0/_0$, что составляетъ весьма замѣтную разницу; такъ какъ всѣ мои числа ни разу не достигаютъ значеній 0.0000226, то нужно искать точки этой разницы въ слѣдующихъ условіяхъ опытовъ моихъ и Quincke: 1^0 давленіе у Quincke равно 99.4—308.3 m. m., у меня 9.328 — 9.338 атм. Это предположеніе можно подтвердить рядомъ аналогичныхъ чиселъ; такъ напримѣръ, для эѳира при 14^0 C.—Grassi съ одной стороны, а Amaury et Descamps съ другой—даютъ слѣдующія числа:

[1]) Quincke. loc cit., p. 406 и 408.

	t C.	k	p
Amaury et Descamps	14°	0.000128	10 атм.
Grassi.	14°	0.000140	1.6 »

Amagat пришелъ къ общему заключенію, что коэффиціентъ сжимаемости падаетъ съ возрастаніемъ давленія. Вмѣстѣ съ тѣмъ небезъинтересно будетъ указать, что число Quincke безъ поправки вполнѣ согласуется съ моимъ, именно

$$k_1 = 0.00002264.$$

Тоже самое можно замѣтить и о миндальномъ маслѣ, см. § 72. 2°. Вообще всегда можно ожидать бóльшаго несогласія при мало сжимающихся жидкостяхъ; какъ извѣстно, maximum такого разногласія приходится на коэффиціентъ сжимаемости ртути, который по Grassi

$$k = 0.00000295 \text{ при } 0°.C.,$$

а по Jamin, Amaury et Descamps

$$k = 0.00000187 \text{ при } 0°.C.$$

Коллоиды.

§ 75. Студневидная желатина приготовлялась изъ смѣси подогрѣтой до 60°C. воды съ пластинками продажной желатины изъ телячьихъ ножекъ; этотъ растворъ былъ по концентраціи 2% и отфильтрованъ въ очень прозрачную жидкость, $d = 1.0055$ при $t = 18°.2$ C. При комнатной температурѣ онъ обращался въ студень, безъ всякихъ признаковъ жидкаго состоянія. Во все время изслѣдованія, и много дней еще спустя, онъ оставался вполнѣ прозрачнымъ и однороднымъ безъ признаковъ колоній разжижающихъ бактерій. Поверхъ такой желатины въ капиллярѣ стояла колонна дистиллированной воды. Наполненіе піезометра было произведено какъ обыкновенно, т. е. теплою

жидкостью и подъ дѣйствіемъ насоса Carré. Студень былъ приготовленъ 4 января 1889, а изслѣдовался 5 и 7 января. Здѣсь интересно прослѣдить постепенное возрастаніе упругости со временемъ.

Таблица XXXV. Студневидная желатина.

$p=9.329$; $V=48236$; $^5/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
30.80	30.40	12.60	7.20	7.00
30.30	30.00	12.60	7.05	7.05
30.40	30.00	12.61	7.10	7.10
30.00	29.80	—	7.05	7.00
30.00	30.00	—	7.10	7.00
30.00	29.90	12.62	7.15	7,10
Среднее 30.25	30.02	12.61	7.11	7.04

$$k_1=0.000051423,$$
$$k_2=0.000051067.$$

Таблица XXXVI. Студневидная желатина.

$p=9.329$; $V=48235$; $^5/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
29.80	29.60	12.66	7.05	7.00
29.85	29.60	12.66	7.05	7.05
29.50	29.40	12.67	7.10	7.10
29.40	29.20	12.68	7.05	7.10
29.30	29 20	—	7.15	7.15
29.00	29.00	—	7.15	7.10
Среднее 29.47	29.33	12.67	7.09	7.08

$$k_1=0.000049735,$$
$$k_2=0.000049446.$$

Таблица XXXVII. Студневидная желатина.

p=9.334; V=48234: 7/1 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
28.90	28.90	11.66	7.25	7.05
28.90	28.90	—	7.10	7.00
26.90	28.90	—	7.00	7.00
28.90	28.90	67	7.05	7.05
28.90	28.80	67	7.10	7.05
28.85	28.80	68	7.00	7.00
Среднее 28.89	28.87	11.67	7.08	7.02

k_1=0.000048443,

k_2=0.000048532.

Вслѣдствіе непостоянства сжимаемости студенистой желатины нужно остановиться на послѣдней таблицѣ XXXVII-ой, такъ какъ въ ней ряды чиселъ C_1 и C_2 отличаются бóльшимъ постоянствомъ. Поэтому, коэффиціентомъ сжимаемости $2^0/_0$ желатины будемъ считать

K=0.000048488 при 11°.67 C.

Этотъ коэффиціентъ весьма близокъ къ коэффиціенту сжимаемости чистой воды, см. табл. XII; изъ сравненія чиселъ заключаемъ, что объемная упругость студенистой желатины меньше объемной упругости чистой воды, и что она растетъ со временемъ

§ 76. Нестуденистая желатина приготовлялась слѣдующимъ образомъ. Я бросалъ въ кипящую воду разъ въ десять больше желатины, чѣмъ въ предъидущемъ случаѣ, и продолжалъ кипяченіе около часу, затѣмъ фильтровалъ ее въ горячемъ состояніи и къ охлажденной жидкости прибавлялъ немного концентрированной азотной кислоты, послѣ чего эту смѣсь вновь долго кипятилъ. Послѣ вторичнаго фильтрованія я получилъ совершенно прозрачную жидкость, столь-же удобоподвижную, какъ чистая вода; она не обращалась въ студень не

только при комнатной температурѣ, но даже и при значительномъ охлажденіи до 2°C. Предоставленная себѣ самой, эта желатина отличалась большою устойчивостью: она не измѣнялась ни по прозрачности, ни по запаху, ни по вязкости и не обнаруживала никакихъ признаковъ разложенія. Наблюденія, произведенныя съ этою жидкостью, не показали возрастанія упругости со временемъ: коэффиціентъ сжимаемости оставался постояннымъ и по абсолютной величинѣ былъ меньше дистиллированной воды. Плотность $d=1.0529$ при $t=14^{0}.8$ C.

Таблица XXXVIII. Нестуденистая желатина.
$p=9.322$; $V=48270$; ${}^{10}/_{1}$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
26.95	26.95	12.12	7.00	7.00
26.95	27.00	12.15	7.10	7.10
27.00	27.00	12.15	7.10	7.10
26.90	26.95	12.15	7.00	7.00
27.00	27.00	12.16	7.10	7.10
27.00	27.00	12.17	7.10	7.10
Среднее 26.97	26.98	12.15	7.07	7.07

$k_1=0.000044225$,
$k_2=0.000044247$.

Таблица XXXIX. Нестуденистая желатина.
$p=9.317$; $V=48270$; ${}^{10}/_{1}$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
27.05	27.00	12.19	7.05	7.10
27.05	27.00	12.20	7.15	7.00
27.15	27.15	12.21	7.00	7.00
26.95	26.95	12.22	7.00	7.00
27.15	27.15	12.22	7.10	7.10
26.95	26.95	12.23	7.10	7.10
Среднее 27.05	27.03	12.21	7.06	7.05

$k_1 = 0.000044449,$
$k_2 = 0.000044427,$
$K = 0.000044337$ при $t = 12^\circ.18$ C.

§ 77. Канадскій бальзамъ былъ взятъ продажный въ видѣ густой прозрачной массы; я его разбавилъ чистымъ бензоломъ (см. § 64) до такой степени, что онъ по вязкости подходилъ къ оливѣ; растворъ былъ вполнѣ прозрачный и чистый, $d = 0.9500$ при $t = 15^\circ$C.; при наполненіи онъ хорошо кипѣлъ въ піезометрѣ. Сверху былъ прилитъ чистый бензолъ.

Таблица XL. Канадскій бальзамъ.

$p = 9.331$; $V = 50611$; $^{21}/_{\text{XII}}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
35.35	34.30	14.92	7.50	7.80
35.30	34.20	14.92	7.65	7.90
35.50	34.60	14.88	7.70	7.90
35.20	34.50	14.86	7.30	7.85
34.65	34.20	14.86	7.60	7.75
35.00	34.60	14.83	7.75	7.90
Среднее 35.17	34.40	14.88	7.58	7.85

$k_1 = 0.000058422,$
$k_2 = 0.000056220.$

Таблица XLI. Канадскій бальзамъ.

$p = 9.331$; $V = 50611$; $^{21}/_{\text{XII}}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
35.20	34.20	14.96	7.70	7.90
35.30	34.60	14.95	7.75	7.85
35 10	34.40	14.92	7.65	7.80
35.00	34.30	14.93	7.65	7.80
35.10	34.40	14.90	7.60	7 80
35.90	34.10	14.90	7.75	7.85
Среднее 35.10	34.33	14.93	7.68	7.83

$k_1 = 0.000058062,$
$k_2 = 0.000056114,$
$K = 0.000057205$ при $14^{\circ}.90$ С.

Въ послѣднихъ двухъ таблицахъ замѣчаемъ значительную разницу между коэффиціентами k_1 и k_2; ее нужно приписать бензолу, который обладаетъ этимъ свойствомъ въ высокой мѣрѣ, какъ было показано въ § 64. Кромѣ того, сюда-же случайно присоединилась и бо́льшая, сравнительно съ обыкновенной, разница значеній γ_1 и γ_2. Очевидно, если взять $\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$ таблицъ XL-ой и XLI-ой, то эти разности можно уменьшить; мы достигаемъ того-же, взявъ среднее значеніе K всѣхъ четырехъ коэффиціентовъ.

§ 78. Коллодіумъ я получилъ изъ химической лабораторіи Императорскаго Новороссійскаго университета подъ мѣткою «Collodium duplex. Chemische Fabrik von Trommsdorff in Erfurt». На видъ онъ отличался большою прозрачностью и значительною вязкостью. При пополненіи онъ хорошо кипѣлъ въ піезометрѣ; сверху въ капиллярѣ находился чистый сѣрный эѳиръ; $d = 0.8075$ при $t = 15^{\circ}$ С.

Таблица XLII. Коллодіумъ.

$p = 9.318$; $V = 50607$; $^{24}/_{\text{XII}}$ 1888 г.

	C_1	C_2	t С.	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	53.20	52.90	14.90	7.40	7.40
	53.20	52.60	14.88	7.65	7.40
	53.20	52.60	14.87	7.60	7.40
	53.60	52.70	14.86	7.50	7.40
	53.30	52.90	14.85	7.50	7.50
	53.30	52.90	14.84	7.40	7.60
Среднее	53.30	52.76	14.87	7.51	7.45

$k_1 = 0.000097104,$
$k_2 = 0.000096086.$

Таблица XLIII. Коллодіумъ.

$p=9.332$; $V=50607$; $^{24}/_{\text{XII}}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
54.80	53.70	14.83	7.60	7.50
53.90	53.30	14.83	7.65	7.50
54.60	53.80	14.82	7.60	7.50
54.20	53.70	14.81	7.60	7.55
54.00	53.50	14.80	7.60	7.50
54.50	53.80	14.80	7.60	7.60
Среднее 54.33	53.63	14.82	7.61	7.53

$k_1=0.000098928$,
$k_2=0.000097615$,
$K=0.000097433$ при $t=14^{\circ}.85$ C.

§ 79. Гумми аравійское взято въ видѣ чистыхъ, прозразныхъ крупинокъ желтоватаго цвѣта; изъ нихъ приготовленъ густой водный растворъ и разбавленъ водою до желаемой плотности[1]), послѣ чего отфильтрованъ; $d=1.0414$ при $t=14^{\circ}$C. Сверху прилита чистая вода. Піезометръ наполненъ при кипѣніи.

Таблица XLIV. Гумми аравійское.

$p=9.328$; $V=48249$; $^{2}/_{1}$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
27.20	27.20	14.85	7.00	7.00
27.10	27.10	14.86	6.95	7.00
27.05	27.05	14.85	7.00	7.15
27.10	27.00	14.84	7.15	7.20
27.20	27.10	14.83	7.00	7.15
27.20	27.20	14.81	7.00	7.05
Среднее 27.14	27.11	14.84	7.02	7.09

[1]) Kundt. loc. cit., p. 126.

$$k_1=0.000044705,$$
$$k_2=0.000044482,$$
$$K=0.000044593.$$

III. *Соли.*

§ 80. Изъ растворовъ солей я изслѣдовалъ только жидкое стекло (Natronwasserglas) и концентрированные растворы головнаго сахара и метафосфорной кислоты, такъ какъ я нашелъ у Grassi[1]) остальныя изъ интересующихъ меня чиселъ.

§ 81. Метафосфорную кислоту я получилъ изъ химической лабораторіи университета въ формѣ стекловидныхъ палочекъ; изъ нихъ я приготовилъ очень концентрированный водный растворъ, приблизительно въ 120 граммовъ кислоты на 50 c. m. cub. воды. Сверху раствора въ капилляръ была прилита дистиллированная вода; $d=1.5454$ при $t=13^{\circ}.5$ C. При наполненіи жидкость хорошо кипѣла въ піезометрѣ.

Таблица XLV. Метафосфорная кислота.
$p=9.335$; $V=48231$; $^{8}/_{1}$ 1889 г.

	C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
	m. m. cub.			m. m. cub.	
	16.20	15.80	14,58	7.00	7.00
	16.10	15.60	14.56	6.95	7.15
	16.00	15.80	14.55	6.95	7.15
	16.20	15 80	14.54	7.00	7.10
	16.00	15.70	14.50	7.00	7.00
	15.95	15.80	14.50	6.95	7.05
Среднее	16.07	15.75	14.54	6.98	7.07

$$k_1=0.000020190,$$
$$k_2=0.000019279,$$

[1]) Grassi. loc. cit., p. 478.

Таблица XLVI. Метафосфорная кислота.

$p=9.335$; $V=48236$; $^{8}/_{I}$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
16.20	15 90	14.86	7.00	6.95
16.00	15.70	14.84	7.05	7.20
15.90	15.70	14.83	7.00	7.20
16.00	15.80	14.81	7.00	7.20
16.00	15.70	14.79	7.00	7.10
16.10	15.80	14.77	7.05	7.20
Среднее 16.03	15.77	14.82	7.02	7.14

$k_1=0.000020010$,

$k_2=0.000019166$,

$K=0.000019663$ при $14^{\circ}.68$ C.

§ 82. Жидкое стекло (Natronwasserglas) было пріобрѣтено изъ Центральнаго склада Одесскихъ аптекарей; оно было темнаго желтобураго цвѣта; послѣ фильтрованія оно стало вполнѣ прозрачнымъ, хотя и сохранило характерный цвѣтъ испанскихъ винъ. Вязкость его велика; при наполненіи кипѣло; сверху была прилита вода; $d=1.3455$ при $t=14^{\circ}.5$C.

Таблица XLVII. Жидкое стекло.

$p=9.320$; $V=48245$; $^{31}/_{XII}$ 1888 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
18.60	18.40	14.67	7.00	7.00
18.70	18.50	14.67	6.95	7.05
18.45	18.40	14.66	6.95	7.05
18.40	18.20	14.63	6.95	7.00
18.50	18.50	14.64	7.00	7.05
18.50	18.50	14.63	7.00	7.05
18.60	18.55	14.62	7.00	7.10
18.60	18.50	14.62	7.05	7.15
18.65	18.55	14.62	7.10	7.10
Среднее 18.55	18.45	14.64	7.00	7.06

$k_1 = 0.000025687,$
$k_2 = 0.000025331,$
$K = 0.000025509.$

Таблица XLVIII. Жидкое стекло.
$p = 9.325$; $V_в = 48245$; $^2/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
18.60	18.60	12.00	7.20	6.95
18.65	18.65	12.01	7.00	6.95
18.60	18.50	12.02	7.00	6.95
18.65	18.80	12.02	7.00	6.95
18.65	18.70	12.03	7.05	7.10
18.65	18.65	12.04	7.10	7.10
Среднее 18.63	18.65	12.02	7.06	7.00

$k_1 = 0.000025718,$
$k_2 = 0.000025895,$
$K = 0.000025806.$

§ 83. Концентрированный растворъ сахара былъ настолько насыщенъ, что черезъ нѣкоторое время по приготовленіи его образовались кристаллы; при наполненіи онъ хорошо кипѣлъ въ піезометрѣ; сверху была прилита вода. $d = 1.3504$ при $t = 13.5^\circ$C.

Таблица XLIX. Концентрированный растворъ сахара.
$p = 9.331$; $V_в = 48241$; $^4/_1$ 1889 г.

C_1	C_2	t C.	γ_1	γ_2
m. m. cub.			m. m. cub.	
16.40	16.30	14.82	7.00	7.00
16.55	16.30	14.81	7.00	7.00
16.55	16.40	14.80	6.95	7.00
16.35	16.30	14.80	6.95	6.95
16.45	16.25	14.80	7.00	7.00
16.25	16.20	14.80	6.95	6.95
Среднее 16.42	16.29	14.80	6.98	6.98

$k_1 = 0.000020971,$
$k_2 = 0.000020683,$
$K = 0.000020827.$

§ 84. Раньше чѣмъ собрать разрозненныя числа приведенныхъ таблицъ въ одну, интересно остановиться на оцѣнкѣ методы Jamin'а и полученныхъ мною чиселъ; исходною точкою ея могутъ служить отсчеты C_1 и C_2, γ_1 и γ_2, которыми обусловливается какъ кажущаяся, такъ и дѣйствительная сжимаемость жидкаго тѣла.

Прежде всего мы обратимъ вниманіе на показанія γ_1 и γ_2 поправочной трубки, которыя вычитаются изъ показаній C_1 и C_2 капилляра піезометра. Отобравъ 12 среднихъ значеній γ_1 и γ_2, характеризующихъ измѣняемость емкости піезометра A, и 25 подобныхъ-же значеній γ_1 и γ_2, характеризующихъ измѣняемость піезометра B, я нахожу, что эти величины колеблются около нѣкоторой постоянной, предѣльныя значенія которой достигаютъ 5% и 7%, какъ показано въ прилагаемой таблицѣ.

Таблица L.

	піезометръ A	%	піезометръ B	%
γ_1	7.613	5.3	7.059	7.0
γ_2	7.668	5.0	7.076	6.0
Среднее	7.640		7.068	

Если къ полученнымъ числамъ присоединить среднія значенія объемовъ V_A и V_B и давленій p, то легко получить абсолютное значеніе постоянной δ, характеризующей измѣняемость емкости піезометра. При этомъ соотвѣтственно уже введеннымъ обозначеніямъ k_1 и k_2 назовемъ черезъ δ_1 коэффиціентъ расширяемости піезометра, а черезъ δ_2—коэффиціентъ его сжимаемости. Такимъ образомъ находимъ:

Таблица LI.

	піезометръ A	піезометръ B
δ_1	0.000016126	0.000015709
δ_2	0.000016243	0.000015746
Среднее	0.000016184	0.000015728

Послѣдняя таблица показываетъ:

1) Что во всѣхъ случаяхъ можно считать $\delta_1 = \delta_2$ для одного и того-же піезометра.

2°. Что среднее значеніе коэффиціента измѣняемости емкости δ піезометра A отлично отъ соотвѣтственнаго коэффиціента піезометра B на 2.2%, хотя они изготовлены изъ одного и того-же стекла.

3°. Что абсолютное значеніе δ по своей величинѣ такого-же порядка, какъ и опредѣляемый коэффиціентъ сжимаемости жидкости, вслѣдствіе чего ошибки при опредѣленіи коэффиціента δ не могутъ не отзываться на коэффиціентѣ k. Легко вычислить, каково будетъ вліяніе предѣльныхъ ошибокъ, представленныхъ въ % въ таблицѣ L-ой, въ случаѣ опредѣленія коэффиціента сильно и слабо сжимающихся жидкостей. Сдѣлавъ подобный расчетъ относительно коллодіума (см. § 78-ой) и метафосфорной кислоты (см. § 81-ый), я нашелъ для двухъ предѣльныхъ значеній γ_1, γ_2 и одного и того-же значенія C, т. е. для двухъ наиболѣе неблагопріятныхъ случаевъ, слѣдующія ошибки.

	Коллодіумъ	Метафосф. кислота
Возможная ошибка.	1.0%	2%—3.7%
Дѣйствительная ошибка..	0.3%	1.0%

Приведенныя числа вполнѣ оправдываютъ выборъ методы. Стоитъ только сдѣлать подобное расчисленіе для опытовъ Quincke [1]) съ алкоголемъ и глицериномъ, полагая одинаково возможными всѣ четыре поправки, указанныя на стр. 44-ой, чтобы судить о недостаткахъ его методы. Его ошибки колеблются.

Алкоголь.....	0.13%	—	1.8%
Глицеринъ.....	1.7	—	6.4

§ 85. Что касается оцѣнки ошибокъ при опредѣленіи величинъ C_1 и C_2, то можно сказать лишь одно, что все зависитъ отъ природы жидкости. Вода, напримѣръ, даетъ прекрасные и сходные ряды, а бензолъ ихъ не даетъ, не смотря на то, что надъ ними производятся однѣ и тѣ-же операціи; слѣдовательно, вообще характеръ этихъ ошибокъ болѣе систематическій, чѣмъ случайный, хотя въ рядахъ C_1 и C_2 различныхъ жидкостей не трудно иногда усмотрѣть колебанія до 2% и даже до 3%. Интересно еще обратить вниманіе на одну особенность колоннъ C_1 и C_2, а именно, что онѣ сходятся въ исключительныхъ случаяхъ, вообще-же $C_1 > C_2$, и въ рѣдкихъ случаяхъ бываетъ обратное.

§ 86. Теперь остается только свести всѣ полученныя числа въ общую таблицу, которая и послужитъ исходною точкою дальнѣйшихъ заключеній о свойствахъ двойнаго преломленія во вращающихся жидкостяхъ. Причемъ приводимые коэффиціенты сжатія будутъ соотвѣтствовать тѣмъ, которые мы обозначали черезъ $K = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Всѣ упоминаемыя мною плотности d опредѣлены помощью вѣсовъ Mohr'a и отнесены къ водѣ при 15° С.

[1]) Quincke. loc. cit., p. 408—409.

Таблица LII. Коэффиціенты сжимаемости.

	№	Названіе вещества.	K	t^0 C.
I. Группа маселъ.	1	Рицинное масло	0.000047234	14.94
	2	Льняное масло	0.000051825	14.78
	3	Тресковый жиръ	0.000053404	14.82
	4	Миндальное масло	0.000053473	14.75
	5	Олива съ 5.5% параффина	0.000054476	14.75
	6	Олива съ 6.9 параффина	0.000054788	14.91
	7	Олива	0.000056266	14.78
	8	Олива (1 ч.) съ бензоломъ (1)	0.000064496	14.77
II. Группа коллоидовъ	9	Желатина нестуденистая	0.000044337	12.18
	10	Гумми аравійское	0.000044593	14.84
	11	Желатина студенистая	0.000048488	11.67
	12	Канадскій бальзамъ	0.000057205	14.90
	13	Коллодіумъ	0.000097433	14.85
III. Группа безъ дв. преломл.	14	Параффинъ жидкій	0.000062685	14.84
	15	Бензолъ	0.000074690	14.77
	16	Вода	0.000047662	12.60
	17	Глицеринъ	0.000022128	14.92
	18	Метафосфорная кислота	0.000019663	14.68
	19	Растворъ сахара	0.000020827	14.80
	20	Жидкое стекло	0.000025509	14.64
	21	Стекло, піезометръ A	0.000016184	14.75
	22	Стекло, піезометръ B	0.000015728	14.57

Приведенные коэффиціенты до № 13 включительно принадлежатъ жидкостямъ, обладающимъ двойнымъ преломленіемъ Kundt'a, а отъ № 14 до конца слѣдуютъ жидкости безъ двойнаго преломленія Kundt'a. Изъ сопоставленія чиселъ усматриваемъ слѣдующіе предѣлы колебаній коэффиціентовъ сжимаемости.

I. Въ группѣ маселъ отъ 0.000047234 до 0.000064496

II. Въ группѣ коллоидовъ » 0.000044337 » 0.000097433
III. Въ гр. безъ пр. Kundt'а 0.000019663 » 0.000134000 [1])

Заключеніе.

Все вышеизложенное можно резюмировать слѣдующимъ образомъ.

1°. Метода, предложенная Jamin'омъ съ опытною поправкою на емкость піезометра, даетъ болѣе строгіе и точные результаты, чѣмъ всякая иная метода съ теоретическою поправкою. Вѣроятныя ошибки не превышаютъ 1%—2%.

2°. Слѣдуетъ отличать коэффиціенты сжимаемости жидкости при возрастаніи давленія k_1 отъ коэффиціентовъ расширенія ея при убываніи давленія k_2. Для большинства жидкостей $k_1 > k_2$. Эту разницу я отчасти приписываю возможному измѣненію температуръ. Опыты, произведенные мною съ миндальнымъ масломъ, жидкимъ параффиномъ, оливою съ 6.9% параффина, оливою съ 5.5% параффина и чистою оливою, показали, что измѣненіе уровня въ капиллярѣ C на 1 дѣленіе соотвѣтствуетъ измѣненію температуры на 0.02°C. — 0.03°C. Принимая-же во вниманіе, что ни въ одной изъ таблицъ показанія C_1 и C_2 не достигаютъ разности въ 1 m. m. cub., но, напротивъ того, сходятся гораздо ближе, эти разности можно, объяснить колебаніями температуры приблизительно въ 0.01°C. —0.015°C. Опыты Regnault [2]), произведенные съ водою, вполнѣ оправдываютъ это воззрѣніе; вотъ почему я считаю коэффиціентомъ дѣйствительной сжимаемости $K = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

3°. Нѣкоторые изъ жидкостей даютъ весьма расходящіяся значенія для коэффиціента сжимаемости; къ ихъ числу слѣдуетъ

---

[1]) Это число взято какъ среднее между числами Grassi и Amaury et Descamps коэффиціентовъ сжимаемости эѳира.

[2]) Regnault. loc. cit., p. 464.

отнести бензолъ § 64 и студневидную желатину § 75. Бензолъ мѣняетъ свой коэффиціентъ въ зависимости отъ способа его опредѣленія; а желатина—отъ времени.

4°. Сопоставивъ коэффиціенты послѣдней таблицы съ оптическимъ эффектомъ Kundt'a (§ 19), нельзя найти между ними никакого прямаго соотношенія, и такимъ образомъ нельзя связать оптическій эффектъ Kundt'a съ объемною упругостью изслѣдованныхъ тѣлъ.

Глава IV.

О теоріи Kundt'а двойнаго лучепреломленія въ жидкостяхъ.

§ 87. Мнѣ остается теперь вкратцѣ изложить ту теорію двойнаго лучепреломленія въ жидкихъ тѣлахъ, которую предложилъ профессоръ Kundt [1]) по поводу открытаго имъ явленія. Исходною точкою его изслѣдованій служатъ гидродинамическія уравненія G. G. Stokes'а [2]), которыя отличаются отъ общепринятыхъ [3]) тѣмъ, что въ нихъ взаимодѣйствіе двухъ сосѣднихъ жидкихъ элементовъ считается направленнымъ не по нормали къ поверхности раздѣла, и что давленіе передается неодинаково во всѣ стороны, т. е. введеніемъ понятія о касательной силѣ и касательномъ дѣйствіи (tangential force, tangential action). Послѣднія уравненія были вызваны необходимостью объяснить рядъ такихъ явленій, какъ скольженіе одной части жидкости по другой, скольженіе жидкости вдоль твердой стѣны, скольженіе одной жидкости по другой физически различной и т. д. Мысль ввести касательныя силы въ уравненія гидродинамики принадлежитъ Poisson'у и Stokes'у; они одновременно и независимо другъ отъ друга указали въ своихъ мемуарахъ на пріемы рѣшенія подобныхъ вопросовъ.

§ 88. Видъ этихъ уравненій слѣдующій:

[1]) Kundt. loc. cit., p. 117—119.

[2]) G. G. Stokes. Mathematical and Physical papers. Cambridge, 1880, vol I, p. 75—129.

[3]) B. Riemann. Partielle Differentialgleichungen. Braunschweig, 1882, p. 277, ур. (1)—(4).

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}&=X-\frac{du}{dt}-\frac{udu}{dx}-\frac{vdu}{dy}-\frac{wdu}{dz}+\frac{\eta}{\rho}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right\}\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}&=Y-\frac{dv}{dt}-\frac{udv}{dx}-\frac{vdv}{dy}-\frac{wdv}{dz}+\frac{\eta}{\rho}\left\{\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right\}\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}&=Z-\frac{dw}{dt}-\frac{udw}{dx}-\frac{vdw}{dy}-\frac{wdw}{dz}+\frac{\eta}{\rho}\left\{\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Въ нихъ входятъ величины X, Y, Z; u, v, w; p, ρ и η. X, Y, Z суть слагающія внѣшнихъ ускоряющихъ силъ по осямъ координатъ x, y, z; u, v, w—слагающія скоростей по тѣмъ-же осямъ x, y, z; p—давленіе, ρ—плотность, η—коэффиціентъ внутренняго тренія жидкости, движеніе которой изучается. Считая плотность ρ и коэффиціентъ внутренняго тренія η постоянными, насчитываемъ въ этихъ трехъ уравненіяхъ всего четыре неизвѣстныхъ u, v, w и p, вслѣдствіе чего къ системѣ приведенныхъ трехъ уравненій нужно присоединить еще одно—четвертое— въ формѣ:

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0, \qquad (2)$$

которое служитъ выраженіемъ того понятія, что внутри жидкости нѣтъ ни образованія, ни уничтоженія массы, и которое называютъ уравненіемъ непрерывности.

Stokes разсматриваетъ ур. (1) и ур. (2) какъ общія уравненія движенія жидкости въ трубахъ и каналахъ и считаетъ возможнымъ опредѣлить изъ нихъ эффектъ тренія при движеніи волнъ и приливовъ.

§ 89. Прилагая свои уравненія къ изученію разнаго рода вопросовъ, Stokes между прочимъ разсматриваетъ случай движенія жидкости между двумя концентрическими цилиндрами, какъ въ опытахъ профессора Kundt'а и моихъ. Въ этой задачѣ общія уравненія значительно упрощаются тѣмъ, что ихъ можно выразить въ полярныхъ координатахъ и разсматривать

движеніе только одного слоя въ плоскости xy, опустивъ силы и часть обусловливаемаго ими давленія. Я не буду утруждать вниманія читателя передѣлками, которыя основываются на правилахъ замѣны однихъ перемѣнныхъ другими, а представлю искомое дифференціальное уравненіе движенія жидкаго слоя въ окончательномъ видѣ:

$$\frac{d^2q}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dq}{dr}-\frac{q}{r^2}=0. \qquad (3)$$

На разборѣ его и останавливается Stokes [1]). Въ немъ q есть дѣйствительная скорость движенія жидкой частицы на разстояніи r отъ оси вращенія, а r и θ суть полярныя координаты, такъ что

$$\left.\begin{aligned} u &= -q\sin\theta, \\ v &= q\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Уравненіе (3) легко проинтегрировать, положивъ

$$q=e^{\int u dr}; \qquad (5)$$

интегралъ его выразится въ формѣ:

$$q=\frac{C}{r}+C'r\ , \qquad (6)$$

причемъ C и C' суть двѣ произвольныя постоянныя, введенныя послѣ интегрированія. Ихъ можно легко опредѣлить изъ условій опыта. Назовемъ черезъ a—радіусъ внутренняго цилиндра, а черезъ b — внѣшняго; кромѣ того, пусть скорость движенія жидкой частицы у подвижнаго цилиндра будетъ q_1, а скорость у неподвижнаго—q_2. Тогда очевидно

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{C}{a}+C'a\ , \\ \text{а} \quad q_2 &= \frac{C}{b}+C'b\ . \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

1) Stokes. loc cit., p. 102.

Но скорость $q_2=0$, потому что жидкій слой, прилегающій къ неподвижному внѣшнему цилиндру, остается въ покоѣ. Разрѣшивъ ур. (7) относительно C и C', находимъ выраженіе ур. (6) въ функціи отъ постоянныхъ прибора a, b и скорости вращенія q_1, именно:

$$q = \frac{aq_1}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2-r^2}{r}\right). \tag{8}$$

Послѣднее уравненіе проф. Kundt кладетъ въ основаніе своей теоріи двойнаго лучепреломленія во вращающихся жидкостяхъ.

§ 90. Вслѣдствіе различныхъ угловыхъ скоростей, съ которыми движутся жидкія частицы вдоль радіуса r, получается касательное къ нему натяженіе (Scheerende Kraft, Shearing stress) въ каждомъ элементарномъ объемѣ. Kundt полагаетъ, что оно должно быть по величинѣ пропорціонально выраженію

$$\frac{dq}{dr}-\frac{q}{r} \tag{9}$$

и коэффиціенту внутренняго тренія η. Подъ вліяніемъ касательнаго натяженія въ элементарномъ объемѣ развивается въ одномъ направленіи maximum расширенія, а по взаимноперпендикулярному—maximum сжатія; направленіе расширенія или сжатія должно дѣлать уголъ въ 45° съ радіусомъ. Въ этомъ распредѣленіи натяженій Kundt усматриваетъ истинную причину двойнаго лучепреломленія и приходитъ къ слѣдующимъ двумъ заключеніямъ.

1°. «Оси двойнаго лучепреломленія,—т. е. направленія колебаній обоихъ лучей, на которыя разлагается лучъ, идущій параллельно оси цилиндровъ, — совпадаютъ съ направленіями maximum'а сжатія и maximum'а расширенія. Оба направленія свѣтовыхъ колебаній составляютъ повсюду въ цилиндрическомъ жидкомъ кольцѣ уголъ въ 45° съ радіусомъ въ разсматриваемомъ мѣстѣ».

2°. «Во всякомъ мѣстѣ вращающейся жидкости проявляющееся двойное лучепреломленіе пропорціонально

$$\frac{dq}{dr}-\frac{q}{r}=-\frac{2aq_1}{b^2-a^2}\cdot\frac{b^2}{r^2}». \tag{10}$$

Правая сторона этого выраженія опредѣлена изъ уравненія (8). Послѣднее уравненіе можно еще представить въ формѣ:

$$\Delta=-A.r.\frac{2aV}{b^2-a^2}\cdot\frac{b^2}{r^2}, \tag{11}$$

о которой я говорилъ въ § 40; здѣсь по прежнему Δ есть разность хода между обыкновеннымъ и необыкновеннымъ лучами, A множитель пропорціональности, а $V = q_1$. Отсюда не трудно вывести основные законы явленія Kundt'a.

1°. Разность хода Δ должна быть пропорціональна скорости вращенія V; это слѣдствіе подтверждено опытами §§ 30, 31 и 32.

2°. Разность хода Δ обратно пропорціональна разности квадратовъ b^2-a^2 радіусовъ внѣшняго и внутренняго; на основаніи измѣреній съ двумя внѣшними цилиндрами (см. § 41) я не замѣтилъ столь рѣзкаго измѣненія величины Δ.

3°. Разность хода Δ непрерывно падаетъ отъ центра къ переферіи; мое замѣчаніе § 28 находится въ противорѣчіи съ этимъ выводомъ, хотя ихъ можно согласить на основаніи соображеній, высказанныхъ въ § 40.

4°. Разность хода Δ можетъ быть положительною и отрицательною, смотря по знаку скорости движенія V; это слѣдствіе подтверждается тѣмъ, что полоса компенсатора искривляется въ сторону движенія, а отклоненіе полосы влѣво и вправо характеризуетъ положительное и отрицательное двойное лучепреломленіе.

5°. Разность хода Δ пропорціональна коэффиціенту внутренняго тренія η. Это заключеніе противорѣчитъ опытамъ Kundt'a

и моимъ § 32, 3°, если его примѣнить къ различнымъ жидкостямъ; оно, однако, приложимо къ одной и той-же жидкости, но не въ формѣ простой пропорціональности, какъ показано въ § 37, 3°.

Заключеніе.

Резюмируя все вышесказанное относительно теоріи двойнаго преломленія, приходимъ къ слѣдующимъ выводамъ:

1°. Требованіе, по которому оси свѣтовыхъ колебаній должны составлять уголъ въ 45° съ касательною къ радіусу, не доказано, а опыты самого проф. Kundt'a, произведенные съ коллодіумомъ и гумми аравійскимъ, противорѣчатъ ему.

2°. Двойное преломленіе Δ разныхъ жидкостей, какъ доказано опытами § 31, не зависитъ отъ внутренняго тренія η, и поэтому множитель η имѣетъ значеніе лишь для жидкостей, дающихъ оптическій эффектъ. Kundt не показываетъ, какъ можно было-бы связать ур. (11) съ воззрѣніями Maxwell'a на природу внутренняго тренія тѣлъ (см. § 14 и § 19).

3°. Самое слабое мѣсто предлагаемой теоріи несомнѣнно тамъ, гдѣ она не можетъ объяснить, почему однѣ жидкости даютъ оптическій эффектъ, а другія—нѣтъ.

Приведенныхъ замѣчаній вполнѣ достаточно, чтобы убѣдиться въ слабости предложенной теоріи и чтобы показать, что путь дальнѣйшихъ теоретическихъ изслѣдованій долженъ быть направленъ не въ сторону изученія уравненій гидродинамики, но на развитіе идеи физическаго строенія жидкаго тѣла. Прежде чѣмъ вновь отвѣчать на затронутый здѣсь вопросъ, нужно собрать опытный матеріалъ по вопросу о соотношеніи между коэффиціентомъ η, твердостью E и временемъ разслабленія T, и тогда, быть можетъ, будетъ найдено вѣрное рѣшеніе задачи. Мнѣ кажется, что обнаруженное проф. Kundt'омъ двойное преломленіе въ маслахъ и коллоидахъ обусловливается, если не

исключительно, то въ сильной мѣрѣ, присутствіемъ твердыхъ органическихъ частицъ, которыя вызываютъ его деформаціею своего растяженія. Вѣдь въ самомъ дѣлѣ, огромное большинство органическихъ тканей обладаетъ способностью двоякопреломлять свѣтовые лучи; стоитъ вспомнить только твердую желатину, которая при самыхъ ничтожныхъ натяженіяхъ даетъ замѣтное двойное лучепреломленіе.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ X.

ОДЕССА,
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1889.

Записки математическаго отдѣленія:

Томъ I.

Томъ II. *А. Старковъ.* Общій интегралъ уравненія съ частными производными *n*-го порядка вида $\frac{d^nZ}{d\varphi d\xi \ldots d\psi d\omega} = \Phi(\varphi,\xi \ldots \psi,\omega) Z + \Phi_1(\varphi,\xi \ldots \psi,\omega)$. *Его-же.* Къ вопросу объ интегрированіи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій. *А. Кононовичъ.* Независимое отъ исчисленія Ламберта опредѣленіе albedo бѣлаго картона. *Th. Schwedoff.* Théorie mathématique des formes cométaires. *Р. Августиновичъ.* Изслѣдованіе проводимости жидкихъ и расплавленныхъ изоляторовъ. 1879 г. Цѣна 2 руб.

Томъ III. *Th. Schwedoff.* Théorie mathématique des formes cométaires (suite). *А. Старковъ.* О сложныхъ процентахъ и о текущихъ счетахъ. *В. Лигинъ.* Научная дѣятельность Мишеля Шаля. *Г. Шапиро.* Основаніе для теоріи общихъ кофункцій и ихъ примѣненій. 1881 г. Цѣна 2 р. 50 к.

Томъ IV. *А. Старковъ.* О поверхностяхъ, обнимающихъ всѣ положенія движущейся сферы перемѣннаго радіуса. *И. Умовъ.* Изъ лекцій математической физики: 1) Теорія безконечно малыхъ колебаній консервативной системы около положенія устойчиваго равновѣсія. 2) Колебанія системы съ одною степенью свободы. *В. Лигинъ.* Непосредственныя примѣненія солнечной теплоты (инсоляторы). *Его-же.* Литература вопроса о сложныхъ циркулахъ. 1883 г. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Томъ V. *А. Клоссовскій.* Устройство метеорологической службы на югѣ Россіи. *Его-же.* Наблюденія надъ температурой почвы въ Елисаветградѣ *И. Занчевскій.* О трехшестной сочлененной системѣ. *Н. Жуковскій.* Объ ударѣ двухъ шаровъ, изъ которыхъ одинъ плаваетъ въ жидкости. *А. Старковъ* Къ вопросу о поверхности наименьшаго сопротивленія при движеніи въ несжимаемой жидкости. *Н. Жуковскій.* О графическомъ рѣшеніи основнаго уравненія при вычисленіи планетныхъ орбитъ. *Н. Сонинъ.* Обобщеніе одной формулы Абеля. *Н. Новиковъ.* Признакъ устойчивости движенія и его связь съ однимъ изъ признаковъ maximum'а или minimum'а простаго опредѣленнаго интеграла. *Ѳ. Орловъ.* Изъ теоріи рулеттъ. 1884 г. Цѣна 1 р. 50 коп.

Томъ VI. *Н. Сонинъ.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. *А. Старковъ.* Объ одномъ линейномъ дифференціальномъ уравненіи 3-го порядка. *Его-же.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. *Его-же.* О нѣкоторыхъ особенностяхъ въ постановкѣ задачи Ньютона о поверхности наименьшаго сопротивленія. *Н. Умовъ.* Геометрическое значеніе интеграловъ Френеля. *А. Старковъ.* Интегрированіе раціональной дроби съ мнимыми корнями въ знаменателѣ. *Н. Сонинъ.* Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія (статья вторая). *В. Лигинъ.* Новое построеніе Мориса д'Оканя для опредѣленія отношенія скоростей въ направляющихъ механизмахъ Поселье и Гарта. *Приложеніе:* Русская библіографія по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи за 1884 годъ. 1885. Цѣна 1 руб. 50 коп.

Томъ VII. *A. Klossovsky.* Les orages en Russie. *И. Слешинскій.* Къ вопросу о разложеніи аналитическихъ функцій въ непрерывныя дроби. *A. Klossovsky.* Les orages au Sud de la Russie. Avec 4 cartes. *С. Зеймигеръ.* Страничка анализа. *Приложенія:* 1) Русская библіографія по математикѣ, механикѣ, астрономіи, физикѣ и метеорологіи за 1885 годъ. 2) Къ исторіи алгебраическаго обозначенія въ связи съ развитіемъ азбучной и музыкальной письменности. 1886 г. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Томъ VIII. *Б. Станкевичъ.* Этюды по кинетической теоріи строенія тѣлъ. *А. Геричъ.* Объ общемъ законѣ сжатія водныхъ растворовъ солей. *И. Слешинскій.* О сходимости непрерывныхъ дробей. *И. Слешинскій.* Доказательство существованія нѣкоторыхъ предѣловъ. *В. Ермаковъ.* Задача для молодыхъ ученыхъ. 1888 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Томъ IX. *И. Занчевскій.* Теорія винтовъ. *И. Руссьянъ.* Къ вопросу о вѣроятности случайныхъ ошибокъ. *Г. Де-Метцъ.* О механическихъ свойствахъ маселъ и коллоидовъ.

Въ «Запискахъ математическаго Отдѣленія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей» помѣщаются статьи по высшей и низшей математикѣ, физикѣ и прикладнымъ наукамъ. Статьи присылаются въ совѣтъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей и могутъ представлять: а) самостоятельныя изслѣдованія, б) рефераты, в) элементарную разработку научныхъ вопросовъ и теорій съ цѣлью ихъ большаго распространенія.

ЗАПИСКИ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОТДѢЛЕНІЯ

Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей.

ТОМЪ X.

ОДЕССА,
Тип. А. Шульце, Ланжероновская ул., д. Карузо № 36.
1889.



Печатано по опредѣленію Совѣта Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей. Секретарь Общества *П. Бучинскій*.

MÉMOIRES

de la section mathématique

de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie

(Odessa).

T. X.

СОДЕРЖАНІЕ.

TABLE DES MATIÈRES.

О разложеніи въ непрерывную дробь функціи, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ вида $M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2+Q=0$, гдѣ M, N, P и Q — цѣлыя раціональныя функціи.

Владиміра Циммермана.

Sur le développement en fraction continue d'une fonction qui est déterminée par l'équation différentielle $M\frac{dy}{dx} Ny+Py^2+Q=0$, M, N, P, Q étant des polynômes entiers, par *W. Zimmerman*.

Въ Journal d. Mathém. T. I, 4-e série 1885 года помѣщенъ мемуаръ Laguerre'а подъ заглавіемъ: «Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels». Предметъ мемуара, какъ показываетъ заглавіе,—разложеніе въ непрерывную дробь функціи, удовлетворяющей линейному дифференціальному уравненію перваго порядка съ раціональными коэффиціентами.

Названный мемуаръ содержитъ доказательства формулъ

$$Q_n(\Omega_{n+1}-\Omega_n)+\theta_{n+1}-\frac{R_n}{R_{n-1}}\theta_{n-1}=WQ'_n$$

и

$$\Omega_{n+1}+\Omega_n=-\frac{\theta_n Q_n}{R_n},$$

на которыхъ основанъ самый способъ Laguerre'а. Эти доказательства изложены неполно, что дѣлаетъ ихъ недостаточно убѣ-

дительными. Въ настоящемъ трудѣ я избѣгнулъ этого недостатка помощью пріема, который вмѣстѣ съ тѣмъ способствуетъ и къ распространенію метода Laguerre'a.

Именно Laguerre ограничивается тѣмъ случаемъ, когда функція, опредѣляемая линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ перваго порядка съ цѣлыми раціональными коэффиціентами, разлагается въ рядъ по нисходящимъ степенямъ перемѣнной независимой. Употребленный мною пріемъ даетъ возможность приложить методъ Laguerre'a къ болѣе общему уравненію

$$M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2+Q=0\,,$$

гдѣ M, N, P и Q—цѣлыя раціональныя функціи x, не ограничиваясь при этомъ тѣмъ только случаемъ, кода y разлагается въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x: я разсматриваю какъ этотъ случай, такъ и тотъ, когда y разлагается въ рядъ по восходящимъ степенямъ x. Все это составляетъ предметъ первыхъ двухъ параграфовъ моей статьи. Въ третьемъ параграфѣ разсматриваются частные случаи, въ которыхъ я старался, по возможности, обстоятельно указать, какимъ образомъ дифференціальныя уравненія для числителей и знаменателей подходящихъ дробей могутъ служить къ рѣшенію вопроса о сходимости непрерывной дроби, въ которую разлагается функція y.

§ 1.

1. Въ анализѣ употребляютъ два рода разложеній въ непрерывныя дроби, соотвѣтствующіе двумъ родамъ разложеній функцій въ ряды,—въ ряды по восходящимъ и по нисходящимъ степенямъ перемѣнной независимой. Остановимся сначала на послѣднемъ случаѣ, когда функція разлагается по нисходящимъ степенямъ перемѣнной независимой. Итакъ возьмемъ такую функцію y отъ перемѣнной независимой x и положимъ:

$$(a)\qquad y=\lambda_0-\frac{\mu_1}{y_1},\ y_1=\lambda_1-\frac{\mu_2}{y_2},\ldots y_n=\lambda_n-\frac{\mu_{n+1}}{y_{n+1}},\ldots y_s=\lambda_s-\frac{\mu_{s+1}}{y_{s+1}},$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \ldots$ — цѣлыя функціи x степени не ниже первой, λ_0—цѣлая часть разложенія y въ рядъ, $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots$ постоянныя количества, $y_1, y_2 \ldots y_{s+1}$—функціи, разлагающіяся въ ряды по нисходящимъ степенямъ x и обращающіяся въ ∞ при $x=\infty$. (Слѣдовательно λ_k представляетъ цѣлую часть разложенія y_k въ рядъ).

Изъ равенствъ (a) получаемъ разложеніе y въ непрерывную дробь:

$$(b) \qquad y=\lambda_0-\cfrac{\mu_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu_2}{\lambda_2-\ldots-\cfrac{\mu_n}{\lambda_n-\ldots-\cfrac{\mu_s}{\lambda_s-\cfrac{\mu_{s+1}}{y_{s+1}}}}}}$$

Въ этомъ разложеніи постоянныя количества $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots$ могутъ быть выбраны по произволу, насчетъ коэффиціентовъ въ цѣлыхъ функціяхъ λ. При опредѣленномъ выборѣ значеній $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots$ разложеніе (b)—единственно: только одна опредѣленная система цѣлыхъ функцій $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \ldots$ и одна опредѣленная функція y_{s+1} (обладающая вышеуказанными свойствами) удовлетворяютъ равенству (b). Задача разложенія въ непрерывную дробь функціи y и состоитъ въ отысканіи, для опредѣленной системы постоянныхъ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \ldots$, такихъ цѣлыхъ функцій $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \ldots$, чтобы удовлетворялось (для всякаго s) уравненіе (b), гдѣ y_{s+1} означаетъ функцію, разлагающуюся въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x и обращающуюся въ ∞ при $x=\infty$.

Числителя и знаменателя n-наго приближенія непрерывной дроби мы будемъ означать соотвѣтственно чрезъ φ_n и f_n. Изъ теоріи непрерывныхъ дробей извѣстно соотношеніе

$$(c) \qquad yf_n-\varphi_n=-\frac{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n+1}}{y_1 y_2 \ldots y_{n+1}},$$

гдѣ $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ суть функціи, опредѣляемыя равенствами (a). Въ разсматриваемомъ нами теперь случаѣ $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n+1}$ —постоянныя количества; $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$—функціи, разлагающіяся въ ряды по нисходящимъ степенямъ x, причемъ λ_k есть цѣлая часть разложенія въ рядъ функціи y_k. Поэтому, если степени цѣлыхъ функцій $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \lambda_{n+1}$ означимъ соотвѣтственно чрезъ $m_1, m_2, \ldots m_{n+1}$, то высшая степень x въ разложеніи въ рядъ произведенія $y_1 y_2 \ldots y_{n+1}$ будетъ $m_1+m_2+\ldots+m_{n+1}=\sum_{i=1}^{i=n+1} m_i$. Слѣдовательно функція, стоящая въ правой части равенства (c), разлагается въ рядъ (по нисходящимъ степенямъ x), высшая степень x въ которомъ равна $-\sum_{i=1}^{i=n+1} m_i$.

Если функція разлагается въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x и высшая степень x въ этомъ рядѣ есть—p, то такую функцію мы будемъ выражать, слѣдуя обозначенію Laguerre'a, знакоположеніемъ $\left(\frac{1}{x^p}\right)$.

Такимъ образомъ, положивъ $\sum_{i=1}^{i=n} m_i = h_n$, мы представимъ равенство (c) въ видѣ:

$$(d) \qquad y f_n - \varphi_n = \left(\frac{1}{x^{h_n+m_{n+1}}}\right)$$

Изъ закона образованія знаменателей подходящихъ дробей [1]) слѣдуетъ, что f_n есть цѣлый многочленъ, степень котораго относительно x равна степени произведенія $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$,

[1]) Законъ этотъ выражается зависимостью: $f_n=\lambda_n f_{n-1}-\mu_n f_{n-2}$; при этомъ $f_0=1$, $f_1=\lambda_1$.

т. е. равна $h_n = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$. Отсюда (по раздѣленіи обѣихъ частей равенства (d) на f_n) заключаемъ, что

$$(e) \qquad y = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}}}\right).$$

Предположимъ теперь, что разсматриваемая функція y опредѣляется дифференціальнымъ уравненіемъ

$$(1) \qquad M\frac{dy}{dx} + Ny + Py^2 + Q = 0,$$

гдѣ M, N, P и Q—цѣлыя раціональныя функціи x.

Дифференцируя равенство (e), находимъ:

$$(f) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}+1}}\right)$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части равенства (e), получаемъ:

$$(g) \qquad y^2 = \frac{\varphi_n^2}{f_n^2} + 2\frac{\varphi_n}{f_n}\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}}}\right) + \left(\frac{1}{x^{4h_n+2m_{n+1}}}\right).$$

Означимъ черезъ ρ высшую степень x въ разложеніи y въ рядъ и слѣдовательно высшую степень x въ разложеніи $\frac{\varphi_n}{f_n}$ въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x. Тогда равенство (g) можно просто написать въ видѣ:

$$(h) \qquad y^2 = \frac{\varphi_n^2}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}-\rho}}\right),$$

ибо разложеніе въ рядъ функціи $2\frac{\varphi_n}{f_n}\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}}}\right) +$

$+\left(\frac{1}{x^{4h_n+2m_{n+1}}}\right)$ очевидно начинается членомъ, содержащимъ x въ степени $-(2h_n+m_{n+1}-\rho)$.

Внеся въ дифференціальное уравненіе (1) выраженія (e), (f) и (h) для y, $\frac{dy}{dx}$ и y^2, получимъ:

$$M\frac{\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n}{f_n^2}+N\frac{\varphi_n}{f_n}+P\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+Q=M\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}+1}}\right)+$$

$$+N\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}}}\right)+P\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}-\rho}}\right),$$

или, послѣ умноженія обѣихъ частей на f_n^2:

$$M(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n)+N\varphi_n f_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2=f_n^2\left[M\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}+1}}\right)+\right.$$

$$\left.+N\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}}}\right)+P\left(\frac{1}{x^{2h_n+m_{n+1}-\rho}}\right)\right].$$

Такъ какъ лѣвая часть написаннаго равенства есть цѣлая функція, то и правая часть должна быть цѣлой функціей. Степень ν_n этой послѣдней равна, очевидно, высшей степени x въ разложеніи въ рядъ $M\left(\frac{1}{x^{m_{n+1}+1}}\right)+N\left(\frac{1}{x^{m_{n+1}}}\right)+P\left(\frac{1}{x^{m_{n+1}-\rho}}\right)$; или, если высшую степень x въ разложеніи $M\left(\frac{1}{x}\right)+N+P\left(\frac{1}{x^{-\rho}}\right)$ означимъ черезъ δ, то

$$\nu_n = \delta - m_{n+1}$$

И такъ наше равенство можетъ быть написано въ видѣ:

(2) $$M(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n)+N\varphi_n f_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2=A_n\theta_n,$$

гдѣ θ_n—цѣлая функція степени $\nu_n=\delta-m_{n+1}$, а чрезъ A_n мы означили произведеніе $\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$ (постоянное число).

Изъ теоріи непрерывныхъ дробей извѣстна формула

$$\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n=\mu_1\mu_2\ldots\mu_n.$$

Внеся въ уравненіе (2) $\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n$, вмѣсто $A_n=\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$, получимъ:

$$M(\varphi'_nf_n-f'_n\varphi_n)+N\varphi_nf_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2=\theta_n(\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n),$$

откуда

$$f_n(M\varphi'_n+\tfrac{1}{2}N\varphi_n+Qf_n-\theta_n\varphi_{n-1})=\varphi_n(Mf'_n-\tfrac{1}{2}Nf_n-P\varphi_n-\theta_nf_{n-1}).$$

Это равенство можно представить въ слѣдующихъ видахъ:

$$(\alpha)\qquad M\varphi'_n+\tfrac{1}{2}N\varphi_n+Qf_n-\theta_n\varphi_{n-1}=\varphi_n\frac{Mf'_n-\frac{1}{2}Nf_n-P\varphi_n-\theta_nf_{n-1}}{f_n}$$

$$(\beta)\qquad Mf'_n-\tfrac{1}{2}Nf_n-P\varphi_n-\theta_nf_{n-1}=f_n\frac{M\varphi'_n+\frac{1}{2}N\varphi_n+Qf_n-\theta_n\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$$

$$\frac{M\varphi'_n+\frac{1}{2}N\varphi_n+Qf_n-\theta_n\varphi_{n-1}}{\varphi_n}=\frac{Mf'_n-\frac{1}{2}Nf_n-P\varphi_n-\theta_nf_{n-1}}{f_n},$$

Положивъ

$$\frac{M\varphi'_n+\frac{1}{2}N\varphi_n+Qf_n-\theta_n\varphi_{n-1}}{\varphi_n}=\frac{Mf'_n-\frac{1}{2}Nf_n-P\varphi_n-\theta_nf_{n-1}}{f_n}=\Omega_n,$$

причемъ Ω_n, въ силу каждаго изъ равенствъ (α) и (β), есть цѣлый многочленъ [1]), напишемъ равенства (β) и (α) въ видѣ:

[1]) Дѣйствительно, лѣвыя части равенствъ (α) и (β)—цѣлые многочлены, слѣдовательно и правыя должны быть цѣлыми многочленами; но такъ какъ φ_n и f_n, въ силу зависимости $\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n=A_n=Const.$, не могутъ имѣть общихъ функціональныхъ множителей, то выраженія $\frac{Mf'_n-\frac{1}{2}Nf_n-P\varphi_n-\theta_nf_{n-1}}{f_n}$ и $\frac{M\varphi'_n+\frac{1}{2}N\varphi_n+Qf-\theta_n\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$ должны быть цѣлыми многочленами.

(3,a) $$Mf_n'=(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)f_n+P\varphi_n+\theta_n f_{n-1}$$

(3,b) $$M\varphi_n'=(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-Qf_n+\theta_n\varphi_{n-1}\,.$$

Постараемся найти соотношенія между цѣлыми функціями λ, входящими въ непрерывную дробь, въ которую разлагается y, и цѣлыми функціями Ω и θ. Съ этой цѣлью, написавши по формуламъ (3,a) и (3,b) уравненія:

(3,a)$'$ $$Mf_{n+1}'=(\Omega_{n+1}-\tfrac{1}{2}N)f_{n+1}+P\varphi_{n+1}+\theta_{n+1}f_n$$

(3 b)$'$ $$M\varphi_{n+1}'=(\Omega_{n+1}-\tfrac{1}{2}N)\varphi_{n+1}-Qf_{n+1}+\theta_{n+1}\varphi_n\,,$$

постараемся изъ уравненій (3,a), (3,b), (3,a)$'$ и (3,b)$'$ исключить неизвѣстныя функціи f и φ и ихъ производныя помощью извѣстныхъ соотношеній:

(4,a) $$f_{n+1}=\lambda_{n+1}f_n-\mu_{n+1}f_{n-1}$$

(4,b) $$\varphi_{n+1}=\lambda_{n+1}\varphi_n-\mu_{n+1}\varphi_{n+1}$$

(5) $$\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n=\mu_1\mu_2\ldots\mu_n=A_n$$

(5)$'$ $$\varphi_n f_{n+1}-f_n\varphi_{n+1}=\mu_1\mu_2\ldots\mu_n=A_{n+1}\,.$$

Помножимъ уравненіе (3,a) на φ_{n-1}, а уравненіе (3,b)—на f_{n-1} и вычтемъ затѣмъ второе изъ перваго; такимъ образомъ получимъ:

$$M(f_n'\varphi_{n-1}-\varphi_n'f_{n-1})=(\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n)\Omega_n+\tfrac{1}{2}N(\varphi_{n-1}f_n+f_{n-1}\varphi_n)+$$
$$+Qf_nf_{n-1}+P\varphi_n\varphi_{n-1}\,,$$

или, замѣнивши множитель, стоящій предъ Ω_n, чрезъ A_n (на основаніи уравненія (5)):

(6) $$M(f_n'\varphi_{n-1}-\varphi_n'f_{n-1})=A_n\Omega_n+\tfrac{1}{2}N(\varphi_{n-1}f_n+f_{n-1}\varphi_n)+$$
$$+Qf_nf_{n-1}+P\varphi_n\varphi_{n-1}\,.$$

Подобнымъ-же образомъ изъ уравненій (3,a)$'$, (3,b)$'$ и (5)$'$ получаемъ:

$$(6)' \quad M(f'_{n+1}\varphi_n-\varphi'_{n+1}f_n)=A_{n+1}\Omega_{n+1}+\tfrac{1}{2}N(\varphi_n f_{n+1}+f_n\varphi_{n+1})+$$
$$+Qf_{n+1}f_n+P\varphi_{n+1}\varphi_n.$$

Помноживши на μ_{n+1} уравненіе (6), сложимъ затѣмъ съ уравненіемъ (6)'. Замѣчая, что $\mu_{n+1}A_n=A_{n+1}$, получимъ:

$$M(f'_{n+1}\varphi_n-\varphi'_{n+1}f_n+\mu_{n+1}f'_n\varphi_{n-1}-\mu_{n+1}\varphi'_nf_{n-1})=A_{n+1}(\Omega_{n+1}+\Omega_n)+$$
$$+\tfrac{1}{2}N(\varphi_nf_{n+1}+f_n\varphi_{n+1}+\mu_{n+1}\varphi_{n-1}f_n+\mu_{n+1}f_{n-1}\varphi_n)+$$
$$Q(f_{n+1}f_n+\mu_{n+1}f_nf_{n-1})+P(\varphi_{n+1}\varphi_n+\mu_{n+1}\varphi_n\varphi_{n-1}).$$

Перенеся всѣ члены правой части, кромѣ перваго члена, въ лѣвую часть равенства, замѣнивши f_{n+1} и φ_{n+1} по формуламъ (4,a) и (4,b), а также f'_{n+1} и φ'_{n+1} по формуламъ:

$$f'_{n+1}=\lambda'_{n+1}f_n+\lambda_{n+1}f'_n-\mu_{n+1}f'_{n-1}$$
$$\varphi'_{n+1}=\lambda'_{n+1}\varphi_n+\lambda_{n+1}\varphi'_n-\mu_{n+1}\varphi'_{n-1},$$

которыя получаются чрезъ дифференцированіе формулъ (4,a) и (4,b), получимъ послѣ приведенія:

$$-\lambda_{n+1}\{M(\varphi'_nf_n-f'_n\varphi_n)+N\varphi_nf_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2\}+$$
$$+\mu_{n+1}M(\varphi'_{n-1}f_n+\varphi_{n-1}f'_n-f'_{n-1}\varphi_n-f_{n-1}\varphi'_n)=A_{n+1}(\Omega_{n+1}+\Omega_n).$$

Выраженіе въ скобкахъ, на которое множится λ_{n+1}, равно $A_n\theta_n$ (въ силу уравненія (2)); выраженіе-же, на которое множится $\mu_{n+1}M$, равно нулю, какъ производная функціи $\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n$, равной, въ силу уравненія (5), постоянному количеству.

Итакъ имѣемъ:

$$-A_n\lambda_{n+1}\theta_n=A_{n+1}(\Omega_{n+1}+\Omega_n),$$

откуда, замѣчая, что $\dfrac{A_n}{A_{n+1}}=\dfrac{1}{\mu_{n+1}}$, находимъ формулу

$$(7) \qquad \Omega_{n+1}+\Omega_n=-\frac{\lambda_{n+1}\theta_n}{\mu_{n+1}}$$

Для полученія другаго соотношенія помножимъ на f_n равенство $(3,a)'$, на f_{n+1} равенство $(3,a)$ и вычтемъ второе изъ перваго. Такимъ образомъ получимъ:

$$M(f'_{n+1}f_n-f'_nf_{n+1})=(\Omega_{n+1}-\Omega_n)f_{n+1}f_n+P(\varphi_{n+1}f_n-f_{n+1}\varphi_n)+$$
$$+\theta_{n+1}f_n^2-\theta_nf_{n+1}f_{n-1},$$

или, замѣнивши $\varphi_{n+1}f_n-f_{n+1}\varphi_n$ чрезъ $-A_{n+1}$ (по форм. $(5)'$), f'_{n+1} и f_{n+1} соотвѣтственно чрезъ $\lambda'_{n+1}f_n+\lambda_{n+1}f'_n-\mu_{n+1}f'_{n-1}$ и $\lambda_{n+1}f_n-\mu_{n+1}f_{n-1}$ (на основаніи форм. $(4,a)$) и сдѣлавши въ обѣихъ частяхъ приведеніе:

$$M(\lambda'_{n+1}f_n^2-\mu_{n+1}f'_{n-1}f_n+\mu_{n+1}f'_nf_{n-1})=(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2-$$
$$-\mu_{n+1}\Omega_{n+1}f_nf_{n-1}+\mu_{n+1}\Omega_nf_nf_{n-1}-A_{n+1}P+\theta_{n+1}f_n^2-$$
$$-\theta_n\lambda_{n+1}f_nf_{n-1}+\mu_{n+1}\theta_nf_{n-1}^2$$

Перенеся всѣ члены лѣвой части, кромѣ $M\lambda'_{n+1}f_n^2$,—въ правую, замѣнивши, по форм. (7),—$\lambda_{n+1}\theta_n$ чрезъ $\mu_{n+1}\Omega_{n+1}+$ $+\mu_{n+1}\Omega_n$, далѣе Mf'_n и $Mf'_{n\;1}$ соотвѣтственно чрезъ Ω_nf_n+ $+\frac{1}{2}Nf_n+P\varphi_n+\theta_nf_{n-1}$ и $\Omega_{n\;1}f_{n-1}+\frac{1}{2}Nf_{n-1}+P\varphi_{n-1}+\theta_{n-1}f_{n-2}$ (на основаніи форм. $(3,a)$), получимъ послѣ приведенія:

$$M\lambda'_{n+1}f_n^2-(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2-A_{n+1}P+\theta_{n+1}f_n^2+\mu_{n+1}(\Omega_n+\Omega_{n-1})f_nf_{n-1}+$$
$$+\mu_{n+1}P(\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n)+\mu_{n+1}\theta_{n-1}f_nf_{n-2}$$

Замѣнимъ здѣсь $\Omega_n+\Omega_{n-1}$ по форм. (7) чрезъ $-\frac{\lambda_n\theta_{n-1}}{\mu_n}$ и $\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n$ по форм. (5) чрезъ A_n; замѣчая, что $\mu_{n+1}A_n=A_{n+1}$, получимъ:

$$M\lambda'_{n+1}f_n^2=(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2+\theta_{n+1}f_n^2-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n+1}f_n(\lambda_nf_{n-1}-\mu_nf_{n-2}),$$

или, такъ какъ $\lambda_nf_{n-1}-\mu_nf_{n-2}=f_n$,

$$M\lambda'_{n+1}f_n^2=(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2+\theta_{n+1}f_n^2-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}f_n^2.$$

Послѣ раздѣленія обѣихъ частей на f_n^2, получимъ формулу:

$$(8)\ldots\ldots M\lambda'_{n+1}=(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}+\theta_{n+1}-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}.$$

Формулы (7) и (8) и суть тѣ соотношенія между цѣлыми функціями λ, θ и Ω, которыя мы желали найти.

Какъ указано раньше, между степенью ν_n цѣлой функціи θ_n и степенью m_{n+1} цѣлой функціи λ_{n+1} существуетъ зависимость

$$\nu_n=\delta-m_{n+1} \text{ или } \nu_n+m_{n+1}=\delta,$$

гдѣ δ означаетъ высшую степень x въ разложеніи въ рядъ $M(\frac{1}{x})+N+P(\frac{1}{x-\rho})$ *).

Членъ, содержащій высшую степень x въ многочленѣ

$$\Omega_n=\frac{Mf'_n-\frac{1}{2}Nf_n-P\varphi_n-\theta_nf_{n-1}}{f_n}=M\frac{f'_n}{f_n}-\frac{1}{2}N-P\frac{\varphi_n}{f_n}-\theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n},$$

есть, очевидно, высшій членъ разложенія въ рядъ (по нисходящимъ степенямъ x) $M\frac{f'_n}{f_n}-\frac{1}{2}N-P\frac{\varphi_n}{f_n}$ [Разложеніемъ $\theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n}$ мы пренебрегаемъ, ибо высшая степень въ этомъ разложеніи ниже степени θ_n и, тѣмъ болѣе, ниже δ,—высшей степени разложенія $M\frac{f'_n}{f_n}-\frac{1}{2}N-P\frac{\varphi_n}{f_n}$].

Слѣдовательно высшій (по степени x) членъ Ω_n есть высшій членъ разложенія въ рядъ

$$\frac{M}{x}\sum_{i=1}^{i=n}m_i-\frac{1}{2}N-Py,$$

*) ρ—высшая степень x въ разложеніи y въ рядъ.

такъ какъ степень f_n равна $\sum_{i=1}^{i=n} m_i$ и высшій членъ въ разложеніи $P\frac{\varphi_n}{f_n}$ равенъ высшему члену разложенія Py.

2. Докажемъ теперь, что формулъ (7) и (8) достаточно для опредѣленія послѣдовательнымъ путемъ (постепеннымъ переходомъ отъ нисшихъ указателей къ высшимъ) цѣлыхъ ф-цій λ, θ и Ω при напередъ избранныхъ значеніяхъ постоянныхъ величинъ μ.

Съ этой цѣлью докажемъ слѣдующую лемму:

Если положимъ

$$(\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots V_n=(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)f_n-Mf'_n+P\varphi_n+\theta_n f_{n-1}\,,$$

$$(\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots W_n=(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-M\varphi'_n-Qf_n+\theta_n\varphi_{n-1}\,,$$

причемъ цѣлыя функціи f_n, φ_n, λ_n, θ_n, Ω_n и постоянныя количества μ_n, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ указателя n, находятся между собою въ зависимостяхъ, опредѣляемыхъ ур-іями (4,a), (4,b) и формулами (7) и (8),—то между тремя послѣдовательными многочленами V_{n+1}, V_n и V_{n-1} и между тремя многочленами W_{n+1}, W_n и W_{n-1} существуютъ соотношенія:

$$V_{n+1}-\lambda_{n+1}V_n+\mu_{n+1}V_{n-1}=0$$

и

$$W_{n+1}-\lambda_{n+1}W_n+\mu_{n+1}W_{n-1}=0.$$

Для доказательствъ этой леммы продифференцируемъ ур-ія (4,a) и (4,b) и помножимъ каждое изъ полученныхъ такимъ образомъ ур-ій на M; тогда будемъ имѣть равенства

$$(\gamma)\ldots\ldots\ldots\ldots Mf'_{n+1}=M\lambda'_{n+1}f_n+\lambda_{n+1}Mf'_n-\mu_{n+1}Mf'_{n-1}$$

$$(\delta)\ldots\ldots\ldots\ldots M\varphi'_{n+1}=M\lambda'_{n+1}\varphi_n+\lambda_{n+1}M\varphi'$$

Изъ равенства (α) слѣдуетъ, что

$$Mf'_n=(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)f_n+P\varphi_n+\theta_n f_{n-1}-V_n$$

Подобнымъ-же образомъ имѣемъ:

$$Mf'_{n+1}=(\Omega_{n+1}+\tfrac{1}{2}N)f_{n+1}+P\varphi_{n+1}+\theta_{n+1}f_n-V_{n+1}$$

$$Mf'_{n-1}=(\Omega_{n-1}+\tfrac{1}{2}N)f_{n-1}+P\varphi_{n-1}+\theta_{n-1}f_{n-2}-V_{n-1}$$

Точно также, на основаніи равенства (β),

$$M\varphi'_n=(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-Qf_n+\theta_n\varphi_{n-1}-W_n$$

$$M\varphi'_{n+1}=(\Omega_{n+1}-\tfrac{1}{2}N)\varphi_{n+1}-Qf_{n+1}+\theta_{n+1}\varphi_n-W_{n+1}$$

$$M\varphi'_{n-1}=(\Omega_{n-1}-\tfrac{1}{2}N)\varphi_{n-1}-Qf_{n-1}+\theta_{n-1}\varphi_{n-2}-W_{n-1}$$

Внеся эти выраженія для Mf'_{n+1}, Mf'_n и Mf'_{n-1}, $M\varphi'_{n+1}$, $M\varphi'_n$ и $M\varphi'_{n-1}$ въ ур-ія (γ) и (δ), найдемъ:

$$\begin{aligned}(\Omega_{n+1}+\tfrac{1}{2}N)f_{n+1}+P\varphi_{n+1}+\theta_{n+1}f_n-V_{n+1}=M\lambda'_{n+1}f_n+\\+\lambda_{n+1}(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)f_n+\lambda_{n+1}P\varphi_n+\lambda_{n+1}\theta_n f_{n-1}-\lambda_{n+1}V_n-\\-\mu_{n+1}(\Omega_{n-1}+\tfrac{1}{2}N)f_{n-1}-\mu_{n+1}P\varphi_{n-1}-\mu_{n+1}\theta_{n-1}f_{n-2}+\mu_{n+1}V_{n-1}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(\Omega_{n+1}-\tfrac{1}{2}N)\varphi_{n+1}-Qf_{n+1}+\theta_{n+1}\varphi_n-W_{n+1}=M\lambda'_{n+1}\varphi_n+\\+\lambda_{n+1}(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-\lambda_{n+1}Qf_n+\lambda_{n+1}\theta_n\varphi_{n-1}-\lambda_{n+1}W_n-\\-\mu_{n+1}(\Omega_{n-1}-\tfrac{1}{2}N)\varphi_{n-1}+\mu_{n+1}Qf_{n-1}-\mu_{n+1}\theta_{n-1}\varphi_{n-2}+\mu_{n+1}W_{n-1}\end{aligned}$$

Перенеся въ обоихъ написанныхъ ур-іяхъ всѣ члены въ лѣвую часть, замѣнивши f_{n+1} и φ_{n+1} соотвѣтственно чрезъ $\lambda_{n+1}f_n-\mu_{n+1}f_{n-1}$ и $\lambda_{n+1}\varphi_n-\mu_{n+1}\varphi_{n-1}$ (по форм. (4,a) и (4,b)) и сдѣлавши приведеніе, получимъ:

$$\begin{aligned}[(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}+\theta_{n+1}-M\lambda'_{n+1}]f_n-[(\Omega_{n+1}-\Omega_{n-1})\mu_{n+1}+\\+\lambda_{n+1}\theta_n]f_{n-1}+\mu \text{[illegible]} f_{n-2}-[V_{n+1}-\lambda_{n+1}V_n+\mu_{n+1}V_{n-1})=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{[illegible]}-M\lambda'_n\text{[illegible]}-[(\Omega_{n+1}-\Omega_{n-1})\mu_{n+1}+\\ \text{[illegible]}\lambda_{n+1}W_n+\mu_{n+1}W_{n-1})=0\end{aligned}$$

Эти ур-iя, въ силу завизимостей (7) и (8), принимаютъ видъ:

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}f_n-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}\lambda_n f_{n-1}+\mu_{n+1}\theta_{n-1}f_{n-2}-$$
$$-(V_{n+1}-\lambda_{n+1}V_n+\mu_{n+1}V_{n-1})=0,$$

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}\varphi_n-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}\lambda_n\varphi_{n-1}+\mu_{n+1}\theta_{n-1}\varphi_{n-2}-$$
$$-(W_{n+1}-\lambda_{n+1}W_n+\mu_{n+1}W_{n-1})=0$$

На основанiи ур-iй (4,a) и (4,b) первые три члена каждаго изъ этихъ ур-iй исчезаютъ, и мы такимъ образомъ получаемъ;

$$V_{n+1}-\lambda_{n+1}V_n+\mu_{n+1}V_{n-1}=0$$

$$W_{n+1}-\lambda_{n+1}W_n+\mu_{n+1}W_{n-1}=0,$$

чтó и требовалось.

Допустимъ теперь, что 3 ряда цѣлыхъ ф-цiй

$$\Omega_{i-1},\ \Omega_i,\ \Omega_{i+1},\ \Omega_{i+2}\ldots\ldots\ldots\Omega_n\ldots\ldots\ldots$$

$$\theta_{i-1},\ \theta_i,\ \theta_{i+1},\ \theta_{i+2}\ldots\ldots\ldots\theta_n\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_i,\ \lambda_{i+1},\ \lambda_{i+2}\ldots\ldots\ldots\lambda_n\ldots\ldots\ldots$$

и рядъ постоянныхъ количествъ

$$\mu_i,\ \mu_{i+1},\ \mu_{i+2}\ldots\ldots\ldots\mu_n\ldots\ldots\ldots$$

удовлетворяютъ ур-iямъ (7) и (8).

Далѣе, допустимъ, что 2 ряда цѣлыхъ многочленовъ.

$$f_{i-2},\ f_{i-1},\ f_i\ldots\ldots\ldots f_n\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{i-2},\ \varphi_{i-1},\ \varphi_i\ldots\ldots\ldots\varphi_n\ldots\ldots\ldots$$

опре.ѣлены такъ, что удовлетворяютъ ур-іямъ (4,a) и (4,b) (гдѣ λ и μ предполагаются опредѣленными вышеуказаннымъ образомъ).

Сверхъ того предположимъ, что цѣлыми функціями

$$\Omega_{i-1} \text{ и } \Omega_i$$

$$\theta_{i-1} \text{ и } \theta_i$$

$$f_{i-2},\ f_{i-1} \text{ и } f_i$$

$$\varphi_{i-2},\ \varphi_{i-1} \text{ и } \varphi_i$$

удовлетворяются ур-ія (3,a) и (3,b), т. е.

$$V_{i-1}=0 \text{ и } V_i=0$$

$$W_{i-1}=0 \text{ и } W_i=0.$$

На основаніи только что доказанной леммы, будемъ имѣть

$$V_{i+1}=V_{i+2}=\ldots\ldots=V_n=\ldots\ldots=0$$

$$W_{i+1}=W_{i+2}=\ldots\ldots=W_n=\ldots\ldots=0,$$

т. е. ур-ія (3,a) и (3,b) удовлетворяются вообще, начиная съ $n=i-1$.

Легко видѣть, что, если положимъ

$$f_0=1,\ \varphi_0=\lambda_0{}^{*})$$

$$f_{-1}=0,\ \varphi_{-1}=1$$

$$f_{-2}=1,\ \varphi_{-2}=0,$$

$$\theta_{-1}=-P,\ \theta_0=Q+M\varphi_0'+N\varphi_0+P\varphi_0^2$$

$$\Omega_{-1}=\tfrac{1}{2}N,\ \Omega_0=-\tfrac{1}{2}N-P\varphi_0$$

$$\mu_0=-1\ ,$$

то будутъ удовлетворяться ур-ія (4,a), (4,b), (3,a) и (3,b).

---

*) λ_0—цѣлая часть разложенія y въ рядъ.

Слѣдовательно, если помощью формулъ (7) и (8), имѣя θ_{-1},θ_o и Ω_o, опредѣлимъ послѣдовательнымъ путемъ цѣлыя ф-ціи θ_n, Ω_n и λ_n **) (для $n=1, 2, 3, 4 \ldots$), соотвѣтствующія избранной системѣ постоянныхъ количествъ μ; далѣе, имѣя λ и μ, опредѣлимъ по формуламъ $(4,a)$ и $(4,b)$ два ряда многочленовъ

$$f_1,f_2,\ldots\ldots\ldots f_n\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_1,\varphi_2\ldots\ldots\ldots\varphi_n\ldots\ldots\ldots$$

то, на основаніи вышесказаннаго, будутъ удовлетворяться ур-ія

$$(3,a)\ldots\ldots Mf'_n=(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)f_n+P\varphi_n+\theta_n f_{n-1}$$

$$(3,b)\ldots\ldots M\varphi'_n=(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-Qf_n+\theta_n\varphi_{n-1}$$

для всякаго $n\geqq-1$.

Исключивъ изъ ур-ій $(3,a)$ и $(3b)$ Ω_n, найдемъ:

$$(9)\ldots\ldots M(\varphi'_n f_n-f'_n\varphi_n)+N\varphi_n f_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2=\theta_n(\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n)$$

Но изъ ур-ій

$$f_n=\lambda_n f_{n-1}-\mu_n f_{n-2}$$

$$\varphi_n=\lambda_n\varphi_{n-1}-\mu_n\varphi_{n-2}\ ,$$

которымъ удовлетворяютъ наши многочлены f и φ, слѣдуетъ, что

$$\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n=\mu_n(\varphi_{n-2}f_{n-1}-f_{n-2}\varphi_{n-1})\ ,$$

откуда

$$\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n=\mu_2\mu_3\ldots\ldots\mu_n(\varphi_0 f_1-f_0\varphi_1)\,;$$

**) λ_{n+1} опредѣляемъ при этомъ, какъ цѣлую ф-цію степени $m_{n+1}=\delta-\nu_n$, причемъ m_{n+1} не меньше 1 (слѣдовательно ν_n, степень θ_n, не должно быть $>\delta-1$).

и такъ какъ $f_0=1$, $\varphi_0=\lambda_0$, $f_1=\lambda_1$, $\varphi_1=\lambda_0\lambda_1-\mu_1$ (по форм. (4,*a*) и (4,*b*)), то

$$\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n=\mu_1\mu_2\ldots\mu_n=A_n=Const.$$

Такимъ образомъ ур-іе (9) принимаетъ видъ:

$$(10)\ldots\ldots M(\varphi'_n f_n-f'_n\varphi_n)+N\varphi_n f_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2=0_n.\ Const.$$

Означимъ теперь разность $y-\frac{\varphi_n}{f_n}$ чрезъ r_n, т. е. положимъ

$$y=\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n$$

Дифференцируя это равенство, находимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'_n f_n-f'_n\varphi_n}{f_n^2}+r'_n$$

Возвышая то-же равенство въ квадратъ, получимъ:

$$y^2=\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+2\frac{\varphi_n}{f_n}r_n+r_n^2=\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+r_n(2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n)$$

Вносія написанныя выраженія для y, $\frac{dy}{dx}$ и y^2 въ ур-іе (1) находимъ:

$$M\frac{\varphi'_n f_n-f'_n\varphi_n}{f_n^2}+N\frac{\varphi_n}{f_n}+P\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+Q+Mr'_n+Nr_n+Pr_n(2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n)=0$$

или, принявъ во вниманіе ур-іе (10),

$$(11)\ldots\ldots Mr'_n+Nr_n+Pr_n(2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n)=-\frac{0_n Const}{f_n^2}.$$

Высшая степень x въ разложеніи (по нисходящимъ степенямъ x) въ рядъ ф-ціи

$$2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n+\frac{\varphi_n}{f_n}=y+\frac{\varphi_n}{f_n}$$

равна ρ—высшей степени x въ разложеніи въ рядъ y *), т. е.

$$2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=\left(\frac{1}{x^{-\rho}}\right)$$

Далѣе

$$\frac{r'_n}{r_n}=\left(\frac{1}{x}\right);$$

слѣдовательно ур-іе (11) можно представить въ видѣ:

---

*) Дѣйствительно, если λ_0 (цѣлая часть разложенія y въ рядъ) не равно нулю, то, какъ показываетъ законъ образованія f и φ (ур-ія (4,a) и (4,b)), членъ φ_n, содержащій высшую степень x, есть высшій членъ произведенія $\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$; членъ-же f_n, содержащій высшую степень x, есть высшій членъ произведенія $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$. Такимъ образомъ въ разложеніи въ рядъ (по нисходящимъ степенямъ x) ф-ціи $\frac{\varphi_n}{f_n}$ членъ съ наивысшей степенью x тожественно равенъ высшему (по степени x) члену λ_0, т. е. высшему члену разложенія въ рядъ y. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ (если λ_0 не равно нулю) ф-ція $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=y+\frac{\varphi_n}{f_n}$ даетъ рядъ, въ которомъ высшая степень x есть ρ.

Переходя теперь къ тому случаю, когда $\lambda_0=0$, замѣтимъ, слѣдующее: такъ какъ λ и μ непрерывной дроби, въ которую разлагается y, должны удовлетворять (вмѣстѣ съ соотвѣтствующими θ и Ω, причемъ θ_{-1}, θ_0 и Ω_0 имѣютъ вышеуказанныя значенія) зависимостямъ (7) и (8), получаемымъ какъ слѣдствіе ур-ій (3,a),(3,b),(4,a),(4,b) и (5), то при извѣстномъ выборѣ μ, цѣлыя ф-ціи λ, опредѣляемыя *вообще* зависимостями (7) и (8), должны или совпадать съ λ непрерывной дроби, представляющей разложеніе y, или-же быть болѣе общими цѣлыми функціями, имѣющими λ непрерывной дроби, какъ частныя значенія.

Избравши для постоянныхъ величинъ μ систему значеній $\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_n\ldots$, означимъ соотвѣтствующія λ непрерывной дроби, представляющей дѣйствительное разложеніе y, чрезъ $\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots$ На основаніи сдѣланнаго только что замѣчанія, λ_1 (опредѣляемое вообще формулами (7) и (8)) не можетъ быть низшей степени, чѣмъ λ'_1. Членъ съ высшей степенью x въ разложеніи $\frac{\varphi_n}{f_n}$ въ рядъ (φ_n и f_n—цѣлыя ф-ціи, опредѣляемыя *вообще* нашими формулами) есть высшій членъ разложенія въ рядъ $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ (это слѣдуетъ изъ закона образованія

$$(12)\ldots\ldots r_n\left[M\left(\frac{1}{x}\right)+N+P\left(\frac{1}{x-\rho}\right)\right]=-\frac{\theta_n\, Const}{f_n^2}$$

Означимъ чрезъ ε_n высшую степень x въ разложеніи въ рядъ r_n. Такимъ образомъ высшая степень x въ разложеніи въ рядъ лѣвой части ур-ія (12) будетъ равна $\varepsilon_n+\delta$; высшая-же степень въ разложеніи правой части равна $\delta-m_{n+1}-2\sum_{i=1}^{i=n}m_i$, ибо степень θ_n равна $\delta-m_{n+1}$, а степень f_n равна $\sum_{i=1}^{i=n}m_i$.

Итакъ

$$\varepsilon_n+\delta=\delta-m_{n+1}-2\sum_{i=1}^{i=n}m_i\,,$$

откуда

$$\varepsilon_n=-\left(2\sum_{i=1}^{i=n}m_i+m_{n+1}\right).$$

φ_n и f_n при $\lambda_0=0$); членъ съ высшей степенью x въ разложеніи въ рядъ y есть высшій членъ разложенія въ рядъ $-\frac{\mu_1}{\lambda'_1}$; поэтому, такъ какъ степень λ_1 не ниже степени λ'_1, высшая степень x въ разложеніи въ рядъ (по нисходящ. степенямъ) функціи $\frac{\varphi_n}{f_n}$ не выше ρ, — наивысшей степени x въ разложеніи въ рядъ y. Отсюда заключаемъ, что и высшая степень x въ разложеніи ф-ціи $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=y+\frac{\varphi_n}{f_n}$ не выше ρ. Очевидно она и не ниже ρ; ибо обратное предположеніе приводитъ къ заключенію, что, если ф-цію $y+\frac{\varphi_n}{f_n}$ разложимъ въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x, — высшіе члены въ разложеніяхъ y и $\frac{\varphi_n}{f_n}$ должны взаимно уничтожаться; иными словами, высшій членъ въ разложеніи $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ въ рядъ (по нисходящ. степенямъ x) долженъ быть равенъ по величинѣ, но противенъ по знаку высшему члену разложенія въ рядъ $-\frac{\mu_1}{\lambda'_1}$. Но это невозможно, ибо (на основаніи сдѣланнаго выше значенія) λ'_1 должно либо совпадать съ λ_1, либо представлять частное его значеніе.

Итакъ высшая степень x въ разложеніи въ рядъ ф-ціи $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=y+\frac{\varphi_n}{f_n}$ есть ρ, будетъ-ли λ_0 отлично отъ нуля или равно нулю.

Слѣдовательно

$$r_n = y - \frac{\varphi_n}{f_n} = \left(\frac{1}{2\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i + m_{n+1}} \right)_x$$

или

$$yf_n - \varphi_n = \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i + m_{n+1}} \right)_x = \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{i=n+1} m_i} \right)_x .$$

Все сказанное въ этомъ членѣ можно вкратцѣ резюмировать такъ: положивши

$$\mu_0 = -1,\ \theta_{-1} = -P,\ \theta_0 = Q + M\varphi_0' + Nf_0 + P\varphi_0^2,\ \Omega_0 = -\tfrac{1}{2}N - P\varphi_0,$$

гдѣ $\varphi_0 = \lambda_0 =$ цѣлой части разложенія y въ рядъ, и опредѣливъ послѣдовательнымъ путемъ по формуламъ (7) и (8) $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots$, соотвѣтствующія извѣстной (по произволу избранной) системѣ значеній $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n \ldots$; далѣе, при помощи этихъ μ и λ и при помощи 4-хъ величинъ

$$f_0 = 1,\ \varphi_0 = \lambda_0$$

$$f_{-1} = 0,\ \varphi_{-1} = 1$$

найдя послѣдовательнымъ путемъ, по формуламъ (4,a) и (4,b), два ряда многочленовъ

$$f_1,\ f_2,\ f_3 \ldots\ldots f_n \ldots$$

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_n \ldots,$$

будемъ имѣть:

$$(13) \ldots\ldots yf_n - \varphi_n = \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{i=n+1} m_i} \right)_x$$

Но f_n и φ_n, опредѣленные по форм. (4,a) и (4,b), при выше-написанныхъ значеніяхъ f_0, φ_0, f_{-1} и φ_{-1}, суть не что

нное, какъ знаменатель и числитель n-наго приближенія непрерывной дроби:

$$\sigma=\lambda_0-\cfrac{\mu_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu_2}{\lambda_2-\cdots\cfrac{\mu_n}{\lambda_n-\cdots}}}$$

Такимъ образомъ непрерывная дробь σ, въ которой всѣ μ— постоянныя количества (избранныя по произволу), $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n \ldots$— цѣлыя ф-ціи x, опредѣленныя вышеуказаннымъ способомъ (помощью ур-ій (7) и (8)), а λ_0 —цѣлая часть разложенія y въ рядъ, — находится съ y въ извѣстной зависимости, которая аналитически выражается ур-іемъ (13), гдѣ f_n и φ_n означаютъ соотвѣтственно знаменателя и числителя n-наго приближенія непрерывной дроби σ. Отсюда слѣдуетъ, что непрерывная дробь σ представляетъ собою непрерывную дробь, въ которую разлагается ф-ція y *). Слѣдовательно, если найдено $\lambda_0=\varphi_0$ (помощью котораго опредѣляются θ_0 и Ω_0), то формулъ (7) и (8) вполнѣ достаточно для опредѣленія $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$, а также и цѣлыхъ ф-цій $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n \ldots, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n \ldots$, соотвѣтствующихъ избранной системѣ значеній $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n \ldots$

*) Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлимъ ф-цію u_{n+1} такъ, чтобы удовлетворялось ур-іе:

$$(A) \ldots\ldots y=\lambda_0-\cfrac{\mu_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu_2}{\lambda_2-\cdots-\cfrac{\mu_n}{\lambda_n-\cfrac{\mu_{n+1}}{u_{n+1}}}}}$$

Изъ теоріи непрерывныхъ дробей извѣстна формула, которая выводится совершенно формально изъ ур-ія (A):

$$u_{n+1}=\mu_{n+1}\frac{yf_{n-1}-\varphi_{n-1}}{yf_n-\varphi_n}$$

Такъ какъ въ силу равенства (13),

Итакъ нужно только, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, опредѣлить λ_0, — цѣлую часть разложенія y въ рядъ (что́ нетрудно сдѣлать при помощи даннаго дифференціальнаго ур – ія, которому удовлетворяетъ y).

Опредѣливши $\lambda_0=\varphi_0$, находимъ $\theta_0=Q+M\varphi_0'+N\varphi_0+P\varphi_0^2$ и $\Omega_0=-\frac{1}{2}N-P\varphi_0$; кромѣ того имѣемъ $\theta_{-1}=-P$. Степень λ_1 будетъ извѣстна (ибо m_1, степень λ_1, равна δ безъ ν_0,—степени θ_0), также какъ и степень Ω_1, ибо Ω_1—многочленъ, высшій членъ котораго=высшему члену разложенія въ рядъ $\frac{M}{x}m_1-\frac{1}{2}N-Py$.

Вставивши въ формулы (7) и (8), написанныя для $n=0$, извѣстныя значенія θ_{-1},θ_0 и Ω_0, выбранное (по произволу) значеніе для μ_1 и цѣлые многочлены λ_1 и Ω_1 извѣстныхъ степеней съ неопредѣленными коэффиціентами, а также цѣлый многочленъ степени $\delta-1$, соотвѣтствующій θ_1 *), съ неопредѣленными коэффиціентами,—мы должны, на основаніи вышесказаннаго, получить вполнѣ опредѣленныя значенія для всѣхъ неизвѣстныхъ коэффиціентовъ, т. е. должны получить λ_1, Ω_1 и θ_1. Написавши затѣмъ ур-ія (7) и (8) для $n=1$, мы тѣмъ-же путемъ получимъ λ_2, Ω_2 и θ_2 и т. д.

$$yf_{n-1}-\varphi_{n-1}=\left(\frac{1}{x^{\sum\limits_{i=1}^{i=n} m_i}}\right),$$

$$yf_n-\varphi_n=\left(\frac{1}{x^{\sum\limits_{i=1}^{i=n+1} m_i}}\right),$$

то ф-ція u_{n+1} разлагается въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x, причемъ высшая степень x въ этомъ рядѣ есть положительная величина m_{n+1}, т. е., другими словами, u_{n+1} обращается въ ∞ при $x=\infty$. Слѣдовательно вторая часть равенства (A) должна совпадать съ дѣйствительнымъ разложеніемъ y въ непрерывную дробь.

*) Степень θ_1 вообще неизвѣстна ; однако (см. выноску на стр. 16) она не выше $\delta-1$. Слѣдовательно мы должны внести въ ур-іе (8) общее выраженіе для цѣлой ф-ціи степени не выше $\delta-1$, т. е. цѣлый многочленъ степени $\delta-1$ съ неопредѣленными поэффиціентами.

Такой способъ опредѣленія λ, Ω и θ изъ формулъ (7) и (8) примѣнимъ *вообще*; но почти всегда дѣло значительно упрощается. Именно въ каждомъ почти случаѣ всѣ λ — одной и той-же степени (очень часто—первой); слѣдовательно постоянной, не зависящей отъ n, оказывается и степень θ_n. Степень-же Ω_n *во всѣхъ* случаяхъ не зависитъ отъ n. Такимъ образомъ въ большинствѣ случаетъ въ многочленахъ всѣхъ 3-хъ родовъ, Ω_n, θ_n и λ_n, съ перемѣной указателя n мѣняются только коэффиціенты; означивши эти коэффиціенты буквами съ соотвѣтствующими указателями и внеся полученныя такимъ образомъ выраженія для Ω_n, Ω_{n+1}, θ_{n-1}, θ_n, θ_{n+1}, λ_{n+1} въ формулы (7) и (8), найдемъ соотношенія между коэффиціентами Ω, θ и λ въ общемъ видѣ (т. е. соотношенія, имѣющія мѣсто для какого угодно значенія указателя n). Эти соотношенія даютъ часто возможность найти общія выраженія для λ_n, Ω_n и θ_n въ функціяхъ указателя n.

Примѣчаніе. Мы положили

$$f_0=1,\ \varphi_0=\lambda_0$$

$$f_{-1}=0,\ \varphi_{-1}=1$$

$$f_{-2}=1, \varphi_{-2}=0$$

Нетрудно показать смыслъ этихъ положеній. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ непрерывную дробь

$$(\mathrm{I})\ldots\ldots\sigma=\lambda_0-\cfrac{\mu_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu_2}{\lambda_2-\ldots}}$$

Непрерывную дробь (I) можно представить въ иномъ видѣ. Дѣйствительно

$$\sigma=1:\frac{1}{\sigma}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\lambda_0-\cfrac{\mu_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu_2}{\lambda_2-\ldots}}}}$$

или-же

$$(II). \quad \ldots \sigma = 0 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{\lambda_0 - \cfrac{\mu_1}{\lambda_1 - \cfrac{\mu_2}{\lambda_2 - \ldots}}}}$$

Отсюда получаемъ приближенія: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{\lambda_0}{1}$ и т. д. Видимъ такимъ образомъ, что $\varphi_{-2}=0$, $\varphi_{-1}=1$ можно разсматривать, какъ числителей, а $f_{-2}=1$, $f_{-1}=0$,—какъ знаменателей приближеній непрерывной дроби σ, если ее представить въ иномъ нѣсколько видѣ. При этомъ въ непрерывной дроби (II) имѣемъ: $\lambda_{-1}=0$, $\lambda_{-2}=0$, $\mu_0=-1$, $\mu_{-1}=-1$. Что-же касается значеній, приписываемыхъ нами Ω_{-1}, Ω_0, θ_{-1} и θ_0, то они вытекаютъ изъ формулъ $(3,a)$ и $(3,b)$, если вставимъ въ эти формулы написанныя значенія f_{-2}, φ_{-2}, f_{-1}, φ_{-1} и f_0.

3. Перейдемъ теперь къ выводу дифференціальныхъ уравненій, которымъ удовлетворяютъ числители и знаменатели приближеній. Дифференцируя ур-іе (2) и исключая A_n между полученнымъ чрезъ это дифференцированіе ур-іемъ и ур-іемъ (2), находимъ:

$$\theta_n[M'(\varphi_n' f_n - f_n'\varphi_n) + M(\varphi_n'' f_n - f_n''\varphi_n) + N'\varphi_n f_n + N\varphi_n' f_n +$$
$$+ N\varphi_n f_n' + P'\varphi_n^2 + 2P\varphi_n\varphi_n' + Q'f_n^2 + 2Qf_n f_n'] = \theta_n'[M(\varphi_n' f_n - f_n'\varphi_n) +$$
$$+ N\varphi_n f_n + P\varphi_n^2 + Qf_n^2].$$

Раскрывши скобки, перенесемъ въ правую часть равенства всѣ члены, не содержащіе ф-цій f_n, f_n', f_n'', а въ лѣвую часть — всѣ остальные члены; соединимъ затѣмъ въ лѣвой части всѣ члены, содержащіе f_n, и послѣ того изъ остальныхъ членовъ лѣвой части соединимъ тѣ, которые содержатъ f_n'. Такимъ образомъ получимъ:

$$M\theta_n\varphi_n f_n'' + [(M'-N)\theta_n - M\theta_n']\varphi_n f_n' + [-M'\theta_n\varphi_n' - M\theta_n\varphi_n'' -$$
$$- N'\theta_n\varphi_n - N\theta_n\varphi_n' - Q'\theta_n f_n - 2Q\theta_n f_n' + M\theta_n'\varphi_n' + N\theta_n'\varphi_n +$$
$$+ Q\theta_n' f_n]f_n = [P'\theta_n\varphi_n - P\theta_n'\varphi_n + 2P\theta_n\varphi_n']\varphi_n$$

Правая часть и члены лѣвой части, содержащіе множителями f''_n и f'_n, дѣлятся на φ_n (содержатъ φ_n множителемъ); слѣдовательно долженъ дѣлиться на φ_n и членъ, содержащій множителемъ f_n; но такъ какъ f_n не дѣлится на φ_n и не имѣетъ съ φ_n общихъ множителей, то долженъ дѣлиться нацѣло на φ_n коэффиціентъ при f_n. Слѣдовательно можно положить:

$$(14)\ldots \frac{-M'\theta_n\varphi'_n - M\theta_n\varphi''_n - N'\theta_n\varphi_n - N\theta_n\varphi'_n - Q'\theta_n f_n - 2Q\theta_n f'}{\varphi_n} + \\ + \frac{M\theta'_n\varphi'_n + N\theta'_n\varphi_n + Q\theta'_n f_n}{\varphi_n} = K_n,$$

причемъ K_n означаетъ цѣлый многочленъ.

Такимъ образомъ, сокращая написанное выше ур-іе на φ_n, находимъ дифференціальное ур-іе:

$$(15)\ldots\ldots M\theta_n f''_n + [(M'-N)\theta_n - M\theta'_n]f'_n + K_n f_n = \\ = (P'\theta_n - P\theta'_n)\varphi_n + 2P\theta_n\varphi'_n.$$

Тѣмъ-же путемъ (поступая относительно φ_n, φ'_n и φ''_n совершенно такъ, какъ поступали относительно f_n, f'_n и f''_n) получаемъ дифференц. ур-іе:

$$(16)\ldots\ldots M\theta_n\varphi''_n + [(M'+N)\theta_n - M\theta'_n]\varphi'_n + L_n\varphi_n = \\ = (Q\theta'_n - Q'\theta_n)f_n - 2Q\theta_n f'_n,$$

гдѣ L_n—цѣлый многочленъ.

Если продифференцируемъ два раза ур-іе (15) и ур-іе (16), то, вмѣстѣ съ ур-іями (15) и (16), получимъ 6 ур-ій. Исключая изъ этихъ ур-ій сначала ф-цію φ_n и всѣ ея производныя, затѣмъ ф-цію f_n и всѣ ея производныя, получимъ два линейныхъ дифференціальныхъ ур-ія 4-го порядка безъ вторыхъ частей; первому изъ этихъ ур-ій удовлетворяетъ f_n, второму φ_n. Мы этихъ исключеній производить не будемъ и сохранимъ ур-ія (15) и (16).

Въ ур-іяхъ (15) и (16) всѣ коэффиціенты, кромѣ K_n и L_n, выражаются помощью цѣлыхъ многочленовъ M, N, P, Q и θ_n, изъ которыхъ первые четыре — коэффиціенты даннаго дифференціальнаго ур-ія (1), а послѣдній, θ_n, можетъ быть опредѣленъ, какъ мы видѣли, помощью формулъ (7) и (8). Остается найти формулы для опредѣленія K_n и L_n. Дифференцируя ур-іе $(3,a)$, находимъ слѣдующую величину для Mf''_n:

$$Mf''_n=(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N-M')f'_n+(\Omega'_n+\tfrac{1}{2}N')f_n+P\varphi'_n+P'\varphi_n+$$
$$+\theta_n f'_{n-1}+\theta'_n f_{n-1}.$$

Внесемъ эту величину въ ур-іе (15); перенеся затѣмъ всѣ члены въ лѣвую часть ур-ія и сдѣлавши приведеніе получимъ:

$$[(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\theta_n-M\theta'_n]f'_n+[(\Omega'_n+\tfrac{1}{2}N')\theta_n+K_n]f_n+\theta_n^2 f'_{n-1}+$$
$$+\theta_n\theta'_n f_{n-1}+P\theta'_n\varphi_n-P\theta_n\varphi'_n=0.$$

Помножимъ полученное ур-іе на M и замѣнимъ Mf'_n по форм. $(3,a)$; — послѣ приведенія будемъ имѣть:

$$[(\Omega_n^2-\tfrac{1}{4}N^2)\theta_n-M\theta'_n(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)+M\theta_n(\Omega'_n+\tfrac{1}{2}N')+MK_n]f_n+$$
$$+(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\theta_n^2 f_{n-1}+M\theta_n^2 f'_{n-1}+(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)P\theta_n\varphi_n-MP\theta_n\varphi'_n=0$$

Вынеся у двухъ членовъ, содержащихъ φ_n и φ'_n, за скобки $-P\theta_n$, замѣнивши затѣмъ Mf'_{n-1} (въ членѣ $M\theta_n^2 f'_{n-1}$) по форм. $(3,a)$ и сдѣлавши приведеніе, найдемъ:

$$[(\Omega_n^2-\tfrac{1}{4}N^2)\theta_n-M\theta'_n(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)+M\theta_n(\Omega'_n+\tfrac{1}{2}N')+MK_n]f_n+$$
$$+(\Omega_n+\Omega_{n-1})\theta_n^2 f_{n-1}-P\theta_n[M\varphi'_n-(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-\theta_n\varphi_{n-1}]+\theta_n^2\theta_{n-1}f_{n-2}=0.$$

Замѣчая что выраженіе $M\varphi'_n-(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-\theta_n\varphi_{n-1}$, которое множится на $P\theta_n$, равно (на основаніи ур-ія $(3,b)$) $-Qf_n$, и вставляя эту величину, получаемъ:

$$[(\Omega_n^2-\tfrac{1}{4}N^2)\theta_n-M\theta'_n(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)+M\theta_n(\Omega'_n+\tfrac{1}{2}N')+MK_n+PQ\theta_n]f_n+$$
$$+(\Omega_n+\Omega_{n-1})\theta_n^2 f_{n-1}+\theta_n^2\theta_{n-1}f_{n-2}=0,$$

или, если вмѣсто $\Omega_n + \Omega_{n-1}$ вставимъ $-\frac{\lambda_n \theta_{n-1}}{\mu_n}$ (по форм. (7)),

$$(17)\ldots.[(\Omega_n^2 - \tfrac{1}{4}N^2)\theta_n - M\theta_n'(\Omega_n + \tfrac{1}{2}N) + M\theta_n(\Omega_n' + \tfrac{1}{2}N') +$$

$$+ MK_n + PQ\theta_n]f_n - \frac{\lambda_n \theta_n^2 \theta_{n-1}}{\mu_n} f_{n-1} + \theta_n^2 \theta_{n-1} f_{n-2} = 0$$

Помноживъ теперь на $\frac{\theta_n^2 \theta_{n-1}}{\mu_n}$ ур-іе (получаемое по форм. (4,a))

$$f_n - \lambda_n f_{n-1} + \mu_n f_{n-2} = 0\,,$$

найдемъ:

$$(18)\ldots\ldots \frac{\theta_n^2 \theta_{n-1}}{\mu_n} f_n - \frac{\lambda_n \theta_n^2 \theta_{n-1}}{\mu_n} f_{n-1} + \theta_n^2 \theta_{n-1} f_{n-2} = 0$$

Сравнивая ур-ія (17) и (18), заключаемъ, что коэфиціенты при f_n въ обоихъ ур-іяхъ должны быть равны. Такимъ образомъ (вынеся M за скобки во второмъ, третьемъ и четвертомъ членѣ выраженія, служащаго коэффиціентомъ при f_n въ ур-іи (17)), имѣемъ:

$$(19)\ldots\ldots(\Omega_n^2 - \tfrac{1}{4}N^2)\theta_n + PQ\theta_n + M\{K_n + \theta_n(\Omega_n' + \tfrac{1}{2}N') -$$

$$- \theta'(\Omega_n + \tfrac{1}{2}N)\} = \frac{\theta_n^2 \theta_{n-1}}{\mu_n}.$$

Тѣмъ-жѣ путемъ приходимъ къ формулѣ:

$$(20)\ldots\ldots(\Omega_n^2 - \tfrac{1}{4}N^2)\theta_n + PQ\theta_n + M\{L_n + \theta_n(\Omega_n' - \tfrac{1}{2}N') -$$

$$- \theta_n'(\Omega_n - \tfrac{1}{2}N)\} = \frac{\theta_n^2 \theta_{n-1}}{\mu_n}.$$

Сравнивая формулы (19) и (20), заключаемъ, что

$$(21)\ldots K_n + \theta_n(\Omega_n' + \tfrac{1}{2}N') - \theta_n'(\Omega_n + \tfrac{1}{2}N) = L_n + \theta_n(\Omega_n' - \tfrac{1}{2}N') -$$

$$- \theta_n'(\Omega_n - \tfrac{1}{2}N).$$

Докажемъ, что каждое изъ этихъ равныхъ выраженій можно положить равнымъ—$\theta_n S_n$, гдѣ S_n означаетъ цѣлый многочленъ.

Съ этой цѣлью въ выраженіе $K_n - \theta_n'(\Omega_n + \frac{1}{2}N)$ внесемъ сначала вмѣсто K_n лѣвую часть равенства (14) и вмѣсто Ω_n—выраженіе, получаемое изъ формулы (3,b); затѣмъ вмѣсто K_n—величину, которую получимъ, рѣшая ур-іе (15) относительно K_n, и вмѣсто Ω_n—выраженіе, получаемое изъ формулы (3,a). Приравнявъ выраженія, полученныя такимъ образомъ, выраженію $K_n - \theta_n'(\Omega_n + \frac{1}{2}N)$, будемъ имѣть:

$$(22) \ldots\ldots K_n - \theta_n'(\Omega_n + \tfrac{1}{2}N) =$$

$$= \theta_n \frac{(-M\varphi_n'' - M'\varphi_n' - N'\varphi_n - N\varphi_n' - Q'f_n - 2Qf_n' - \theta_n'\varphi_{n-1})}{\varphi_n} =$$

$$= \theta_n \frac{(-Mf_n'' - M'f_n' + Nf_n' + P\varphi_n + 2P\varphi_n' + \theta_n' f_{n-1})}{f_n}.$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{-M\varphi_n'' - M'\varphi_n' - N'\varphi_n - N\varphi_n' - Q'f_n - 2Qf_n' - \theta_n'\varphi_{n-1}}{\varphi_n} =$$

$$= \frac{-Mf_n'' - M'f_n' + Nf_n' + P\varphi_n + 2P\varphi_n' + \theta_n' f_{n-1}}{f_n}$$

или

$$\frac{f_n(-M\varphi'' - M'\varphi_n' - N'\varphi_n - N\varphi_n' - Q'f_n - 2Qf_n' - \theta_n'\varphi_{n-1})}{\varphi_n} =$$

$$= -Mf_n'' - M'f_n' + Nf_n' + P\varphi_n + 2P\varphi_n' + \theta_n' f_{n-1}.$$

Такъ какъ правая часть послѣдняго равенства есть цѣлый многочленъ, то и лѣвая часть должна быть цѣлымъ многочленомъ; но f_n и φ_n общихъ множителей не имѣютъ, слѣдовательно выраженіе $\frac{-M\varphi_n'' - M'\varphi_n' - N'\varphi_n - N\varphi_n' - Q'f_n - 2Qf_n' - \theta_n'\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$ должно быть цѣлымъ многочленомъ, Означивъ этотъ цѣлый многочленъ чрезъ T_n, будемъ имѣть (равенство (22)):

$$K_n-\theta_n'(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)=\theta_n T_n$$

и слѣдовательно можно положить:

$$(23)\ldots\ldots K_n+\theta_n(\Omega_n'+\tfrac{1}{2}N')-\theta_n'(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)=-\theta_n S_n,$$

а также (равенство (21)):

$$(24)\ldots\ldots L_n+\theta_n(\Omega_n'-\tfrac{1}{2}N')-\theta_n'(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)=-\theta_n S_n,$$

причемъ S_n означаетъ цѣлый многочленъ.

Вносят эти выраженія въ ур-ія (19) и (20) находимъ формулу (послѣ сокращенія на θ_n):

$$(25)\ldots\ldots \Omega_n^2-\tfrac{1}{4}N^2+PQ-\frac{\theta_n\theta_{n-1}}{\mu_n}=MS_n$$

По этой формулѣ опредѣляется S_n помощью коэффиціентовъ даннаго дифференціальнаго ур-ія (1) и ф-цій Ω_n, θ_n и θ_{n-1}. Когда многочленъ S_n опредѣленъ, K_n и L_n опредѣляются легко по формуламъ:

$$(26)\ldots\ldots K_n=-\theta_n(S_n+\Omega_n'+\tfrac{1}{2}N')+\theta_n'(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)$$

$$(27)\ldots\ldots L_n=-\theta_n(S_n+\Omega_n'-\tfrac{1}{2}N')+\theta_n'(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N),$$

которыя получаются изъ равенствъ (23) и (24).

Такимъ образомъ мы имѣемъ формулы, помощью которыхъ могутъ быть опредѣлены всѣ коэффиціенты дифференц. ур-ій (15) и (16).

Сдѣлаемъ теперь еще одинъ новый выводъ, представляющій интересъ. Именно докажемъ, что ф-ція

$$(a)\ldots\ldots\ldots\ldots u_n=e^{\int\frac{N+Py}{M}dx}\cdot(yf_n-\varphi_n)$$

удовлетворяетъ линейному дифференц. ур-ію 2-го порядка:

$$(28)\ldots\ldots M\theta_n\frac{d^2u}{dx^2}+[(M'-N)\theta_n-M\theta_n']\frac{du}{dx}+\left(K+\frac{PQ\theta_n}{M}\right)u=0$$

Дифференцируя выраженіе (a), находимъ:

$$\frac{du_n}{dx}=\frac{e^{\int\frac{N+Py}{M}dx}}{M}(Nyf_n+Py^2f_n+My'f_n-N\varphi_n-Py\varphi_n-M\varphi'_n+Myf'_n),$$

или, такъ такъ, въ силу ур-ія (1),

$$Nyf_n+Py^2f_n+My'f_n=(My'+Ny+Py^2)f_n=-Qf_n,$$

$$(b)\ldots\ldots\frac{du_n}{dx}=-\frac{e^{\int\frac{N+Py}{M}dx}}{M}(N\varphi_n+Qf_n+M\varphi'_n+Py\varphi_n-Myf'_n)$$

Дифференцируя выраженіе (b), дѣлая приведеніе и принимая во вниманіе ур-іе (1), находимъ:

$$\frac{d^2u_n}{dx^2}=-\frac{e^{\int\frac{N+Py}{M}dx}}{M^2}[N^2\varphi_n+NQf_n+2MN\varphi'_n-PQ\varphi_n+2MQf_n-$$
$$-M'N\varphi_n-M'Qf_n+MN'\varphi_n+MQ'f_n+M^2\varphi''_n+y(NP\varphi_n+$$
$$+PQf_n+2MP\varphi'_n-M'P\varphi_n+MP'\varphi_n-M^2f''_n)]$$

Вставимъ въ лѣвую часть ур-ія (28) u_n, $\frac{du_n}{dx}$ и $\frac{d^2u_n}{dx^2}$. Послѣ приведенія получимъ:

$$M\theta_n\frac{d^2u_n}{dx^2}+[(M'-N)\theta_n-M\theta'_n]\frac{du_n}{dx}+\left(K_n+\frac{PQ\theta_n}{M}\right)u_n=$$
$$=-\frac{e^{\int\frac{N+Py}{M}dx}}{M}[M^2\theta_n\varphi''_n+(MN\theta_n+MM'\theta_n-M^2\theta'_n)\varphi'_n+(MK_n-MN\theta'_n+$$
$$+MN'\theta_n)\varphi_n+2MQ\theta_nf'_n+MQ'\theta_nf_n-MQ\theta'_nf_n-y\{M^2\theta_nf''_n+$$
$$+(MM'\theta_n-MN\theta_n-M^2\theta'_n)f'_n+MK_nf_n-2MP\theta_n\varphi'_n-MP'\theta_n\varphi_n+$$
$$+MP\theta'_n\varphi_n\}]$$

Вынесемъ во второй части написаннаго равенства M за скобки

и сократимъ съ M, стоящимъ въ знаменателѣ; послѣ этого, замѣчая, что (въ силу формулъ (26) и (27))

$$K_n - N\theta_n' + N'\theta_n = L_n,$$

будемъ имѣть:

$$M\theta_n \frac{d^2u_n}{dx^2} + [(M' - N)\theta_n - M\theta_n'] \frac{du_n}{dx} + \left(K_n + \frac{PQ\theta_n}{M}\right) u_n =$$
$$= -e^{\int \frac{N+Py}{M} dx} [M\theta_n \varphi_n'' + \{(M' + N)\theta_n - M\theta_n'\}\varphi_n' + L_n\varphi_n + 2Q\theta_n f_n' -$$
$$-(Q\theta_n' - Q'\theta_n)f_n' - y(M\theta_n f_n'' + \{(M' - N)\theta_n - M\theta_n'\}f_n' + K_n f_n -$$
$$-2P\theta_n\varphi_n' - (P'\theta_n - P\theta_n')\varphi_n)].$$

Принимая во вниманіе ур-ія (15) и (16), заключаемъ, что вторая часть написаннаго равенства есть нуль.

Итакъ ф-ція u_n дѣйствительно удовлетворяетъ ур-ію (28). Точно такъ-же убѣждаемся, что ф-ція

$$z_n = e^{-\int \frac{N + Q\frac{1}{y}}{M} dx} \left(\frac{\varphi_n}{y} - f_n\right)$$

удовлетворяетъ ур-ію:

$$(29) \ldots\ldots M\theta_n \frac{d^2z}{dx^2} + [(M' + N)\theta_n - M\theta'] \frac{dz}{dx} + \left(L_n + \frac{PQ\theta_n}{M}\right) z = 0.$$

4. Въ заключеніе этого параграфа остановимся на нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, когда ур-іе (1) принимаетъ болѣе простой видъ.

a) Если положимъ $P=0$, то ур-ія (1), (15), (28) и формула (25) упростятся и напишутся такъ:

$$(1,a) \ldots\ldots M\frac{dy}{dx} + Ny + Q = 0$$

$$(15,a)\ldots\ldots M\theta_n f''_n+[(M'-N)\theta_n-M\theta'_n]f'_n+K_n f_n=0$$

$$(28,a)\ldots\ldots M\theta_n\frac{d^2u}{dx^2}+[(M'-N)\theta_n-M\theta'_n]\frac{du}{dx}+K_n u=0$$

$$(25,a)\ldots\ldots\Omega_n^2-\tfrac{1}{4}N^2-\frac{\theta_n\theta_{n-1}}{\mu_n}=MS_n$$

При этомъ ф-ція

$$u_n=e^{\int\frac{N}{M}dx}(yf_n-\varphi_n)$$

служитъ однимъ изъ рѣшеній ур-ія (28,a). Другое рѣшеніе того-же ур-ія, какъ показываетъ ур-іе (15,a), есть f_n.

Ур-іе вида (1,a) разсматривается въ вышеупомянутомъ мемуарѣ Laguerre'а

Формулы (7), (8), (26), (25,a), а также ур-іе (28,a), которому удовлетворяютъ ф-ціи f_n и $u_n=e^{\int\frac{N}{M}dx}(yf_n-\varphi_n)$, совпадаютъ съ результатами, найденными Laguerre'омъ.

b) Если положимъ $Q=0$, то ур-ія (1), (16), (29) и формула (25) примутъ видъ:

$$(1,b)\ldots\ldots M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2=0$$

$$(16,b)\ldots M\theta_n\varphi''_n+[(M'+N)\theta_n-M\theta'_n]\varphi'_n+L_n\varphi_n=0.$$

$$(29,b)\ldots\ldots M\theta_n\frac{d^2z}{dx^2}+[(M'+N)\theta_n-M\theta'_n]\frac{dz}{dx}+L_n z=0$$

Въ этомъ случаѣ ф-ціи φ_n и $z_n=e^{-\int\frac{N}{M}dx}\left(\frac{\varphi_n}{y}-f_n\right)$

служатъ частными рѣшеніями одного и того-же ур-ія (29,b).

Итакъ, если въ ур-іи (1) $P=0$, то знаменатели приближеній непрерывной дроби, въ которую разлагается ф-ція y,

удовлетворяютъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ 2-го порядка съ цѣлыми раціональными коэффиціентами безъ второй части. Если въ ур-іи (1) $Q=0$, то числители приближеній удовлетворяютъ линейнымъ дифференц. уравненіямъ 2-го порядка съ цѣлыми раціональными коэффиціентами безъ второй части. Если-же и $P=0$, и $Q=0$, то подобнымъ уравненіямъ удовлетворяютъ какъ знаменатели, такъ и числители приближеній.

§ 2.

1. Перейдемъ къ тому случаю, когда функція, опредѣляемая разсматриваемымъ нами дифференціальнымъ ур-іемъ, разлагается въ рядъ расположенный по восходящимъ степенямъ перемѣнной независимой.

Если дана такая ф-ція y отъ перемѣнной независимой x, то можно положить:

$$y=\lambda_0-\frac{\mu_1}{y_1},\quad y_1=\lambda_1-\frac{\mu_2}{y_2},\quad \ldots\ldots y_s=\lambda_s-\frac{\mu_{s+1}}{y_{s+1}},$$

гдѣ λ_0—совокупность начальныхъ членовъ разложенія y въ рядъ до постояннаго члена включительно; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s$—постоянныя количества; $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{s+1}$—одночлены вида ax^k (причемъ k число цѣлое и положительное); наконецъ $y_1, y_2, \ldots y_{s+1}$—функціи, получающія конечное значеніе при $x=0$.

Изъ написанныхъ равенствъ вытекаетъ разложеніе y въ непрерывную дробь

$$(A)\ldots\ldots y=\lambda_0-\cfrac{\mu_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu_2}{\lambda_2-\ldots\ldots-\cfrac{\mu_n}{\lambda_n-\ldots\ldots-\cfrac{\mu_s}{\lambda_s-\cfrac{\mu_{s+1}}{y_{s+1}}}}}}$$

Постоянныя количества $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots$ могутъ быть выбраны по произволу насчетъ коэффиціентовъ въ одночленахъ μ. При избранной системѣ значеній $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots \lambda_s$ разложеніе (A) единственно: только одна система одночленовъ $\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots \mu_s$ и одна ф-ція $\frac{\mu_{s+1}}{y_{s+1}}$, обращающаяся въ нуль при $x=0$, удовлетворяютъ ур-ію (A). Чтобы найти разложеніе y въ непрерывную дробь, нужно такимъ образомъ для опредѣленной, напередъ избранной системы значеній $\lambda_1, \lambda_2 \ldots\ldots$ опредѣлить систему раціональныхъ одночленовъ μ (степени не ниже 1-ой относительно x) такимъ образомъ, чтобы удовлетворялось ур-іе (A), гдѣ $\frac{\mu_{s+1}}{y_{s+1}}$ обращается въ нуль при $x=0$, λ_0 есть совокупность начальныхъ членовъ разложенія y въ рядъ до постояннаго члена включительно.

Означая, какъ и прежде, числителя и знаменателя n-аго приближенія непрерывной дроби соотвѣтственно чрезъ φ_n и f_n, возьмемъ извѣстное соотношеніе:

$$(B) \ldots\ldots\ldots\ldots y f_n - \varphi_n = \frac{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n+1}}{y_1 y_2 \ldots y_{n+1}}.$$

Если чрезъ $i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}$ означимъ соотвѣтственно степени одночленовъ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \mu_{n+1}$, то числитель второй части равенства (B) будетъ одночленомъ степени $\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s$. Такъ какъ $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ получаютъ конечныя значенія при $x=0$, то тѣмъ-же свойствомъ обладаетъ и знаменатель второй части равенства (B), равный произведенію $y_1 . y_2 \ldots y_{n+1}$.

Слѣдовательно вторая часть равенства (B) разлагается въ рядъ по восходящимъ степенямъ x, и рядъ этотъ начинается членомъ, содержащимъ x въ степени равной $\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s$.

Если для ф-ціи, разлагающейся въ рядъ по восходящимъ степенямъ x, употребимъ обозначеніе (x^p), причемъ p означаетъ нисшую степень x въ разложеніи ф-ціи, то равенство (B) напишется въ видѣ:

$$yf_n-\varphi_n=\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right).$$

Отсюда находимъ:

$$(c)\ldots\ldots\ldots y=\frac{\varphi_n}{f_n}+\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right),$$

ибо f_n есть цѣлый многочленъ, въ которомъ нисшій (по степени x) членъ есть постоянное количество (это слѣдуетъ изъ извѣстнаго закона образованія знаменателей подходящихъ дробей, если примемъ во вниманіе, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$—постоянныя количества).

Предположимъ теперь, что разсматриваемая нами ф-ція y удовлетворяетъ дифференціальному ур-ію:

$$(\mathrm{I})\ldots\ldots\ldots M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2+Q=0,$$

гдѣ M, N, P и Q—цѣлыя раціональныя ф-ціи x.

Дифференцируя равенство (c) и возвышая его въ квадратъ, находимъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'_n f_n-f'_n\varphi_n}{f_n^2}+\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s-1}\right)$$

$$y^2=\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+2\frac{\varphi_n}{f_n}\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right)+\left(x^{2\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right).$$

Означимъ чрезъ τ низшую степень x въ разложеніи въ рядъ y. Тогда послѣднее равенство можемъ написать въ видѣ:

$$y^2=\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s+\tau}\right),$$

ибо разложеніе въ рядъ $2\frac{\varphi_n}{f_n}+\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right)+\left(x^{2\sum\limits^{s=n+1} i_s}_{n+1}\right)$ очевидно начинается членомъ, содержащимъ x въ степени $\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s+\tau$.

Вставляя найденныя выраженія для y, $\frac{dy}{dx}$ и y^2 въ ур-іе (I), получимъ:

$$M\frac{\varphi'_n f_n-f'_n\varphi_n}{f_n^2}+N\frac{\varphi_n}{f_n}+P\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+Q=M.\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s-1}\right)+$$

$$+N\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right)+P\left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s+\tau}\right),$$

или, если во второй части ур-ія вынесемъ за скобки $x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}$ и помножимъ обѣ части на f_n^2,

$$\text{(II)} \ldots\ldots M(\varphi'_n f_n-f'_n\varphi_n)+N\varphi_n f_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2=$$

$$x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n} i_s}.f_n^2[M(x^{i_{n+1}-1})+N(x^{i_{n+1}})+P(x^{i_{n+1}+\tau})].$$

Допустимъ, что $\tau \geqq 0$ *). Тогда съ одной стороны имѣемъ, что $f_n^2.[M(x^{i_{n+1}-1})+N(x^{i_{n+1}})+P(x^{i_{n+1}+\tau})]$ даетъ рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ x и не содержащій отрицательныхъ степеней. x. Съ другой стороны этотъ рядъ долженъ быть конечнымъ, такъ какъ лѣвая часть равенства (II) — цѣлый многочленъ (ибо M, N, P, Q, φ_n, f_n—цѣлые многочлены). Слѣдовательно можно положить:

$$f_n^2[M(x^{i_{n+1}-1})+N(x^{i_{n+1}})+P(x^{i_{n+1}+\tau})]=A_n\theta_n,$$

причемъ A_n выражаетъ постоянное количество, для котораго будетъ ниже выбрано извѣстное значеніе, θ_n—цѣлую раціональную функцію x. Такъ какъ нисшая степень x въ многочленѣ f_n равна нулю (f_n всегда содержитъ постоянный членъ), то нисшая степень x въ разложеніи въ рядъ $f_n^2[M(x^{i_{n+1}-1})+$ $+N(x^{i_{n+1}})+P(x^{i_{n+1}+\tau})]$, т. е. нисшая степень x въ цѣлой ф-ціи θ_n, равна нисшей степени x въ рядѣ $M(x^{i_{n+1}-1})+$ $N(x^{i_{n+1}})+P(x^{i_{n+1}+\tau})$.

Если нисшую степень x въ рядѣ $M(x^{-1})+N+P(x^{\tau})$ означимъ чрезъ δ, нисшую степень x въ цѣлой ф-ціи θ_n—чрезъ q_n, то

$$q_n=\delta+i_{n+1}.$$

Итакъ равенство (II) принимаетъ видъ.

---

*) Отъ такого допущенія излагаемый способъ ни мало не лишается общности. Въ самомъ дѣлѣ, если $\tau<0$, т. е. если нисшая степень x въ разложеніи въ рядъ y равна -1 или ниже, то въ такомъ случаѣ можно положить $y=\omega+z$, гдѣ ω означаетъ совокупность членовъ съ отрицательными степенями x въ рядѣ, получаемомъ для y, и слѣдовательно разложеніе въ рядъ z не содержитъ отрицательныхъ степеней x. Для z, очевидно, получится ур-іе вида (I) съ цѣлыми раціональными коэффиціентами. Разлагая z (относительно котораго выполняется условіе $\tau\geqq0$) по способу, который будетъ изложенъ, получимъ нѣкоторую непрерывную дробь σ. Функціи y будетъ соотвѣтствовать непрерывная дробь $\omega+\sigma$.

$$(III) \ldots\ldots\ldots M(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n) + N\varphi_n f_n + P\varphi_n^2 + Qf_n^2 = A_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s} \cdot \theta_n.$$

Для постояннаго количества A_n выбираемъ слѣдующее значеніе: если чрезъ $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ означимъ соотвѣтственно коэффиціенты въ одночленахъ $\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots \mu_n$, т. е. положимъ

$$\mu_1 = a_1 x^{i_1}, \mu_2 = a_2 x^{i_2}, \ldots\ldots \mu_n = a_n x^{i_n},$$

то чрезъ A_n будемъ означать произведеніе $a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$.

По извѣстной формулѣ имѣемъ:

$$\varphi_{n-1} f_n - f_{n-1}\varphi_n = \mu_1\mu_2 \ldots\ldots \mu_n = a_1 a_2 \ldots a_n x^{i_1+i_2+\ldots+i_n} = A_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s}$$

Внеся въ ур-іе (III) $\varphi_{n-1} f_n - f_{n-1}\varphi_n$ вмѣсто $A_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s}$, будемъ имѣть:

$$M(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n) + N\varphi_n f_n + P\varphi_n^2 + Qf_n^2 = \theta_n(\varphi_{n-1} f_n - f_{n-1}\varphi_n),$$

откуда находимъ (какъ въ § 1)

$$(IV, a) \ldots\ldots\ldots Mf_n' = (\Omega_n + \tfrac{1}{2}N) f_n + P\varphi_n + \theta_n f_{n-1}$$

$$(IV, b) \ldots\ldots\ldots M\varphi_n' = (\Omega_n - \tfrac{1}{2}N)\varphi_n - Qf_n + \theta_n \varphi_{n-1},$$

гдѣ ф-ція

$$\Omega_n = \frac{M\varphi_n' + \frac{1}{2}N\varphi_n + Qf_n - \theta_n\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = \frac{Mf_n' - \frac{1}{2}Nf_n - P\varphi_n - \theta_n f_{n-1}}{f_n}$$

есть цѣлый многочленъ *).

---

*) Въ послѣднемъ убѣждаемся такъ-же, какъ и въ § 1, — замѣчая, что дробь $\frac{\varphi_n}{f_n}$ — несократима, ибо φ_n и f_n, въ силу соотношенія $\varphi_{n-1} f_n - f_{n-1}\varphi_n =$

Помноживши ур-іе (IV',a) на φ_{n-1}, ур-іе (IV,b) на f_{n-1}, вычтя второе изъ перваго и замѣнивши затѣмъ $\varphi_{n-1}f_n - f_{n-1}\varphi_n$ чрезъ $A_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s}$, будемъ имѣть:

$$(\mathrm{V}) \ldots M(f'_n\varphi_{n-1} - \varphi'_n f_{n-1}) = A_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s}\Omega_n + (\varphi_{n-1}f_n + f_{n-1}\varphi_n)N + P\varphi_n\varphi_{n-1} + Qf_nf_{n-1}.$$

Мѣняя n на $n+1$, находимъ:

$$(\mathrm{V})' \ldots M(f'_{n+1}\varphi_n - \varphi'_{n+1}f_n) = A_{n+1}x^{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}\Omega_{n+1} + (\varphi_n f_{n+1} + f_n\varphi_{n+1})N + P\varphi_{n+1}\varphi_n + Qf_{n+1}f_n.$$

Помноживши на $\mu_{n+1}=a_{n+1}x^{i_{n+1}}$ ур-іе (V) и сложивши съ ур-іемъ (V)', получимъ (замѣчая, что $a_{n+1}A_n = A_{n+1}$):

$$M(f'_{n+1}\varphi_n - \varphi'_{n+1}f_n + \mu_{n+1}f'_n\varphi_{n-1} - \mu_{n+1}\varphi'_n f_{n-1}) =$$
$$= A_{n+1}x^{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}(\Omega_{n+1}+\Omega_n) + \tfrac{1}{2}N(\varphi_n f_{n+1} + f_n\varphi_{n+1} + \mu_{n+1}\varphi_{n-1}f_n +$$
$$+ \mu_{n+1}f_{n-1}\varphi_n) + Q(f_{n+1}f_n + \mu_{n+1}f_nf_{n-1}) + P(\varphi_{n+1}\varphi_n + \mu_{n+1}\varphi_n\varphi_{n-1}).$$

Перенесемъ выраженіе, стоящее въ лѣвой части, въ правую часть, первый-же членъ правой части—въ лѣвую часть; замѣнимъ f_{n+1} и φ_{n+1} по извѣстнымъ формуламъ:

$$f_{n+1} = \lambda_{n+1}f_n - \mu_{n+1}f_{n-1}$$

$$\varphi_{n+1} = \lambda_{n+1}\varphi_n - \mu_{n+1}\varphi_{n-1},$$

$=A_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s}$, не могутъ имѣть общихъ функціональныхъ множителей (простыхъ), кромѣ x; на x же f_n не можетъ дѣлиться, ибо содержитъ постоянный членъ.

а также f'_{n+1} и φ'_{n+1} по формуламъ (которыя получаемъ, дифференцируя написанныя формулы):

$$f'_{n+1}=\lambda_{n+1}f'_n-\mu_{n+1}f'_{n-1}-\mu'_{n+1}f_{n-1}$$

$$\varphi'_{n+1}=\lambda_{n+1}\varphi'_n-\mu_{n+1}\varphi'_{n-1}-\mu'_{n+1}\varphi_{n-1}$$

Послѣ небольшаго преобразованія найдемъ:

$$(\mathrm{VI})\ldots\ldots-A_{n+1}x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}(\Omega_{n+1}+\Omega_n)=-M.\mu_{n+1}[\varphi'_{n-1}f_n+ +f'_n\varphi_{n-1}-f'_{n-1}\varphi_n-\varphi'_nf_{n-1}]-M.\mu'_{n+1}(\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n)+ +\lambda_{n+1}[M(\varphi'_nf_n-f'_n\varphi_n)+N\varphi_nf_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2]$$

Такъ какъ

$$(\mathrm{III})\ldots\ldots M(\varphi'_nf_n-f'_n\varphi_n)+N\varphi_nf_n+P\varphi_n^2+Qf_n^2=Ax^{\sum\limits_{s=1}^{s=n} i_s}.\theta_n,$$

$$\mu_{n+1}=a_{n+1}x^{i_{n+1}},\quad \mu'_{n+1}=i_{n+1}a_{n+1}x^{i_{n+1}-1},$$

затѣмъ

$$\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n=A_nx^{\sum\limits_{s=1}^{s=n} i_s}$$

и отсюда

$$\varphi'_{n-1}f_n+\varphi_{n-1}f'_n-f'_{n-1}\varphi_n-f_{n-1}\varphi'_n=\sum_{s=1}^{s=n} i_s.A_n.x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n} i_s-1},$$

то равенство (VI) принимаетъ видъ:

$$-A_{n+1}x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}(\Omega_{n+1}+\Omega_n)=-M\sum_{s=1}^{s=n} i_s.A_{n+1}x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}- -Mi_{n+1}A_{n+1}x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}+\lambda_{n+1}A_nx^{\sum\limits_{s=1}^{s=n} i_s}.\theta_n,$$

или, послѣ приведенія во второй части и раздѣленія обѣихъ частей на

$$-A_{n+1}x^{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s} = -\mu_{n+1}A_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s},$$

$$(\text{VII}) \ldots\ldots\ldots\ldots \Omega_{n+1}+\Omega_n=\frac{M}{x}\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s \frac{\lambda_{n+1}\theta_n}{\mu_{n+1}}.$$

Помножимъ теперь на f_{n+1} равенство (IV,a) и на f_n равенство, которое получится изъ равенства (IV,a), если увеличимъ единицей указателя n. Вычтя затѣмъ первый результатъ изъ втораго, получимъ:

$$M(f'_{n+1}f_n-f'_nf_{n+1})=(\Omega_{n+1}-\Omega_n)f_{n+1}f_n+P(\varphi_{n+1}f_n-f_{n+1}\varphi_n)+$$
$$+\theta_{n+1}f_n^2-\theta_nf_{n+1}f_{n-1}.$$

Замѣнивши $\varphi_{n+1}f_n-f_{n+1}\varphi_n$ чрезъ $-A_{n+1}x^{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}$, f_{n+1} и f'_{n+1} соотвѣтственно чрезъ $\lambda_{n+1}f_n-\mu_{n+1}f_{n-1}$ и $\lambda_{n+1}f'_n-\mu_{n+1}f'_{n-1}-$ $-\mu'_{n+1}f_{n-1}$, будемъ имѣть (послѣ приведенія):

$$M(\mu_{n+1}f'_nf_{n+1}-\mu_{n+1}f_nf'_{n-1}-\mu'_{n+1}f_nf_{n-1})=(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2-$$
$$-\mu_{n+1}\Omega_{n+1}f_nf_{n-1}+\mu_{n+1}\Omega_nf_nf_{n-1}-A_{n+1}x^{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}.P+\theta_{n+1}f_n^2-$$
$$-\theta_n\lambda_{n+1}f_nf_{n-1}+\theta_n\mu_{n+1}f_{n-1}^2.$$

Замѣнимъ $-\theta_n\lambda_{n+1}$ чрезъ $\mu_{n+1}\Omega_{n+1}+\mu_{n+1}\Omega_n-\mu_{n+1}\frac{M}{x}\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s$ (по формулѣ (VII)), Mf'_n и Mf'_{n-1} соотвѣтственно чрезъ $(\Omega_n+\frac{1}{2}N)f_n+P\varphi_n+\theta_nf_{n-1}$ и $(\Omega_{n-1}+\frac{1}{2}N)f_{n-1}+P\varphi_{n-1}+\theta_{n-1}f_{n-2}$ (по форм. (IV,a)); затѣмъ замѣнимъ $\mu_{n+1}(\varphi_{n-1}f_n-f_{n-1}\varphi_n)$ чрезъ $A_{n+1}x^{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}$. Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и сдѣлавши приведеніе, получимъ:

$$(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2+\mu_{n+1}(\Omega_n+\Omega_{n-1})f_nf_{n-1}-\mu_{n+1}\frac{M}{x}\left(\sum_{n=1}^{s=n+1}i_s\right)f_nf_{n-1}+$$

$$+\mu'_{n+1}Mf_nf_{n-1}+\theta_{n+1}f_n^2+\mu_{n+1}\theta_{n-1}f_nf_{n-2}=0.$$

Замѣнимъ теперь $\Omega_n+\Omega_{n-1}$ по форм. (VII) чрезъ $\frac{M}{x}\sum_{s=1}^{s=n}i_s-$

$-\frac{\lambda_n\theta_{n-1}}{\mu_n}$, послѣ чего будемъ имѣть:

$$(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2+\mu_{n+1}\frac{M}{x}\left(\sum_{s=1}^{s=n}i_s\right).f_nf_{n-1}-\mu_{n+1}\frac{\lambda_n\theta_{n-1}}{\mu_n}f_nf_{n-1}-$$

$$-\mu_{n+1}\frac{M}{x}\left(\sum_{s=1}^{s=n+1}i_s\right).f_nf_{n-1}+\mu'_{n+1}Mf_nf_{n-1}+\theta_{n+1}f_n^2+\mu_{n+1}\theta_{n-1}f_nf_{n-2}=0.$$

Такъ какъ

$$\mu'_{n+1}=i_{n+1}a_{n+1}x^{i_{n+1}-1}=i_{n+1}\frac{\mu_{n+1}}{x},$$

вслѣдствіе чего

$$\mu_{n+1}\frac{M}{x}\left(\sum_{s=1}^{s=n}i_s\right).f_nf_{n-1}-\mu_{n+1}\frac{M}{x}\left(\sum_{s=1}^{s=n+1}i_s\right)f_nf_{n-1}+\mu'_{n+1}Mf_nf_{n-1}=0,$$

и такъ какъ, въ силу соотношенія $f_n=\lambda_nf_{n-1}-\mu_nf_{n-2}$,

$$-\mu_{n+1}\frac{\lambda_n\theta_{n-1}}{\mu_n}f_nf_{n-1}+\mu_{n+1}\theta_{n-1}f_nf_{n-2}=-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}f_n(\lambda_nf_{n-1}-\mu_nf_{n-2})=$$

$$=-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}f_n^2,$$

то написанное выше равенство принимаетъ видъ:

$$(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}f_n^2+\theta_{n+1}f_n^2-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}f_n^2=0,$$

или, послѣ сокращенія на f_n^2,

$$\text{(VIII)}\ldots\ldots(\Omega_{n+1}-\Omega_n)\lambda_{n+1}+\theta_{n+1}-\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}\theta_{n-1}=0.$$

Примѣчаніе. Полученныя нами зависимости (VII) и (VIII) между цѣлыми ф-ціями Ω, θ и μ и постоянными числами λ соотвѣтствуютъ формуламъ (7) и (8) параграфа 1-го. Различіе между формулами (7) и (VII), (8) и (VIII) находится въ связи съ различными значеніями, которыя мы придаемъ теперь, и придавали въ § 1 λ и μ. Въ § 1 мы разсматривали λ, какъ цѣлыя ф-ціи x степени не ниже первой, а μ, — какъ постоянныя количества; теперь же λ разсматриваются нами, какъ постоянныя количества, и μ, — какъ раціональные одночлены степени не ниже 1 относительно x.

2. Тѣмъ-же путемъ, что и въ § 1, приходимъ къ слѣдующей леммѣ:

Если положимъ

$$V_n=(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)f_n-Mf'_n+P\varphi_n+\theta_n f_{n-1}$$

$$W_n=(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n-M\varphi'_n-Qf_n+\theta_n\varphi_{n-1},$$

при чемъ цѣлыя ф-ціи f_n, φ_n, θ_n. Ω_n, одночлены μ_n и постоянныя количества λ_n, соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ указателя n, удовлетворяютъ соотношеніямъ

$$(\mathrm{IX}, a)\ldots\ldots f_{n+1}-\lambda_{n+1}f_n+\mu_{n+1}f_{n-1}=0$$

$$(\mathrm{IX}, b)\ldots\ldots \varphi_{n+1}-\lambda_{n+1}\varphi_n+\mu_{n+1}\varphi_{n-1}=0$$

и формуламъ (VII) и (VIII), то между тремя многочленами V_{n+1}, V_n, V_{n-1} и между тремя многочленами W_{n+1}, W_n, W_{n-1} имѣютъ мѣсто соотношенія:

$$V_{n+1}-\lambda_{n+1}V_n+\mu_{n+1}V_{n-1}=0$$

$$W_{n+1}-\lambda_{n+1}W_n+\mu_{n+1}W_{n-1}=0$$

Положимъ теперь:

$f_0=1, \varphi_0=\lambda_0=$ постоянному члену разложенія y въ рядъ,

$$f_{-1}=0,\ \varphi_{-1}=1$$

$$f_{-2}=1,\ \varphi_{-2}=0$$

$$\theta_{-1}=-P,\ \theta_0=Q+N\varphi_0+P\varphi_0^2$$

$$\Omega_{-1}=\tfrac{1}{2}N,\ \Omega_0=-\tfrac{1}{2}N-P\varphi_0$$

$$\mu_0=-1$$

Эти значенія, какъ легко убѣдиться, удовлетворяютъ ур-іямъ (IV,a), (IV,b), (IX,a), (IX,b).

Опредѣлимъ, при помощи написанныхъ значеній θ_{-1}, θ_0, Ω_0 и μ_0, по формуламъ (VII) и (VIII) цѣлыя функціи Ω_n, θ_n и μ_n *) (для избранной системы постоянныхъ количествъ λ), переходя отъ нисшихъ указателей къ высшимъ, — послѣдовательнымъ путемъ; опредѣлимъ затѣмъ, пользуясь избранными λ, найденными μ и написанными выше значеніями f_{-1}, φ_{-1}, f_0 и φ_0, многочлены f_n и φ_n (для $n=1,2,3.....$) по формуламъ (IX,a) и (IX,b). На основаніи вышеуказанной леммы будемъ имѣть для всякаго значенія указателя n (начиная съ $n=0$):

$$V_{n+1}-\lambda_{n+1}V_n+\mu_{n+1}V_{n-1}=0$$

$$W_{n+1}-\lambda_{n+1}W_n+\mu_{n+1}W_{n-1}=0,$$

и такъ какъ

$$V_{-1}=V_0=0,\ W_{-1}=W_0=0,$$

то

$$V_1=V_2=\ldots=V_n=\ldots=0$$

$$W_1=W_2=\ldots=W_n=\ldots=0,$$

т. е. для всякаго n будемъ имѣть:

*) При этомъ μ_{n+1} и θ_n опредѣляемъ такъ, чтобы $q_n=\delta+i_{n+1}$, гдѣ q_n — нисшая степень x въ ф-ціи θ_n, δ — нисшая степень x въ разложеніи $M(x^{-1})+N+P(x)$, i_{n+1} — степень μ_{n+1} относительно x.

$$(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)f_n - Mf'_n + P\varphi_n + \theta_n f_{n-1} = 0$$

$$(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)\varphi_n - M\varphi'_n - Qf_n + \theta_n\varphi_{n-1} = 0.$$

Исключая изъ этихъ двухъ ур-ій Ω_n, находимъ:

$$(X) \ldots\ldots M(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) + N\varphi_n f_n + P\varphi_n^2 + Qf_n^2 = \theta_n(\varphi_{n-1}f_n - f_{n-1}\varphi_n)$$

Изъ ур-ій

$$f_n - \lambda_n f_{n-1} + \mu_n f_{n-2} = 0$$

$$\varphi_n - \lambda_n\varphi_{n-1} + \mu_n\varphi_{n-2} = 0$$

находимъ:

$$\varphi_{n-1}f_n - f_{n-1}\varphi_n = \mu_n(\varphi_{n-2}f_{n-1} - f_{n-2}\varphi_{n-1})$$

и слѣдовательно

$$\varphi_{n-1}f_n - f_{n-1}\varphi_n = \mu_1\mu_2\ldots\mu_n(\varphi_{-1}f_0 - f_{-1}\varphi_0) = \mu_1\mu_2\ldots\mu_n$$

Мы опредѣляемъ по формуламъ (VII) и (VIII) $\mu_1, \mu_2 \ldots\ldots$, какъ одночлены вида ax^i (причемъ i означаетъ число цѣлое и положительное). Положимъ, что мы нашли:

$$\mu_1 = a_1x^{i_1},\ \mu_2 = a_2x^{i_2}, \ldots\ldots \mu_n = a_nx^{i_n},\ \mu_{n+1} = a_{n+1}x^{i_{n+1}}, \ldots\ldots$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\varphi_{n-1}f_n - f_{n-1}\varphi_n = \mu_1\mu_2\ldots\mu_n = C_nx^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s},$$

$$\text{гдѣ } C_n = a_1a_2\ldots\ldots a_n.$$

Ур-іе (X) можетъ быть, слѣдовательно, представлено въ видѣ:

$$(XI) \ldots\ldots M(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) + N\varphi_n f_n + P\varphi_n^2 + Qf_n^2 = C_nx^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s}.\,\theta_n$$

Полагая теперь

$$y = \frac{\varphi_n}{f_n} + r_n$$

и вставляя это выраженіе для y въ ур-іе (I), находимъ:

$$M\frac{\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n}{f_n^2}+N\frac{\varphi_n}{f_n}+P\frac{\varphi_n^2}{f_n^2}+Q=-\left[M\frac{dr_n}{dx}+Nr_n+Pr_n\left(2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n\right)\right],$$

откуда, такъ какъ лѣвая часть равна $\frac{C_n x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n} i_s}\theta_n}{f_n^2}$ (въ силу ур. (XI)),

$$M\frac{dr_n}{dx}+Nr_n+Pr_n\left(2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n\right)=-\frac{C_n x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n} i_s}\theta_n}{f_n^2}$$

Такъ какъ

$$\frac{dr_n}{dx}=r_n(x^{-1})$$

и нисшая степень x въ разложеніи въ рядъ $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n$ равна τ*), — нисшей степени x въ разложеніи y, то находимъ:

---

*) Въ этомъ не трудно убѣдиться. Замѣчаемъ прежде всего, что $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=\frac{\varphi_n}{f_n}+y$. Если λ_0 не равно нулю, то нисшій членъ какъ въ разложеніи y, такъ и въ разложеніи $\frac{\varphi_n}{f_n}$ равенъ постоянному количеству λ_0. Въ этомъ случаѣ разложеніе въ рядъ ф-ціи $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=\frac{\varphi_n}{f_n}+y$ начинается также постоян. членомъ (равнымъ $2\lambda_0$). Если $\lambda_0=0$, то разложеніе въ рядъ (по восходящимъ степенямъ x) $\frac{\varphi_n}{f_n}$ начинается членомъ, равнымъ $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$. Пусть дѣйствительное разложеніе y въ непрерывную дробь будетъ

$$-\cfrac{\mu'_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu'_2}{\lambda_2-\cfrac{\mu'_3}{\lambda_3-\dots}}}$$

и слѣдовательно нисшій членъ въ разложеніи въ рядъ y будетъ равенъ $-\frac{\mu'_1}{\lambda_1}$. Если чрезъ i'_1 означимъ степень μ'_1 чрезъ q — нисшую степень x въ цѣлой ф-ціи Q, то должно существовать равенство $q=\delta+i'_1$. Дѣйствительно, такъ какъ

$$r_n[M(x^{-1})+N+P(x^\tau)]=-\frac{C_n x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s}\cdot\theta_n}{f_n^2}$$

Отсюда, означая нисшую степень x въ разложеніи въ рядъ r_n чрезъ ε_n, нисшую степень x въ разложеніи $M(x^{-1})+N+P(x^\tau)$ чрезъ δ и нисшую степень x въ ф-ціи θ_n—чрезъ q_n, получаемъ:

$$\varepsilon_n+\delta=\sum_{s=1}^{s=n} i_s+q_n,$$

нисшій членъ (по степени x) въ разложеніи y равенъ $-\frac{\mu'_1}{\lambda_1}$, то $y=\left(x^{i'_1}\right)$, $\frac{dy}{dx}=$ $=\left(x^{i'_1-1}\right)$, $y^2=\left(x^{2i'_1}\right)$. Вставивши эти выраженія для y, $\frac{dy}{dx}$ и y^2 въ ур-іе (I), будемъ имѣть:

$$M\left(x^{i'_1-1}\right)+N\left(x^{i'_1}\right)+P\left(x^{2i'_1}\right)=-Q,$$

или (если вынесемъ въ лѣвой части $x^{i'_1}$ за скобки)

$$x^{i'_1}\left[M\left(x^{-1}\right)+N\left(x^0\right)+P\left(x^{i'_1}\right)\right]=-Q$$

Такъ какъ нисшая степень x въ разложенія въ рядъ выраженія. стоящаго въ скобкахъ, равна δ, то слѣдовательно

$$i'_1+\delta=q.$$

Съ другой стороны мы опредѣляемъ μ_1 такъ, чтобы i_1 (степень μ_1) удовлетворяло ур-ію $q_0=\delta+i_1$, гдѣ q_0—нисшая степень x въ цѣлой ф-ціи $\theta_0=Q+$ $+N\gamma_0+P\gamma^2_0=Q$ (ибо мы разсматриваемъ случай, когда $\gamma_0=\lambda_0=0$); слѣдовательно $i'_1=i_1$. Итакъ разложенія по восходящимъ степенямъ x ф-цій $\frac{\varphi_n}{f_n}$ и y начинаются соотвѣтственно членами $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ и $-\frac{\mu'_1}{\lambda_1}$ одной и той-же степени относительно x. Эти члены не могутъ быть равными по величинѣ и противными по знаку (ибо μ_1 есть одночленъ степени $i_1=q_0-\delta$, *вообще* опредѣляемый изъ формулъ (VII) и (VIII), а μ'_1—одночленъ той-же степени, который долженъ удовлетворять тѣмъ-же формуламъ, и слѣдовательно μ'_1 либо совпадаетъ съ μ_1, либо представляетъ частное его значеніе); отсюда заключаемъ, что разложеніе (по восходящимъ степенямъ x) ф-ціи $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n=y+\frac{\varphi_n}{f_n}$ начинается членомъ, содержащимъ x въ степени i_1, также какъ и розложеніе y. Итакъ, будетъ-ли λ_0 отлично отъ нуля, или равно нулю, разложенія въ рядъ y и $2\frac{\varphi_n}{f_n}+r_n$ начинаются членами одной и той-же степени.

откуда

$$\varepsilon_n = \sum_{s=1}^{s=n} i_s + q_n - \delta.$$

Такъ какъ (см. выноску на стр. 44)

$$q_n - \delta = i_{n+1},$$

то

$$\varepsilon_n = \sum_{s=1}^{s=n+1} i_s$$

т. е.

$$r_n = \left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right),$$

и слѣдовательно

$$y - \frac{\varphi_n}{f_n} = \left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right),$$

откуда (замѣчая, что низшая степень x въ многочленѣ f_n равна 0) заключаемъ, что

$$(XII) \ldots\ldots\ldots y f_n - \varphi_n = \left(x^{\sum\limits_{s=1}^{s=n+1} i_s}\right).$$

Итакъ, найдя λ_0 = постоянному члену разложенія y въ рядъ и опредѣливши по формуламъ (VII) и (VIII) [при помощи написанныхъ выше значеній Ω_0, θ_{-1}, θ_0] систему одночленовъ $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$, соотвѣтствующую извѣстной системѣ постоянныхъ чиселъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$, получимъ непрерывную дробь

$$\sigma = \lambda_0 - \cfrac{\mu_1}{\lambda_1 - \cfrac{\mu_2}{\lambda_2 - \ddots - \cfrac{\mu_n}{\lambda_n - \ddots}}},$$

знаменатели и числители приближеній которой будутъ нахо-

диться съ ф-ціей y въ зависимости, выражаемой равенствомъ (XII). Изъ этого равенства слѣдуетъ, что, если положимъ

$$y=\lambda_0-\cfrac{\mu_1}{\lambda_1-\cfrac{\mu_2}{\lambda_2-\cdots-\cfrac{\mu_n}{\lambda_n-\cfrac{\mu_{n+1}}{u_{n+1}}}}},$$

то ф-ція $\frac{\mu_{n+1}}{u_{n+1}}$ должна обращаться въ нуль при $x=0$ *), и слѣдовательно непрерывная дробь σ совпадаетъ съ дѣйствительнымъ разложеніемъ y въ непрерывную дробь.

Такимъ образомъ, если найдена величина $\lambda_0=\varphi_0$ (помощью которой опредѣляются θ_0 и Ω_0), то формулы (VII) и (VIII) вполнѣ опредѣляютъ одночлены μ, а также многочлены θ и Ω, соотвѣтствующіе избранной системѣ постоянныхъ величинъ λ.

Доказавши что формулъ (VII) и (VIII) достаточно для опредѣленія непрерывной дроби (т. е. для опредѣленія какого угодно числа звеньевъ ея), въ которую разлагается ф-ція y, покажемъ, какимъ образомъ вопросъ о нахожденіи этой непрерывной дроби рѣшается на самомъ дѣлѣ, т. е. какимъ образомъ изъ формулъ (VII) и (VIII) опредѣляются $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots \mu_n \ldots\ldots$

---

*) Въ самомъ дѣлѣ, извѣстная формула

$$u_{n+1}=\mu_{n+1}\frac{yf_{n-1}-\varphi_{n-1}}{yf_n-\varphi_n}$$

даетъ намъ:

$$\frac{\mu_{n+1}}{u_{n+1}}=\frac{yf_n-\varphi_n}{yf_{n-1}-\varphi_{n-1}},$$

откуда находимъ (въ силу зависимости (XII)):

$$\frac{\mu_{n+1}}{u_{n+1}}=\left(x^{i_{n+1}}\right)$$

и слѣдовательно

$$\left(\frac{\mu_{n+1}}{u_{n+1}}\right)_{x=0}=0$$

Опредѣливши $\lambda_0 = \varphi_0 =$ постоянному члену разложенія y въ рядъ, находимъ значенія θ_{-1}, θ_0 и Ω_0, опредѣляемыя равенствами:

$$\theta_{-1} = -P, \quad \theta_0 = Q + N\varphi_0 + P\varphi_0^2, \quad \Omega_0 = -\tfrac{1}{2}N - P\varphi_0.$$

Ур-іе $q_n = \delta + i_{n+1}$ *) даетъ намъ i_1 (степень μ_1), такъ какъ q_0 (нисшая степень x въ ф-ціи θ_0)—извѣстно.

Вставивши въ форм. (VII) и (VIII) значенія θ_{-1}, θ_0 и Ω_0, положивши

$$\mu_0 = -1, \quad \mu_1 = a_1 x^{i_1},$$

гдѣ a_1—неопредѣленный коэффиціентъ, и выбравши для λ_1 извѣстное значеніе, опредѣлимъ изъ форм. (VII) Ω_1. Найденное выраженіе для Ω_1 (въ которое входитъ a_1) вставимъ въ формулу (VIII). Нъ основаніи вышесказаннаго, мы должны получить вполнѣ опредѣленную величину для a_1 (и такимъ образомъ будемъ имѣть $\mu_1 = a_1 x^{i_1}$), и, слѣдовательно, также вполнѣ опредѣленныя выраженія для Ω_1 и θ_1. Тѣмъ-же путемъ найдемъ μ_2, Ω_2, θ_2 и т. д.

Таковъ ходъ рѣшенія нашей задачи, примѣнимый *вообще*. Но въ большинствѣ случаевъ величина i_n (по крайней мѣрѣ, начиная съ нѣкотораго значенія указателя n) остается неизмѣнной, и формулы (VII) и (VIII) даютъ эту величину, также какъ и высшую степень x въ многочленахъ Ω и θ. Вводя въ формулы (VII) и (VIII) общія выраженія (съ неопредѣленными коэффиціентами) ф-цій Ω, θ μ, выбирая извѣстныя значенія для λ и уравнивая въ полученныхъ формулахъ коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x, получимъ общія соотношенія между коэффиціентами Ω, θ и μ; помощью этихъ соотношеній часто можно найти общія выраженія для Ω_n, θ_n и μ_n.

---

*) См. стр. 37 и выноску на стр. 44.

3. Дифференцируя ур-іе (III) и исключая A_n изъ полученнаго такимъ образомъ ур-ія и ур-ія (III), находимъ (послѣ сокращенія на $x^{\sum_{s=1}^{s=n} i_s - 1}$):

$$(XIII) \ldots [Mx(\varphi''_n f_n - f''_n \varphi_n) + M'x(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) + Nx\varphi'_n f_n + Nx\varphi_n f'_n +$$

$$+ N'x\varphi_n f_n + 2Px\varphi_n \varphi'_n + P'x\varphi^2_n + 2Qxf_n f'_n + Q'f^2_n x]\theta_n = [M(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) +$$

$$+ N\varphi_n f_n + P\varphi^2_n + Qf^2_n][\theta_n \sum_{s=1}^{s=n} i_s + x\theta'_n]$$

Перенесемъ въ правую часть равенства всѣ члены, не содержащіе ф-цій f_n, f'_n, f''_n, всѣ же остальные члены — въ лѣвую часть, и перемѣнимъ знаки; соединимъ затѣмъ въ лѣвой части всѣ члены, содержащіе f_n, и коэффиціентъ при f_n означимъ для краткости чрезъ G_n; послѣ того изъ остальныхъ членовъ лѣвой части соединимъ тѣ, которые содержатъ f'_n. Тогда ур-іе (XIII) приметъ видъ:

$$(XIV) \ldots Mx\theta_n \varphi_n f''_n + [(M'x - Nx - M\sum_{s=1}^{s=n} i_s)\theta_n - Mx\theta'_n]\varphi_n f'_n +$$

$$+ G_n f_n = 2Px\theta_n \varphi_n \varphi'_n + [P'x\theta_n - P\theta_n \sum_{s=1}^{s=n} i_s - Px\theta'_n]\varphi^2_n$$

Такъ какъ всѣ члены, кромѣ $G_n f_n$, содержатъ φ_n множителемъ и такъ-какъ φ_n и f_n — несократимы, то, очевидно, цѣлый многочленъ G_n долженъ также содержать φ_n множителемъ, т. е. долженъ имѣть видъ $K_n \varphi_n$, гдѣ K_n — цѣлая ф-ція. Вставивши въ ур-іе (XIV) $K_n \varphi_n$ вмѣсто G_n и сокративши затѣмъ ур-іе на φ_n, будемъ имѣть:

$$(XV) \ldots Mx\theta_n f''_n + [(M'x - M\sum_{s=1}^{s=n} i_s - Nx)\theta_n - Mx\theta'_n] f'_n +$$

$$+ K_n f_n = 2P\theta_n x\varphi'_n + [P'\theta_n x - P\theta \sum_{s=1}^{s=n} i_s - P\theta'_n x]\varphi_n$$

Подобнымъ-же образомъ найдемъ ур-іе:

$$(\mathrm{XVI})\ldots Mx\theta_n\varphi_n''+[(M'x-M\sum_{s=1}^{s=n}i_s+Nx)\theta_n-Mx\theta_n']\varphi_n'+$$
$$+L_n\varphi_n=-2Q\theta_n x f_n'-[Q'\theta_n x-Q\theta_n\sum_{s=1}^{s=n}i_s-Q\theta_n' x]f_n,$$

гдѣ L_n означаетъ цѣлую раціональную ф-цію.

Разсуждая совершенно такъ же, какъ въ § 1, найдемъ формулы, служащія для опредѣленія K_n и L_n:

$$(\mathrm{XVII})\ldots K_n=(\Omega_n+\tfrac{1}{2}N)(\theta_n\sum_{s=1}^{s=n}i_s+\theta_n' x)-\theta_n[(\Omega_n'+\tfrac{1}{2}N')x+S_n]$$

$$(\mathrm{XVIII})\ldots L_n=(\Omega_n-\tfrac{1}{2}N)(\theta_n\sum_{s=1}^{s=n}i_s+\theta_n' x)-\theta_n[(\Omega_n'-\tfrac{1}{2}N')x+S_n],$$

причемъ S_n—цѣлая функція, которая опредѣляется формулой:

$$(\mathrm{XIX})\ldots(\Omega_n^2-\tfrac{1}{4}N^2)x+PQx-\frac{\theta_n\theta_{n-1}}{\mu_n}x=MS_n.$$

Нетрудно убѣдиться помощью непосредственной подстановки (принимая во вниманіе найденныя соотношенія), что ф-ція

$$u_n=e^{\int\frac{N+Py}{M}dx}(yf_n-\varphi_n)$$

удовлетворяетъ дифференціальному ур-ію

$$(\mathrm{XX})\ldots Mx\theta_n\frac{d^2u}{dx^2}+[(M'x-M\sum_{s=1}^{s=n}i_s-Nx)\theta_n-Mx\theta_n']\frac{du}{dx}+\left(K_n+\frac{PQ\theta_n x}{M}\right)u=0.$$

а функція

$$z=e^{-\int\frac{N+Q\frac{1}{y}}{M}dx}\left(\frac{\varphi_n}{y}-f_n\right)$$

удовлетворяетъ дифференц. ур-ію

$$(\mathrm{XXI})\ldots Mx\theta_n\frac{d^2z}{dx^2}+[(M'x-M\sum_{s=1}^{s=n}i_s+Nx)\theta_n-Mx\theta_n']\frac{dz}{dx}+\left(L_n+\frac{PQ\theta_n x}{M}\right)z=0.$$

4. Если $P=0$, т. е. ур-іе, которому удовлетворяетъ ф-ція y, имѣетъ видъ

$$M\frac{dy}{dx}+Ny+Q=0,$$

то вторая часть ур-ія (XV) исчезаетъ. Въ этомъ случаѣ f_n и ф-ція $u_n=e^{\int\frac{N}{M}dx}(yf_n-\varphi_n)$ удовлетворяютъ одному и тому-же линейному дифференціальному ур-ію 2-го порядка безъ второй части:

$$M\theta_n x\frac{d^2u}{dx^2}+[(M'x-M\sum_{s=1}^{s=n}i_s-Nx)\theta_n-Mx\theta_n']\frac{du}{dx}+K_n u=0.$$

Если y удовлетворяетъ дифференц. ур-ію

$$M\frac{dy}{dx}+Ny+Py^2=0,$$

т. е. если $Q=0$, то исчезаетъ вторая часть ур-ія (XVI); въ этомъ случаѣ φ_n и ф-ція $z_n=e^{-\int\frac{N}{M}dx}\left(\frac{\varphi_n}{y}-f_n\right)$ удовлетворяютъ линейному дифференц. ур-ію 2-го порядка безъ второй части:

$$M\theta_n x\frac{d^2z}{dx^2}[(M'x-M\sum_{s=1}^{s=n}i_s+Nx)\theta_n-Mx\theta_n']\frac{dz}{dx}+L_n z=0.$$

Если, наконецъ, ф-ція y уговлетворяетъ дифференц. ур-ію

$$M\frac{dy}{dx}+Ny=0,$$

то какъ числители, такъ и знаменатели приближеній непрерывной дроби, въ которую разлагается y, удовлетворяютъ линейнымъ дифференціальнымъ ур-іямъ 2-го порядка безъ второй части.

§ 3.

Разсмотримъ, въ качествѣ примѣровъ, нѣсколько частныхъ случаевъ.

1. Разложимъ въ непрерывную дробь функцію y, опредѣляемую дифференц. ур-іемъ

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}+1=0.$$

Изъ этого ур-ія получаемъ два разложенія y въ рядъ: одно по восходящимъ, другое — по нисходящимъ степенямъ x; слѣдовательно для y могутъ быть получены непрерывныя дроби обоихъ разсмотрѣнныхъ нами видовъ. Мы ограничимся опредѣленіемъ непрерывной дроби, соотвѣтствующей разложенію y въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x. Итакъ мы воспользуемся формулами, найденными въ § 1.

Въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$M=x^2-1, \quad N=P=0, \quad Q=1.$$

Разлагая y въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x, находимъ:

$$c+x^{-1}+\tfrac{1}{3}x^{-3}+\ldots\ldots$$

Слѣдовательно

$$\lambda_0=\varphi_0=c$$

$$\theta_{-1}=-P=0, \quad \theta_0=Q+M\varphi_0'+N\varphi_0+P\varphi_0^2=1, \quad \Omega_0=-\tfrac{1}{2}N-P\varphi_0=0$$

Далѣе *)

$$\delta=1,$$

*) См. § 1, стр. 11.

и такъ какъ m_{n+1} не можетъ быть меньше 1, а ν_n меньше нуля, то изъ ур-ія

$$\nu_n+m_{n+1}=\delta=1$$

заключаемъ, что

$$m_{n+1}=1,$$

т. е. можно положить $\lambda_{n+1}=a_{n+1}x+b_{n+1}$, и

$$\nu_n=0,$$

т. е. $\theta_n=Const.$

Выбираемъ постоянныя числа μ такъ, чтобы

$$\mu_{n+1}=-\theta_n.$$

Далѣе можемъ положить*):

$$\Omega_n=nx+B_n$$

Формулы (7) и (8) даютъ намъ соотношенія:

$$(2n+1)x+B_{n+1}+B_n=a_{n+1}x+b_{n+1}$$

$$(x^2-1)a_{n+1}=(x+B_{n+1}-B_n)(a_{n+1}x+b_{n+1})+\theta_{n+1}-\theta_n \quad \text{для } n>0;$$

для $n=0$ послѣднее соотношеніе напишется такъ (въ виду того, что $\theta_{-1}=0$):

$$(x^2-1)a_1=(x+B_1-B_0)(a_1x+b_1)+\theta_1.$$

Изъ этихъ соотношеній получаемъ:

$$(1)\ldots\ldots a_{n+1}=2n+1$$

$$(2)\ldots\ldots B_{n+1}+B_n=b_{n+1}$$

$$(3)\ldots\ldots (B_{n+1}-B_n)a_{n+1}+b_{n+1}=0.$$

---

*) См. § 1, стр. 11.

$$(4)\ldots -a_{n+1}=(B_{n+1}-B_n)b_{n+1}+\theta_{n+1}-\theta_n \qquad \text{для } n>0,$$

и для $n=0$:

$$(5)\ldots -a_1=(B_1-B_0)b_1+\theta_1.$$

Сложивши равенства (2) и (3), вставивши $2n+1$, вмѣсто a_{n+1}, найдемъ:

$$(2n+2)B_{n+1}-2nB_n=0,$$

откуда

$$(6)\ldots B_{n+1}=\frac{n}{n+1}B_n$$

Такъ какъ $\Omega_0=0$, то слѣдовательно $B_0=0$; соотношеніе (6) показываетъ, что $B_1=0$, $B_2=0$ и вообще $B_n=0$.

Соотношеніе-же (2) и полученный только что результатъ показываютъ, что и $b_n=0$.

Изъ формулы (4) находимъ:

$$(7)\ldots \theta_{n+1}-\theta_n=-(2n+1) \qquad \text{для } n>0.$$

Положивъ $n=1$, получимъ

$$\theta_2=\theta_1-3.$$

Изъ соотношенія-же (5) находимъ:

$$\theta_1=-a_1=-1;$$

слѣдовательно

$$\theta_2=-4=-2^2$$

Положивши въ форм. (7) $n=2$, получимъ:

$$\theta_3=\theta_2-5=-9=-3^2$$

Легко видѣть, что вообще

$$(8)\ldots \theta_n=-n^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что формула (8) справедлива для $n=\nu-1$, т. е. имѣетъ мѣсто равенство

$$\theta_{\nu-1}=-(\nu-1)^2.$$

Полагая въ формулѣ (7) $n=\nu-1$, находимъ:

$$\theta_\nu=\theta_{\nu-1}-(2\nu-1)=-(\nu-1)^2-(2\nu-1)=-\nu^2,$$

т. е. формула (8) вѣрна и для $n=\nu$. Такъ какъ формула (8) оказалась уже справедливой для $n=1$, 2 и 3, то, въ виду только-что доказаннаго, она справедлива и для $n=4$, 5, 6 и т. д., т. е. для всякаго n.

Итакъ

$$\Omega_n=nx+B_n=nx$$

$$\lambda_{n+1}=a_{n+1}x+b_{n+1}=(2n+1)x$$

$$\mu_{n+1}=-\theta_n=n^2, \text{ при } \mu_1=-\theta_0=-1,$$

и слѣдовательно y разлагается въ непрерывную дробь:

$$c+\cfrac{1}{x-\cfrac{1^2}{3x-\cfrac{2^2}{5x-\cfrac{3^2}{7x-\cdots-\cfrac{(n-1)^2}{(2n-1)x-\cfrac{n^2}{(2n+1)x+\cdots}}}}}}$$

Посмотримъ, выражаетъ-ли эта безконечная непрерывная дробь ф-цію y, т. е. стремится-ли приближеніе

$$\frac{\varphi_n}{f_n}=c+\cfrac{1}{x-\cfrac{1^2}{3x-\cfrac{2^2}{5x-\cdots-\cfrac{(n-1)^2}{(2n-1)x}}}},$$

когда n безконечно возрастаетъ, къ ф-ціи y, какъ къ предѣлу.

Съ этой цѣлью найдемъ дифференціальное ур-іе, которому удовлетворяетъ знаменатель n-наго приближенія.

По формулѣ (25)*) § 1 находимъ:

$$S_n = n^2$$

и затѣмъ по форм. (26)

$$K_n = -n(n+1)\theta_n.$$

Такъ какъ $P=0$, то мы имѣемъ первый изъ случаевъ, разсмотрѣнныхъ въ 4-мъ членѣ § 1. Ур-іе (28,a) принимаетъ видъ:

$$(9) \ldots\ldots (x^2-1)\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} - n(n+1).u = 0$$

Этому ур-ію удовлетворяютъ знаменатель n-наго приближенія f_n и ф-ція $u_n = yf_n - \varphi_n$. Слѣдовательно общій интегралъ ур-ія (9) можетъ быть выраженъ такъ:

$$u = C_1 f_n + C_2 u_n.$$

Съ другой стороны извѣстно, что ф-ція Лежандра X_n удовлетворяетъ дифференц. ур-ію (9); поэтому при опредѣленныхъ значеніяхъ C_1' и C_2' произвольныхъ постоянныхъ C_1 и C_2 должно имѣть мѣсто равенство:

$$X_n = C_1' f_n + C_2' u_n.$$

Опредѣлимъ C_1' и C_2'. Функціи X_n и f_n — цѣлые многочлены степени n; ф-ція же u_n даетъ рядъ, расположенный по убывающимъ степенямъ x и начинающійся членомъ, содержащимъ x въ степени $-(n+1)$; слѣдовательно

$$C_2' = 0,$$

*) Этой формулой можно было-бы воспользоваться и для опредѣленія B_n и θ_n, что значительно сократило-бы вычисленія (см. примѣръ 2-й).

и мы имѣемъ просто

$$X_n = C'_1 f_n.$$

Приравнявъ другъ другу коэффиціенты при x^n въ обѣихъ частяхъ этого равенства, найдемъ C'_1. Коэффиціентъ при x^n въ ф-ціи X_n равенъ, какъ извѣстно,

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{1.2.3\ldots.\ n}.$$

Коэффиціентъ-же при x^n въ многочленѣ f_n равенъ

$$1.3.5\ldots..(2n-1),$$

что слѣдуетъ изъ закона образованія знаменателей приближеній (формула (4,a), стр. 8). Итакъ

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{1.2.3\ldots.\ n} = 1.3.5\ldots(2n-1).C'_1,$$

откуда

$$C'_1 = \frac{1}{1.2.3\ldots..n},$$

и слѣдовательно

$$f_n = 1.2.3\ldots.nX_n.$$

Легко видѣть, что, при возрастаніи n до ∞, f_n не имѣетъ конечнаго предѣла. Но мы покажемъ, что, когда n увеличивается до ∞, отношеніе $\frac{\varphi_n}{f_n}$ стремится къ конечному предѣлу, и именно къ функціи y, для всѣхъ значеній x, кромѣ тѣхъ дѣйствительныхъ значеній, которыхъ абсолютная величина <1.

Съ этой цѣлью введемъ новую перемѣнную z, положивши

$$z = x - \sqrt{x^2-1},$$

причемъ корню $\sqrt{x^2-1}$ будемъ придавать знакъ одинаковый

со знакомъ x. Для всякаго x, кромѣ дѣйствительныхъ его значеній, заключенныхъ между -1 и $+1$, $Mod(z)<1$ *).

Вводя перемѣнную z въ ур-іе (9), получимъ:

$$(10)\ldots z(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z^3\frac{du}{dz}-n(n+1)(1-z^2)u=0$$

Найдемъ общій интегралъ этого ур-ія; при этомъ значенія перемѣнной независимой будемъ ограничивать условіемъ $Mod(z)<1$. Положимъ:

$$u=z^k.v,$$

гдѣ k оставляемъ покуда неопредѣленнымъ.

Дифференцируя послѣднее равенство, находимъ:

$$\frac{du}{dz}=kz^{k-1}v+z_k\frac{dv}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=k(k-1)z^{k-2}v+2kz^{k-1}\frac{dv}{dz}+z^k\frac{d^2v}{dz^2}$$

Вставивши въ ур-іе (10) эти выраженія для ф-ціи u и ея производныхъ, найдемъ дифференціальное ур-іе, которому удовлетворяетъ v:

$$(11)\ldots\ldots z^{k+2}(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}+z^{k+1}[2k(1-z^2)-2z^2]\frac{dv}{dz}+$$

$$+z^k[k(k-1)(1-z^2)-2kz^2-n(n+1)(1-z^2)]v=0.$$

Выбираемъ k такъ, чтобы лѣвая часть этого ур-ія сокращалась на z^{k+1}, для чего коэффиціентъ при v долженъ дѣлиться на z^{k+1}, т. е. выраженіе

$$k(k-1)(1-z^2)-2kz^2-n(n+1)(1-z^2)$$

---

*) См Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, B. 1, 1878. стр. 40, 41, 49 и 50.

должно дѣлиться на z. Для этого же необходимо и достаточно, чтобы

$$k(k-1)-n(n+1)=0,$$

откуда находимъ для k два значенія: $n+1$ и $-n$.

Дадимъ сначала k первое изъ этихъ значеній; вставивши его въ ур-іе (11) сокративши послѣднее на z^{n+2}, найдемъ:

$$z(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}+[2n+2-(2n+4)z^2]\frac{dv}{dz}-2(n+1)z.v=0$$

Одинъ изъ интеграловъ этого ур-ія есть

$$v_1=F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, z^2)$$

для значеній z, удовлетворяющихъ условію $Mod(z)<1$; ибо въ этомъ случаѣ гипергеометрическій рядъ $F(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, z^2)$— сходящійся.

Мы слѣдовательно имѣемъ одинъ частный интегралъ ур-ія (10) для значеній z, входящихъ въ наше разсмотрѣніе:

$$u_1=z^{n+1}.\ F(\tfrac{1}{2}, n+1,\ n+\tfrac{3}{2}, z^2).$$

Другой частный интегралъ ур-ія (10) найдемъ тѣмъ-же путемъ. Положивши въ ур-іи (11) $k=-n$ и сокративши затѣмъ обѣ части ур-ія на z^{-n+1}, получимъ ур-іе:

$$z(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}+[2(n-1)z^2-2n]\frac{dv}{dz}+2nz.v=0.$$

Этому ур-ію удовлетворяетъ функція

$$v_2=F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2)$$

и слѣдовательно имѣемъ второй частный интегралъ ур-ія (10):

$$u_2=z^{-n}.\ F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2).$$

Итакъ для значеній z, удовлетворяющихъ условію $Mod(z)<1$, общій интегралъ ур-ія (10) можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$u=C_1 z.F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, z^2)+C_2 z^{-n}F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2).$$

Функціи f_n и $yf'_n-\varphi_n$ удовлетворяютъ ур-ію (9); разсматриваемыя, какъ ф-ціи z, онѣ представляютъ собою частныя рѣшенія ур-ія (10). Слѣдовательно, при опредѣленныхъ значеніяхъ C'_1 и C'_2, C''_1 и C''_2 произвольныхъ постоянныхъ C_1 и C_2, имѣютъ мѣсто равенства:

$$(a)\ldots.f_n=C'_1 z^{n+1}F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, z^2)+C'_2 z^{-n}F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2)$$

$$(b)\ldots yf'_n-\varphi_n=C''_1 z^{n+1}F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, z^2)+C''_2 z^{-n}F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2).$$

Опредѣлимъ C'_1, C'_2, C''_1 и C''_2. Обѣ части равенства (a) помножимъ на z^n; получимъ:

$$(c)\ldots.z^n f_n=C'_1 z^{2n+1}F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, z^2)+C'_2 F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2).$$

Легко видѣть, что функція, стоящая въ лѣвой части, есть цѣлый многочленъ степени $2n$ относительно z. Дѣйствительно, зависимость между перемѣнными z и x

$$z=x-\sqrt{x^2-1}$$

можно представить еще въ видѣ:

$$x=\frac{1+z^2}{2z}.$$

Слѣдовательно, введя z въ ф-цію f_n, которая представляетъ собою цѣлый многочленъ степени n относительно x, и помноживши полученный результатъ на z^n, будемъ имѣть цѣлый многочленъ степени $2n$ относительно z.

Функція $F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, z^2)$, стоящая въ правой части равенства (c), представляетъ собою рядъ безконечный; ф-ція же

$F(\frac{1}{2}, -n, \frac{1}{2}-n, z^2)$ есть цѣлый многочленъ степени $2n$ относительно z. Слѣдовательно $C'_1=0$, и такимъ образомъ мы имѣемъ:

$$(d) \ldots\ldots z^n f_n = C'_2 F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2).$$

Опредѣлимъ постоянные члены (не зависящіе отъ z) лѣвой и правой части равенства (a); приравнявъ ихъ другъ другу, найдемъ C'_2.

Замѣчая, что коэффиціентъ при x^n въ многочленѣ f_n равенъ $1.3.5\ldots(2n-1)$, не трудно видѣть, что, послѣ замѣны въ ф-ціи f_n перемѣнной x чрезъ $\dfrac{1+z^2}{2z}$ и помноженія ф-ціи f_n на z^n, постоянный членъ полученнаго такимъ образомъ результата будетъ

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}$$

Таковъ членъ лѣвой части равенства (d), не зависящій отъ z. Членъ-же правой части того-же равенства, не содержащій z, равенъ C'_2, ибо постоянный членъ многочлена $F(\frac{1}{2}, -n, \frac{1}{2}-n, z^2)$ равенъ 1. Итакъ

$$C'_2 = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}$$

и слѣдовательно

$$(12) \ldots\ldots f_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n} z^{-n} F(\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}-n, z^2)$$

Обращаясь къ равенству (b), замѣчаемъ*), что функція $yf_n - \varphi_n$ даетъ рядъ, расположенный по нисходящимъ степенямъ x и начинающійся членомъ, содержащимъ x въ степени $-(n+1)$; иначе говоря, $yf_n - \varphi_n$ даетъ рядъ, идущій по восходящимъ степенямъ $\dfrac{1}{x}$ и начинающійся членомъ, содержа-

*) См. § 1, ур. (d), стр. 4.

щимъ $\frac{1}{x}$ въ степени $n+1$. Замѣнивши $\frac{1}{x}$ чрезъ $\frac{2z}{1+z^2}$, получимъ рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ z и начинающійся членомъ, содержащимъ z въ степени $n+1$. Ф-ція $z^{n+1}F(\frac{1}{2}, n+1, n+\frac{3}{2}, z^2)$, стоящая въ правой части равенства (b), есть также рядъ, идущій по возрастающимъ степенямъ z и начинающійся членомъ, содержащимъ z въ степени $n+1$. Что же касается ф-ціи $z^{-n}F(\frac{1}{2}-n, \frac{1}{2}-n, z^2)$, то это есть рядъ (конечный), идущій по восходящимъ степенямъ z, но начинающійся членомъ, содержащимъ z въ степени $-n$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$C_2''=0,$$

и такимъ образомъ мы имѣемъ просто:

$$yf_n-\varphi_n=C_1''z^{n+1}F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, z^2).$$

Опредѣлимъ коэффиціентъ при z^{n+1} въ разложеніи въ рядъ ф-ціи $yf_n-\varphi_n$; C_1'' будетъ равно этому коэффиціенту. Съ этой цѣлью воспользуемся зависимостью *)

$$yf_n-\varphi_n=\frac{\mu_1\mu_2\ldots\ldots\mu_{n+1}}{y_1y_2\ldots\ldots y_{n+1}}.$$

Очевидно членъ, содержащій высшую степень x въ разложеніи въ рядъ (по нисходящимъ степенямъ) ф-ціи $y_1y_2\ldots y_{n+1}$, равенъ члену произведенія $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}$, содержащему высшую степень x, т. е. равенъ

$$1.3.5\ldots(2n+1)x^{n+1}.$$

Такъ какъ, далѣе,

$$\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n+1}=-1^2 2^2 3^2\ldots n^2,$$

---

*) См. § 1, стр. 3.

то изъ написанной выше зависимости слѣдуетъ, что членъ разложенія въ рядъ ф-ціи $y/'_n-\varphi_n$, содержащій высшую степень x, равенъ

$$\frac{1^2 2^2 3^2 \ldots\ldots n^2}{1.3.5\ldots(2n+1)}\cdot\frac{1}{x^{n+1}}$$

Отсюда-же заключаемъ, что разложеніе ф-ціи $y/_n-\varphi_n$ въ рядъ по восходящимъ степенямъ перемѣнной z начинается членомъ

$$\frac{2^{n+1}.1^2.2^2\ldots n^2}{1.3.5\ldots(2n+1)}z^{n+1}$$

Итакъ

$$C'_1=2^{n+1}\frac{1^2.2^2.3^2\ldots n^2}{1.3.5\ldots(2n+1)},$$

и слѣдовательно

$$(13)\quad \ldots y/_n-\varphi_n=2^{n+1}\frac{1^2.2^2.3^2\ldots n^2}{1.3.5\ldots(2n+1)}z^{n+1}.F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z^2).$$

Раздѣливши равенство (13) на равенство (12), получимъ:

$$(14)\ldots y-\frac{\varphi_n}{f_n}=2^{2n+1}\frac{1^2.2^2\ldots\ldots\ldots n^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}z^{2n+1}\frac{F(\frac{1}{2},n+1,n+\frac{3}{2}z^2)}{F(\frac{1}{2},-n,\frac{1}{2}-n,z^2)}.$$

Не трудно показать, что, при условіи, принятомъ нами:

$$Mod\ (z)<1,$$

правая часть равенства (14) стремится къ нулю, когда n возрастаетъ до ∞. Дѣйствительно,

$$lim\ F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z^2)_{n=\infty}=lim\ F(\tfrac{1}{2},-n,\tfrac{1}{2}-n,z^2)_{n=\infty}=(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Далѣе, по извѣстной формулѣ *Wallis*'a,

$$lim\left[\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}\right]_{n=\infty}=\frac{\pi}{2}$$

и слѣдовательно

$$lim\left[2^{2n+1}\frac{1^2.2^2.3^2.\dots\dots\dots\dots.n^2}{1^2.3^2.5\dots(2n-1)^2(2n+1)}\right]_{n=\infty}=\pi.$$

Наконецъ

$$lim\,(z^{2n+1})_{n=\infty}=0,$$

ибо $Mod(z)<1$.

Такимъ образомъ

$$lim\left(y-\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=0$$

или

$$lim\frac{\varphi_n}{f_n}=y$$

Мы пришли къ этому результату, ограничивая свои разсужденія условіемъ $Mod\,(z)<1$. Условіе это ограничиваетъ область значеній нашей первоначальной перемѣнной независимой x въ томъ смыслѣ, что изъ всѣхъ значеній, которыя можно придавать x, должны быть исключены дѣйствительныя значенія, содержащія между -1 и $+1$. Такимъ образомъ для всѣхъ значеній x, кромѣ значеній $-1\dots\dots+1$,

$$lim\frac{\varphi_n}{f_n}=y,$$

т. е. найденная нами непрерывная дробь — сходящаяся и выражаетъ собою ф-цію y.

2. Возьмемъ дифференціальное ур-іе

$$x^2\frac{dy}{dx}-hy+h=0.$$

Разлагая въ рядъ ф-цію y, удовлетворяющую этому ур-ію, находимъ:

$$c+h(1-c)x^{-1}-\frac{h^2}{2}(1-c)x^{-2}+\ldots,$$

гдѣ c — произвольная постоянная.

Такъ какъ для y получается рядъ, расположенный по убывающимъ степенямъ x, то для полученія разложенія y въ непрерывную дробь мы должны воспользоваться формулами, найденными въ § 1.

Итакъ, имѣемъ

$$M=x^2,\quad N=-h,\quad P=0,\quad Q=h,$$

и слѣдовательно

$$\delta=1,$$

$$\theta_n=Const.$$

и можно положить:

$$\lambda_n=a_n x+b_n$$

$$\Omega_n=nx+B_n.$$

Далѣе

$$\theta_{-1}=0,\quad \theta_0=h(1-c),\quad \Omega_0=\frac{h}{2}.$$

Полагая (для $n\geqq 0$)

$$\mu_{n+1}=-\theta_n$$

и примѣняя формулу (25) (стр. 29), будемъ имѣть:

$$n^2x^2+2nB_nx+B_n^2-\frac{h^2}{4}+\theta_n=x^2.S_n \qquad \text{для } n>0.$$

Отсюда (для $n>0$)

$$S_n=n^2$$

$$B_n=0$$

$$\theta_n=\frac{h^2}{4}$$

Формула (7) даетъ намъ (для $n>0$):

$$(2n+1)x=a_{n+1}x+b_{n+1},$$

т. е.

$$b_{n+1}=0$$

$$a_{n+1}=2n+1$$

Итакъ

$$\theta_n=\frac{h^2}{4},\ \Omega_n=nx,\ S_n=n^2,\ \mu_{n+1}=-\theta_n=-\frac{h^2}{4},\ \lambda_{n+1}=(2n+1)x$$

для $n>0$

Такъ какъ $\theta_0=h(1-c)$, то

$$\mu_1=-\theta_0=-h(1-c).$$

Далѣе $\Omega_0=\frac{h}{2}$, $\Omega_1=x$, и слѣдовательно по форм. (7) имѣемъ:

$$\lambda_1=x+\frac{h}{2}.$$

Такимъ образомъ y разлагается въ непрерывную дробь:

$$c+\cfrac{h(1-c)}{x+\frac{h}{2}+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{3x+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{5x+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{7x+\cdots}}}}$$

Для рѣшенія вопроса о сходимости этой непрерывной дроби найдемъ дифференц. ур-іе знаменателей приближеній.

По форм. (26) находимъ:

$$K_n=-n(n+1)\frac{h^2}{4},$$

и такимъ образомъ дифференц. ур-іе (28,a), которому удо-

удовлетворяютъ знаменатель f_n n-наго приближенія и функція $u_n = e^{\int \frac{N}{M} dx} (yf_n - \varphi_n) = e^{\frac{h}{x}} (yf_n - \varphi_n)$ принимаетъ видъ (послѣ сокращенія на $\frac{h^2}{4}$):

$$(\alpha) \ldots\ldots x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + (2x+h)\frac{du}{dx} - n(n+1)u = 0$$

Изъ этого ур-ія не трудно найти f_n и рядъ, представляющій разложеніе ф-ціи $e^{\frac{h}{x}}(yf_n - \varphi_n)$.

Такъ какъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ — первой степени, то f_n — многочленъ степени n. Полагая

$$f_n = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0,$$

найдемъ, при помощи ур-ія (α), зависимость между двумя послѣдовательными коэффиціентами A_{k+1} и A_k:

$$A_k = \frac{(k+1)h}{n(n+1) - k(k+1)} A_{k+1}.$$

Давая k значенія $n-1$, $n-2$, $n-3, \ldots$, получимъ:

$$A_{n-1} = \frac{nh}{2n} A_n = \tfrac{1}{2} h A_n$$

$$A_{n-2} = \frac{(n-1)h}{2(2n-1)} A_{n-1} = \frac{n(n-1)h^2}{1.2.2n(2n-1)} A_n$$

$$A_{n-3} = \frac{(n-2)h}{3(2n-2)} A_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)h^3}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} A_n.$$

....

$$A_{n-k} = \frac{n(n-1) \ldots\ldots (n-k+1)}{1.2 \ldots k.2n(2n-1)(2n-2) \ldots (2n-k+1)} A_n.$$

Такъ какъ членъ многочлена f_n, содержащій высшую степень x, равенъ высшему, по степени x, члену произведенія $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, то слѣдовательно

$$A_n = 1.3.5\ldots(2n-1).$$

Такимъ образомъ

$$(\beta)\ldots f_n = 1.3.5\ldots(2n-1)\Big[x^n + \frac{1}{2}hx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}h^2x^{n-2} + $$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}h^3x^{n-3} + \ldots\ldots +$$

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots k.2n(2n-1)\ldots(2n-k+1)}h^kx^{n-k} + \ldots\ldots\Big]$$

Изъ соотношенія

$$yf_n - \varphi_n = -\frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n+1}}{y_1y_2\ldots y_{n+1}}$$

слѣдуетъ, что ф-ція $yf_n - \varphi_n$ даетъ рядъ (расположенный по нисходящимъ степенямъ x), начинающійся членомъ

$$(\gamma)\ldots(-1)^n(1-c)\frac{h^{2n+1}}{2^{2n}1.3.5..(2n+1)}\cdot\frac{1}{x^{n+1}},$$

ибо высшій по степени x членъ разложенія въ рядъ произведенія $y_1y_2\ldots y_{n+1}$ есть высшій членъ произведенія $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}$.

Такъ какъ $e^{\frac{h}{x}}$ разлагается въ рядъ, идущій по убывающимъ степенямъ x и начинающійся постояннымъ членомъ, равнымъ 1, то слѣдовательно ф-ція $e^{\frac{h}{x}}(yf_n - \varphi_n)$ даетъ рядъ, также расположенный по нисходящимъ степенямъ x, начинающійся членомъ, равнымъ написанному выше выраженію (γ). Опредѣлимъ этотъ рядъ.

Полагая, что $e^{\frac{h}{x}}(yf_n - \varphi_n)$ разлагается въ рядъ

$$(\delta)\ldots\frac{B_{n+1}}{x^{n+1}}+\frac{B_{n+2}}{x^{n+2}}+\ldots+\frac{B_{n+k}}{x^{n+k}}+\ldots,$$

гдѣ $B_{n+1}=(-1)^n(1-c)\frac{h^{2n+1}}{2^{2n}1.3.5\ldots(2n+1)}$, находимъ изъ ур-ія (α) слѣдующую зависимость между двумя послѣдовательными коэффиціентами B_{n+k} и B_{n+k+1}:

$$B_{n+k+1}=\frac{(n+k)h}{(n+k)(n+k+1)-n(n+1)}B_{n+k}.$$

Полагая послѣдовательно $k=1,2,3,\ldots$, получимъ:

$$B_{n+2}=\frac{(n+1)h}{2n+2}B_{n+1}=\frac{1}{2}h\,B_{n+1}$$

$$B_{n+3}=\frac{(n+2)h}{2(2n+3)}B_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)h^2}{1.2(2n+2)(2n+3)}B_{n+1}$$

. . . .

$$B_{n+k+1}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)h^k}{1.2.3\ldots k(2n+2)(2n+3)\ldots(2n+k+1)}B_{n+1}.$$

Ясно, что рядъ (δ)—сходящійся для всякаго значенія x, и потому можемъ написать:

$$e^{\frac{h}{x}}(yf_n-\varphi_n)=\frac{B_{n+1}}{x^{n+1}}+\frac{B_{n+2}}{x^{n+2}}+\ldots+\frac{B_{n+k+1}}{x^{n+k+1}}+\ldots$$

или

$$(\varepsilon)\ldots e^{\frac{h}{x}}(yf_n-\varphi_n)=(-1)^n\frac{(1-c)h^{2n+1}}{2^{2n}1.3.5\ldots(2n+1)}\Bigg[\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{h}{x^{n+2}}+$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2(2n+2)(2n+3)}\frac{h^2}{x^{n+3}}+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k)}{1.2\ldots k(2n+2)(2n+3)\ldots(2n+k+1)}\frac{h^k}{x^{n+k+1}}+\ldots\Bigg]$$

Раздѣляя равенство (ε) на равенство (β), находимъ:

$$e^{\frac{h}{x}}\left(y-\frac{\varphi_n}{f_n}\right)=(-1)^n\frac{(1-c)h^{2n+1}}{2^{2n}1^2 3^2 5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}\times$$

$$\times\frac{\dfrac{1}{x^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{x^{n+2}}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2.(2n+2)(2n+3)}\dfrac{h^2}{x^{n+3}}+\ldots\ldots}{x^n+\dfrac{1}{2}hx^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}h^2x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots}$$

или

$$(\zeta)\ldots y-\frac{\varphi_n}{f_n}=\frac{(-1)^n(1-c)e^{-\frac{h}{x}}}{2^{2n}1^2 3^2 5^2\ldots(2n-1)^n(2n+1)}\left(\frac{h}{x}\right)^{2n+1}\times$$

$$\times\frac{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{x}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2(2n+2)(2n+3)}\dfrac{h^2}{x^2}+\ldots\ldots}{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{x}+\dfrac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\dfrac{h^2}{x^2}+\ldots\ldots\ldots}$$

Съ возрастаніемъ n до ∞ вторая часть этого равенства стремится къ нулю для всѣхъ значеній x (кромѣ $x=0$), ибо

$$lim\left(\frac{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{x}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2(2n+2)(2n+3)}\dfrac{h^2}{x^2}+\ldots}{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{x}+\dfrac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\dfrac{h^2}{x^2}+\ldots\ldots}\right)_{n=\infty}=\frac{e^{\frac{1}{2}\frac{h}{x}}}{e^{\frac{1}{2}\frac{h}{x}}}=1$$

и произведеніе

$$\frac{1}{2^{2n}1^2 3^2 5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}\left(\frac{h}{x}\right)^{2n+1}$$

при n безконечно большомъ есть, очевидно, величина безконечно малая, если только $x \gtrless 0$. Дѣйствительно, это произведеніе можно представить въ видѣ:

$$(\eta)\ldots\frac{h}{x}\cdot\frac{h}{2x}\cdot\frac{h}{2.3x}\cdot\frac{h}{2.3.x}\cdot\frac{h}{2.5x}\cdots\frac{h}{2(2k-1)x}\cdot\frac{h}{2(2k+1)x}\cdots\frac{h}{2(2n-1)x}\cdot\frac{h}{2(2n+1)x}$$

Каковы-бы ни были h и x (при томъ только условіи, чтобы $x \neq 0$) можно опредѣлить число k такъ, что будемъ имѣть неравенство:

$$Mod\left(\frac{h}{2(2k+1)x}\right)<q,$$

гдѣ q правильная дробь. Тогда тѣмъ болѣе

$$Mod\left(\frac{h}{2(2k+3)x}\right)<q$$

$$Mod\left(\frac{h}{2(2k+5)x}\right)<q$$

. . . .

и т. д.

Такимъ образомъ, если положимъ

$$Mod\left(\frac{h}{x}\cdot\frac{h}{2x}\cdot\frac{h}{2.3x}\cdot\frac{h}{2.3x}\cdot\frac{h}{2.5x}\cdots\frac{h}{2(2k-1)x}\cdot\frac{h}{2(2k-1)x}\right)=m,$$

причемъ m означаетъ величину конечную, то модуль произведенія (η) будетъ меньше $mq^{2n-2k+1}$, и слѣдовательно произведеніе (η) будетъ стремиться къ нулю съ возрастаніемъ n до ∞.

Итакъ для всякаго x, кромѣ $x=0$, вторая часть равенства (ζ) есть величина безконечно малая при n безконечно большомъ; другими словами.

$$lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=y,$$

и потому можно написать:

$$y=c+\cfrac{h(1-c)}{x+\cfrac{h}{2}+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{3x+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{5x+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{7x+\cdots}}}}$$

Въ конечномъ видѣ полный интегралъ взятаго нами дифференціальнаго ур-ія выражается ф-ціей $1+Ce^{-\frac{h}{x}}$. Слѣдовательно, при извѣстной зависимости между C и c, эта ф-ція должна быть равна найденной нами непрерывной дроби. Зависимость между C и c должна быть, очевидно, слѣдующая:

$$C=c-1,$$

и такимъ образомъ мы имѣемъ:

$$1+(c-1)e^{-\frac{h}{x}}=c+\cfrac{h(1-c)}{x+\frac{h}{2}+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{3x+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{5x+\cfrac{\frac{h^2}{4}}{7x+\ldots}}}}$$

Положивъ

$$c=2,\ h=-2,\ x=2,$$

найдемъ извѣстную формулу Эйлера:

$$\tfrac{1}{2}(e-1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}$$

3. Займемся разложеніемъ въ непрерывную дробь ф-ціи y, заданной дифференціальнымъ ур-іемъ

$$x(x^2-1)\frac{dy}{dx}-(x^2-1)y+x^2=0,$$

и именно найдемъ непрерывную дробь, соотвѣтствующую разложенію y въ рядъ по нисходящимъ степенямъ x:

$$cx+1+\tfrac{1}{3}x^{-2}+\ldots.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ:

$$\lambda_0=\varphi_0=cx+1$$

$$M=x(x^2-1),\quad N=-(x^2-1),\quad P=0,\quad Q=x^2$$

$$\theta_{-1}=-P=0.\ \theta_0=Q+M\varphi_0'+N\varphi_0+P\varphi_0^2=1,\ \Omega_0=-\tfrac{1}{2}N-P\varphi_0=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}$$

Высшая степень x въ многочленѣ Ω_n равна 2 (см. § 1, стр. 11), и потому можемъ положить:

$$\Omega_n=A_nx^2+B_nx+C_n;$$

при этомъ

$$A_0=\tfrac{1}{2},\quad B_0=0,\quad C_0=-\tfrac{1}{2}.$$

Далѣе, $\delta=2$, и слѣдовательно

$$m_{n+1}+\nu_n=\delta=2.$$

Такъ какъ $\theta_0=1$, т. е. $\nu_0=0$, то

$$m_1=2,$$

и потому нужно положить:

$$\lambda_1=a_1x^2+b_1x+c_1.$$

Нетрудно доказать, что вообще

$$\nu_n=0,$$

т. е. $\theta_n=Const$. Допустимъ съ этой цѣлью, что

$$\theta_r=Const,$$

гдѣ r означаетъ каждый изъ указателей k, $k-1\ldots 2, 1, 0$,

и докажемъ, что въ такомъ случаѣ и

$$\theta_{k+1}=Const.$$

Такъ какъ, согласно допущенію, $\theta_r = Const.$, то λ_{r+1} имѣетъ видъ $a_{r+1}x^2+b_{r+1}x+c_{r+1}$ при $a_{r+1}\gtrless 0$ (для $r=0,1,2,\ldots k$).

Формулы (7) и (8) параграфа 1 даютъ намъ соотношенія,

$$(1)\ldots(A_{r+1}+A_r)x^2+(B_{r+1}+B_r)x+C_{r+1}+C_r=-\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}(a_{r+1}x^2+b_{r+1}x+c_{r+1})$$

$$(2)\ldots x(x^2-1)(2a_{r+1}x+b_{r+1})=[(A_{r+1}-A_r)x^2+(B_{r+1}-B_r)x+$$
$$(C_{r+1}-C_r)](a_{r+1}x^2+b_{r+1}x+c_{r+1})+\theta_{r+1}-\frac{\mu_{r+1}}{\mu_r}\theta_{r+1}$$

Изъ этихъ соотношеній находимъ:

$$(3)\ldots A_{r+1}+A_r=-\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}a_{r+1}$$

$$(4)\ldots B_{r+1}+B_r=-\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}b_{r+1}$$

$$(5)\ldots 2a_{r+1}=(A_{r+1}-A_r)a_{r+1}$$

$$(6)\ldots b_{r+1}=(A_{r+1}-A_r)b_{r+1}+(B_{r+1}-B_r)a_{r+1}$$

Равенство (5) (такъ какъ $a_{r+1}\gtrless 0$) даетъ намъ:

$$A_{r+1}-A_r=2;$$

отсюда (для $r=0,1,\ldots k$)

$$A_{r+1}=A_0+2(r+1)=\tfrac{1}{2}+2(r+1).$$

Изъ соотношенія (3) находимъ:

$$-\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}a_{r+1}=4r+3.$$

Помноживши на $-\dfrac{\theta_r}{\mu_{r+1}}$ равенство (6) и замѣтивъ, что

$A_{r+1}-A_r=2;\ -\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}a_{r+1}=4r+3$, будемъ имѣть:

$$(7)\ldots.-\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}b_{r+1}=(4r+3)(B_{r+1}-B_r)$$

Исключая затѣмъ изъ ур-ій (4) и (7) $-\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}b_{r+1}$, находимъ:

$$(4r+2)B_{r+1}-(4r+4)B_r=0,$$

откуда

$$B_{r+1}=\frac{2r+2}{2r+1}B_r,$$

и такъ какъ B_0, то слѣдовательно $B_1=0$, $B_2=0$ и вообще

$$B_{r+1}=0;$$

отсюда-же и изъ соотношенія (7) слѣуетъ, что

$$b_{r+1}=0.$$

Такимъ образомъ соотношенія (1) и (2) принимаютъ видъ:

$$(1)'\ldots.(4r+3)x^2+C_{r+1}+C_r=(4r+3)x^2-\frac{\theta_r}{\mu_{r+1}}c_{r+1}$$

$$(2)'\ldots2a_{r+1}x^2(x^2-1)=(2x^2+C_{r+1}-C_r)(a_{r+1}x^2+c_{r+1})+\theta_{r+1}-\frac{\mu_{r+1}}{\mu_r}\theta_{r-1}$$

Эти соотношенія, въ силу сдѣланнаго допущенія, имѣютъ мѣсто для $r=0,1,2,\ldots k-1,k$. Полагаемъ $r=k$; тогда соотношеніе (2)$'$ напишется такъ:

$$2a_{k+1}x^2(x^2-1)=(2x^2+C_{k+1}-C_k)(a_{k+1}x^2+c_{k+1})+\theta_{k+1}-\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}\theta_{k-1}$$

Отсюда, замѣчая, что ν_{k+1}, степень θ_{k+1}, не можетъ быть выше 1 (ибо $\nu_{k+1}=\delta-m_{k+2}$, $\delta=2$, m_{k+2} не меньше 1), приходимъ къ заключенію, что

$$\theta_{k+1} = Const.$$

Итакъ, если $\theta_r = Const.$ для $r = 0, 1, \ldots k$, то это равенство справедливо и для $r = k+1$. Такъ какъ $\theta_0 = 1 = Const.$ и легко убѣдиться, что и $\theta_1 = Const.$, то слѣдовательно

$$\theta_2 = Const., \ \theta_3 = Const. \text{ и вообще } \theta_n = Const.$$

Таким образомъ вообще можно положить

$$\lambda_{n+1} = a_{n+1} x^2 + c_{n+1}$$

$$\Omega_n = (2n + \tfrac{1}{2}) x^2 + C_n ,$$

причемъ

$$-a_{n+1} \frac{\theta_n}{\mu_{n+1}} = 4n + 3.$$

До сихъ поръ мы не давали никакихъ опредѣленныхъ значеній постояннымъ величинамъ μ, которыми мы можемъ располагать по произволу. Выбираемъ теперь ихъ такъ, чтобы

$$a_{n+1} = 1$$

Тогда, въ силу написаннаго выше соотношенія, будемъ имѣть:

$$(8) \ldots . \theta_n = -(4n+3)\mu_{n+1}.$$

Остается такимъ образомъ найти C_n, c_{n+1} и μ_{n+1}. Вмѣсто того, чтобы опредѣлять эти постоянныя величины изъ соотношеній $(1)'$ и $(2)'$, обратимся къ формулѣ (25) параграфа 1-го, чтó значительно упроститъ дѣло. Вставивши въ эту формулу написанное выше выраженіе для Ω_n и замѣнивши θ_n и θ_{n-1} по формулѣ (8), находимъ:

$$(2n+\tfrac{1}{2})^2 x^4 + (4n+1) C_n x^2 + C_n^2 - \tfrac{1}{4}(x^4 - 2x^2 + 1) -$$

$$-(4n+3)(4n-1)\mu_{n+1} = x(x^2-1) S_n \qquad \text{для } n > 0.$$

Такъ какъ лѣвая часть не содержитъ нечетныхъ степеней x, то и правая часть не должна ихъ содержать, и слѣдовательно можно положить

$$S_n = R_n x.$$

Вставивши это выраженіе для S_n въ написанную формулу, найдемъ:

$$R_n = 2n(2n+1)$$

$$(4n+1)C_n + \tfrac{1}{2} = -R_n = -2n(2n+1)$$

$$C_n^2 - \tfrac{1}{4} - (4n-1)(4n+3)\,\mu_{n+1} = 0 \qquad \text{для } n>0$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ находимъ:

$$(9)\ldots\; C_n = -\frac{1}{2(4n+1)} - \frac{2n(2n+1)}{4n+1}$$

$$(4n-1)(4n+3)\mu_{n+1} = \left(C_n + \frac{1}{2}\right)\left(C_n - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2(4n+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} - \frac{2n(2n+1)}{4n+1}\right)\left(-\frac{1}{2(4n+1)} - \frac{1}{2} - \frac{2n(2n+1)}{4n+1}\right) = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n+1)^2},$$

откуда

$$(10)\;\ldots\; \mu_{n+1} = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)}$$

при

$$\mu_1 = -\frac{\theta_0}{3} = -\frac{1}{3}$$

Для опредѣленія c_{n+1} возьмемъ зависимость

$$C_{n+1} + C_n = (4n+3)\,c_{n+1},$$

которую получаемъ изъ соотношенія $(1)'$, полагая $r=n$ и замѣчая, что $-\dfrac{\theta_n}{\mu_{n+1}} = 4n+3.$

Вставляя сюда вмѣсто C_n и C_{n+1} значенія, даваемыя формулой (9), находимъ:

$$(4n+3)c_{n+1}=-\frac{1}{2(4n+5)}-\frac{1}{2(4n+1)}-\frac{(2n+2)(2n+3)}{4n+5}-\frac{2n(2n+1)}{4n+1}=$$

$$=-\frac{4n+3}{(4n+5)(4n+1)}-\frac{(2n+2)^2}{4n+5}-\frac{2n+2}{4n+5}-\frac{(2n+1)^2}{4n+1}+\frac{2n+1}{4n+1}=$$

$$=-\frac{(2n+2)^2}{4n+5}-\frac{(2n+1)^2}{4n+1}.$$

Отсюда

$$c_{n+1}=-\frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)}-\frac{(2n+2)^2}{(4n+3)(4n+5)}$$

и слѣдовательно

$$(11)\ldots\lambda_{n+1}=a_{n+1}x^2+c_{n+1}=x^2-\frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)}-\frac{(2n+2)^2}{(4n+3)(4n+5)}$$

Найденныя выраженія (10) и (11) для μ_{n+1} и λ_{n+1}, вмѣстѣ съ значеніями $\mu_1=-\frac{1}{3}$ и $\lambda_0=cx+1$, даютъ намъ разложеніе y въ непрерывную дробь:

$$cx+1+\cfrac{\frac{1}{3}}{x^2-\frac{1^2}{1.3}-\frac{2^2}{3.5}-\cfrac{\frac{2^2.3^2}{3.5.5.7}}{x^2-\frac{3^2}{5.7}-\frac{4^2}{7.9}-\cfrac{\frac{4^2.5^2}{7.9.9.11}}{x^2-\frac{5^2}{9.11}-\frac{6^2}{11.13}-\cdots}}}.$$

Найдемъ дифференціальное ур-іе знаменателей приближеній.

По форм. (26) параграфа 1-го находимъ [замѣчая, что $\theta_n=Const.$, $\Omega_n=(2n+\frac{1}{2})x^2+C_n$, $S_n=R_nx=2n(2n+1)x$]:

$$K_n=-\theta_n[2n(2n+1)x+(4n+1)x-x]=-\theta_n.2n(2n+3)x.$$

Такимъ образомъ ур-іе (28,a) которому удовлетворяетъ знаменатель n-наго приближенія, принимаетъ видъ (послѣ сокращенія на θ_n):

$$(12)\ldots x(x^2-1)\frac{d^2u}{dx^2}+(4x^2-2)\frac{du}{dx}-2n(2n+3)x.u=0$$

Этому же ур-ію удовлетворяетъ ф-ція

$$u_n=e^{\int\frac{N}{M}dx}(yf_n-\varphi_n)=e^{-\int\frac{dx}{x}}(yf_n-\varphi_n)=\frac{1}{x}(yf_n-\varphi_n)$$

и слѣдовательно ф-ція $U_n=yf_n-\varphi_n$ удовлетворяетъ ур-ію

$$(13)\ldots (x^2-1)\frac{d^2U}{dx^2}+2x\frac{dU}{dx}-[2n(2n+3)+2]U=0.$$

Если положимъ

$$x^2=\frac{1}{\xi},$$

то ур-ія (12) и (13) преобразуются въ слѣдующія:

$$(12)'\ldots 2\xi^2(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2}-\xi(1+\xi)\frac{du}{d\xi}-n(2n+3)u=0$$

$$(13)'\ldots 2\xi^2(1-\xi)\frac{d^2U}{d\xi^2}+\xi(1-3\xi)\frac{dU}{d\xi}-[n(2n+3)+1]U=0$$

Положимъ теперь

$$u=\xi^{-n}.v$$

$$U=\xi^{n+1}.V$$

Для v и V найдемъ дифференціальныя ур-ія:

$$(14)\ \ldots\xi(1-\xi)\frac{d^2v}{d\xi^2}+\left[\frac{4n-1}{2}\xi-\frac{4n+1}{2}\right]\frac{dv}{d\xi}-n\frac{2n+1}{2}v=0$$

$$(15) \ldots \xi(1-\xi)\frac{d^2V}{d\xi^2}+\left[\frac{4n+5}{2}-\frac{4n+7}{2}\xi\right]\frac{dV}{d\xi}-(n+1)\frac{2n+3}{2}V=0$$

Ур-ію (14) удовлетворяетъ ф-ція

$$v_1=F(-n,-n-\tfrac{1}{2},-2n-\tfrac{1}{2},\xi);$$

слѣдовательно ф-ція

$$u_1=\xi^{-n}F(-n,-n-\tfrac{1}{2},-2n-\tfrac{1}{2},\xi)=x^{2n}F(-n,-n-\tfrac{1}{2},-2n-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{x^2})$$

удовлетворяетъ ур-ію (12).

Полный интегралъ ур-ія (12) имѣетъ видъ:

$$u=C_1f_n+C_2u_n,$$

гдѣ f_n — цѣлый многочленъ степени $2n$ относительно x, а $u_n=\frac{1}{x}(yf_n-\varphi_n)$—ф-ція, дающая рядъ, расположенный по убывающимъ степенямъ x и начинающійся членомъ, содержащимъ x въ степени $-(2n+3)$. Отсюда (замѣчая, что ф-ція $u_1=x^{2n}F(-n,-n-\frac{1}{2},-2n-\frac{1}{2},\frac{1}{x^2})$—цѣлый многочленъ степени $2n$ относительно x) заключаемъ, что

$$x^{2n}F\left(-n,-n-\tfrac{1}{2},-2n-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{x^2}\right)=C_1'f_n.$$

Такъ какъ коэффиціентъ при x^{2n} въ многочленѣ f_n равенъ 1 (ибо всѣ λ имѣютъ видъ x^2+c), то заключаемъ, что

$$C_1'=1$$

и слѣдовательно

$$f_n=x^{2n}F\left(-n,-n-\tfrac{1}{2},-2n-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{x^2}\right).$$

Хотя полученный результатъ показываетъ, что при n безконечно большомъ f_n не стремится къ конечному предѣлу,

однако можно доказать, что отношеніе $\frac{\varphi_n}{f_n}$ имѣетъ конечный предѣлъ, когда n возрастаетъ безпредѣльно.

Введемъ съ этой цѣлью новую перемѣнную независимую.

Извѣстно, что для всѣхъ значеній x, кромѣ дѣйствительныхъ значеній, заключенныхъ между—1 и +1,

$$Mod\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)<1,$$

гдѣ $\sqrt{x^2-1}$ имѣетъ тотъ-же знакъ, что и x. Въ силу равенства

$$\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1,$$

для тѣхъ-же значеній x

$$Mod\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)>1$$

и слѣдовательно

$$Mod\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=Mod\left(\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)<1,$$

причемъ $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$ и 1 должны имѣть одинъ и тотъ-же знакъ,—иными словами, корень $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$ долженъ обращаться въ 1 при $x=\infty$.

Итакъ, если положимъ

$$z=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}},$$

то всякому значенію x, кромѣ дѣйствительныхъ значеній —1... ....+1, будетъ соотвѣтствовать величина z, удовлетворяющая условію $Mod(z)<1$. [Такъ какъ дѣйствительнымъ значеніямъ x, заключеннымъ между —1 и +1, соотвѣтствуютъ только дѣйствительныя значенія ξ, содержащіяся между +1 и

$+\infty$, то условіе $Mod(z)<1$ будетъ выполняться для всѣхъ значеній ξ, кромѣ значеній $+1\ldots\ldots+\infty$]. Связь между ξ и z можетъ быть выражена еще и въ другой формѣ. Изъ равенства

$$z=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}}$$

находимъ:

$$1+z=\frac{2}{1+\sqrt{1-\xi}};$$

слѣдовательно

$$\frac{4z}{(1+z)^2}=\xi$$

Вводя перемѣнную z въ ур-ія (14) и (15), получимъ:

$$(14)'\ldots\ldots 2z(1-z)(1+z)^2\frac{d^2v}{dz^2}+(1+z)[4z(2-z)+4(4n-1)z-$$

$$-(4n+1)(1+z)^2]\frac{dv}{dz}-4n(2n+1)(1-z)v=0$$

$$(15)'\ldots\ldots 2z(1-z)(1+z)^2\frac{d^2V}{dz^2}+(1+z)[4z(2-z)-4(4n+7)z+$$

$$+(4n+5)(1+z)^2]\frac{dV}{dz}-4(2n+3)(n+1)(1-z)V=0$$

Положивъ

$$(a)\ldots\ldots v=(1+z)^k w$$

$$(b)\ldots\ldots V=(1+z)^m.W,$$

гдѣ k и m — покуда неопредѣленныя числа, найдемъ, что w и W удовлетворяютъ ур-іямъ:

$$(16)\ldots\ldots 2z(1-z)(1+z)^{k+2}\frac{d^2w}{dz^2}+(1+z)^{k+1}[4kz(1-z)+$$

$$+4z(2-z)+4(4n-1)z-(4n+1)(1+z)^2]\frac{dw}{dz}+(1+z)^k[2k(k-1)z(1-z)+$$

$$+4kz(2-z)+4k(4n-1)z-k(4n+1)(1+z)^2-4n(2n+1)(1-z)]w=0$$

$$(17)\ldots\ 2z(1-z)(1+z)^{m+2}\frac{d^2W}{dz^2}+(1+z)^{m+1}[4mz(1-z)+$$
$$+4z(2-z)-4(4n+7)z+(4n+5)(1+z)^2]\frac{dW}{dz}+$$
$$+(1+z)^m[2m(m-1)z(1-z)+4mz(2-z)-4m(4n+7)z+$$
$$+m(4n+5)(1+z)^2-4(2n+3)(n+1)(1-z)]W=0.$$

Выбираемъ k и m такъ, чтобы первое изъ этихъ ур-ій сокращалось на $(1+z)^{k+1}$, второе—на $(1+z)^{m+1}$, для чего необходимо и достаточно, чтобы въ уравненіи (16) множитель при w, и въ уравненіи (17) множитель при W, стоящіе въ скобкахъ [ ], дѣлились на $1+z$ и слѣдовательно обращались въ нуль при $z=-1$. Вставивши въ названныя выраженія -1 вмѣсто z и приравнявъ нулю полученные результаты, найдемъ для k два значенія: $-2n$ и $-(2n+1)$, и для m два значенія: $2n+2$ и $2n+3$.

Полагаемъ $k=-(2n+1)$ и $m=2n+3$; тогда соотношенія (a) и (b) примутъ видъ:

$$v=(1+z)^{-(2n+1)}w$$

$$V=(1+z)^{2n+2}W.$$

Ур-іе (16), какъ оказывается, можно сократить на z^{-2n+1}, ур-іе же (17) сокращается на z^{2n+4}. Послѣ указанныхъ сокращеній, ур-ія эти напишутся такъ:

$$(18)\ldots\ 2z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+[(4n-1)z-(4n+1)]\frac{dw}{dz}+(2n+1)w=0$$

$$(19)\ldots\ 2z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2}+[(4n+7)+4n+5]\frac{dW}{dz}-(2n+2)W=0.$$

Ур-ію (18) удовлетворяетъ ф-ція

$$w_1=F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z),$$

а ур-ю (19) — ф-ція

$$W_1=F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z).$$

Слѣдовательно функціи

$$v_1=(1+z)^{-(2n+1)}.\,F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)$$

и

$$V_1=(1+z)^{2n+2}.\,F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)$$

удовлетворяютъ соотвѣтственно ур-іямъ (14)′ и (15)′, а также ур-іямъ (14) и (15) при условіи, что между ξ и z существуетъ вышеуказанная зависимость.

Далѣе, ф-ція

$$u_1=\xi^{-n}(1+z)^{-(2n+1)}F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)$$

удовлетворяетъ ур-ію (12)′ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, представляетъ собою одно изъ частныхъ рѣшеній ур-ія (12), если перемѣнныя x, ξ и z связаны между собою написанными выше ур-іями.

Ф-ція же

$$U_1=\xi^{n+1}(1+z)^{2n+2}.F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)$$

удовлетворяетъ ур-іямъ (13)′ и (13), и слѣдовательно

$$u_2=\frac{1}{x}\xi^{n+1}(1+z)^{2n+2}.F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)$$

есть другое частное рѣшеніе ур-ія (12).

Итакъ мы можемъ написать общій интегралъ ур-ія (12).

$$u=C_1u_1+C_2u_2=C_1\xi^{-n}(1+z)^{-(2n+1)}F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)+$$
$$+C_2\frac{1}{x}\xi^{n+1}(1+z)^{2n+2}F(\tfrac{1}{2},\,2n+2,\,2n+\tfrac{5}{2},z)\,,$$

или, если вмѣсто ξ внесемъ выраженіе $\dfrac{4z}{(1+z)^2}$:

$$u=C_1(4z)^{-n}(1+z)^{-1}F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)+$$
$$+C_2\frac{1}{x}(4z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z).$$

Такъ какъ ур-iю (12) удовлетворяютъ также ф-цiи f_n и $\frac{1}{x}(yf_n-\varphi_n)$, то, при извѣстныхъ значенiяхъ C_1' и C_2', C_1'' и C_2'' произвольныхъ постоянныхъ C_1 и C_2, должны имѣть мѣсто равенства:

$$(\alpha)\ldots f_n=C_1'(4z)^{-n}(1+z)^{-1}.F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)+$$
$$+C_2'\frac{1}{x}(4z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)$$

$$(\beta)\ldots \frac{1}{x}(yf_n-\varphi_n)=C_1''(4z)^{-n}(1+z)^{-1}.F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)+$$
$$+C_2''\frac{1}{x}(4z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)$$

Помноживши обѣ части равенства (α) на $(4z)^n(1+z)$, получимъ:

$$(\gamma)\ldots(4z)^n(1+z)f_n=C_1'F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)+$$
$$+C_2'\frac{1}{x}(4z)^{2n+1}(1+z)F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)$$

Такъ какъ

$$f_n=x^{2n}F(-n,-n-\tfrac{1}{2},-2n-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{x^2})$$

и

$$\frac{1}{x^2}=\xi=\frac{4z}{(1+z)^2},$$

то f_n въ ф-цiи z выразится слѣдующимъ образомъ:

$$f_n=\frac{(1+z)^{2n}}{(4z)^n}F\left(-n,-n-\tfrac{1}{2},-2n-\tfrac{1}{2},\frac{4z}{(1+z)^2}\right)$$

Отсюда же заключаемъ что выраженiе, стоящее въ лѣвой части равенства (γ) есть цѣлый многочленъ степени $2n+1$ относительно z. Замѣчая, что первый членъ правой части есть

также цѣлый многочленъ степени $2n+1$ относительно z, а второй членъ правой части выражается при помощи безконечнаго ряда, приходимъ къ заключенію, что $C_2^\nu=0$, и слѣдовательно

$$(4z)^{2n}(1+z)f_n=C_1^\nu F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z).$$

Постоянный (не содержащій z) членъ многочлена, стоящаго въ лѣвой части, равенъ 1; постоянный же членъ правой части равенъ C_1^ν; такимъ образомъ $C_1^\nu=1$ и слѣдовательно

$$(20)\ldots f_n=(4z)^{-n}(1+z)^{-1}.F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)$$

Помножимъ теперь обѣ части равенства (β) на x; получимъ

$$(\delta)\quad ..yf_n-\varphi_n=C_1^{\prime\nu}x(4z)^{-n}(1+z)^{-1}.F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)+$$
$$+C_2^{\prime\nu}(4z)^{n+1}.F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)$$

Изъ соотношенія

$$yf_n-\varphi_n=-\frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n+1}}{y_1.y_2\ldots y_{n+1}}$$

слѣдуетъ, что разложеніе $yf_n-\varphi_n$ въ рядъ по убывающимъ степенямъ x начинается членамъ

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2.3^2}{3.5.5.7}\cdot\frac{4^2.5^2}{7.9.9.11}\cdots\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)}x^{(2n+2)},$$

и слѣдовательно ф-ція $yf_n-\varphi_n$, стоящая въ лѣвой части равенства (δ), даетъ рядъ, идущій по восходящимъ степенямъ z и начинающійся членомъ

$$\frac{1}{3}\,\frac{2^2 3^2}{3.5.5.7}\cdot\frac{4^2 5^2}{7.9.9.11}\cdots\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)}(4z)^{n+1}$$

Что касается правой части равенства (δ), то, замѣчая, что

$$x(1+z)^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

заключаемъ, что первый членъ ея даетъ конечный рядъ

$$C_1'' \frac{1}{2\sqrt{z}}(4z)^{-n}F(\tfrac{1}{2}, -2n-1, -2n-\tfrac{1}{2}, z),$$

высшая степень z въ которомъ есть $n+\frac{1}{2}$; второй-же членъ правой части равенства (δ) представляетъ собою рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ z и начинающійся членомъ

$$C_1''(4z)^{n+1}.$$

Слѣдовательно

$$C_1''=0$$

$$C_2''=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2.3^2}{3.5.5.7}\cdot\frac{4^2.5^2}{7.9.9.11}\cdots\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)},$$

и такимъ образомъ

$$(21)\ldots y f_n - \varphi_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2.3^2}{3.5.5.7}\cdot\frac{4^2.5^2}{7.9.9.11}\cdots\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)}\times$$

$$\times(4z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2}, 2n+2, 2n+\tfrac{5}{2}, z)$$

Дѣля равенство (21) на равенство (20), получаемъ:

$$(22)\ldots y-\frac{\varphi_n}{f_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2.3^2}{3.5.5.7}\cdot\frac{4^2.5^2}{7.9.9\ 11}\cdots\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)}\times$$

$$\times(4z)^{2n+1}(1+z)\frac{F(\frac{1}{2}, 2n+2, 2n+\frac{5}{2}, z)}{F(\frac{1}{2}, -2n-1, -2n-\frac{1}{2}, z)}$$

Не трудно доказать, что правая часть равенства (22) имѣетъ предѣломъ нуль, когда n безконечно возрастаетъ, при условіи *Mod* $(z)<1$.

Дѣйствительно,

$$\lim F(\tfrac{1}{2},2n+2,2n+\tfrac{5}{2},z)_{n=\infty}=\lim F(\tfrac{1}{2},-2n-1,-2n-\tfrac{1}{2},z)_{n=\infty}=(1-z)^{-\frac{1}{2}};$$

далѣе

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2.3^2}{3.5.5.7}\cdot\frac{4^2.5^2}{7.9.9.11}\cdots\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)}(4z)^{2n+1}=$$

$$=\frac{2^2.4^2.6^2.8^2\ldots\ldots\ldots\ldots(4n)^2(4n+2)^2}{1^2.3^2.5^2.7^2\ldots(4n-1)^2(4n+1)^2(4n+3)}z^{2n+1};$$

и такъ какъ (см. стр. 65)

$$\lim\left[\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(4n)^2(4n+2)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots(4n-1)^2(4n+1)^2(4n+3)}\right]_{n=\infty}=\frac{\pi}{2},$$

то слѣдовательно

$$\lim\left[\frac{1}{3}\,\frac{2^2.3^2}{3.5.5.7}\,\frac{4^2.5^2}{7.9.9.11}\cdots\frac{(2n)^2(2n+1)^2}{(4n-1)(4n+1)(4n+1)(4n+3)}(4z)^{2n+1}\times\right.$$

$$\left.\times(1+z)\frac{F(\frac{1}{2},2n+2,2n+\frac{5}{2},z)}{F(\frac{1}{2},-2n-1,-2n-\frac{1}{2},z)}\right]_{n=\infty}=\frac{\pi}{2}(1+z)\lim(z^{2n+1})_{n=\infty}=0,$$

ибо, при условіи $Mod(z)<1$,

$$\lim(z^{2n+1})_{n=\infty}=0.$$

Итакъ въ предѣлѣ равенство (22) напишется такъ:

$$\lim\left(y-\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=0,$$

откуда

$$\lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=y$$

Равенство это имѣетъ мѣсто при условіи $Mod(z)<1$, т. е. для всѣхъ значеній x, кромѣ дѣйствительныхъ значеній, заключенныхъ между

-1 и $+1$ *). Такимъ образомъ можемъ, для указанныхъ значеній x, написать равенство

$$y=cx+1+\cfrac{\frac{1}{3}}{x^2-\frac{1.1}{1.3}-\frac{2.2}{3.5}-\cfrac{\frac{2.2.3.3}{5.7.7.9}}{x^2-\frac{3.3}{5.7}-\frac{4.4}{7.9}-\cdots}}$$

Примѣчаніе. Laguerre въ своемъ мемуарѣ, содержащемъ изложеніе метода, развитію котораго посвящена настоящая работа, означаетъ чрезъ Q_n цѣлую ф-цію, соотвѣтствующую нашей ф-ціи λ_{n+1}; исходя изъ недостаточно общаго опредѣленія знаменателей подходящихъ дробей, Laguerre полагаетъ, что вообще Q_n—цѣлая ф-ція первой степени. Послѣднее изъ полученныхъ нами разложеній, въ которомъ всѣ частные знаменатели λ—второй степени, обнаруживаетъ недостатокъ общности въ допущеніи Laguerre'а.

4. Возьмемъ теперь дифференціальное ур-іе

$$x^2\frac{dy}{dx}+y^2+1=0,$$

содержащее квадратъ опредѣляемой имъ ф-ціи.

Изъ этого ур-ія получаемъ два разложенія y въ рядъ:

$$(A)\ldots.c-(1+c^2)x^{-1}+c(1+c^2)x^{-2}+\ldots.$$
$$(B)\ldots.-x+\tfrac{1}{3}x^{-1}+\tfrac{1}{45}x^{-3}+\ldots.$$

Найдемъ сначала непрерывную дробь, соотвѣтствующую ряду (A). Итакъ полагаемъ:

$$\lambda_0=\varphi_0=c,$$

*) См. стр. 83.

$$M=x^2,\ N=0,\ P=Q=1,$$

$$\theta_{-1}=-P=-1,\ \theta_0=Q+M\varphi_0'+N\varphi_0+P\varphi_0^2=1+c^2,\ \Omega_0=-\tfrac{1}{2}N-P\varphi_0=-c,$$

$$\delta=1.$$

Изъ равенства

$$m_{n+1}+\nu_n=\delta=1$$

заключаемъ, что

$$m_{n+1}=1$$

$$\nu_n=0,$$

т. е. $\theta_n=Const.$ и λ_{n+1} имѣетъ видъ $a_{n+1}x+b_{n+1}$.

Полагая затѣмъ

$$\Omega_n=nx+\alpha_n$$

$$\mu_{n+1}=-\theta_n,$$

получимъ по формулѣ (25) (для $n>0$)

$$n^2x^2+2n\alpha_nx+\alpha_n^2+1+\theta_n=x^2S_n,$$

откуда

$$S_n=n^2$$

$$\alpha_n=0$$

$$\theta_n=-1.$$

Итакъ для $n>0$

$$\Omega_n=nx$$

$$\mu_{n+1}=-\theta_n=1;$$

для $n=0$ мы имѣемъ:

$$\Omega_0=-c$$

$$\mu_1=-\theta_0=-(1+c^2)$$

Формула (7) даетъ намъ затѣмъ

$$\lambda_{n+1}=(2n+1)x$$

при

$$\lambda_1=x-c$$

Такимъ образомъ ряду (A) соотвѣтствуетъ непрерывная дробь

$$(a) \ldots\ldots\ldots c+\cfrac{1+c^2}{x-c-\cfrac{1}{3x-\cfrac{1}{5x-\cfrac{1}{7x-\cdots}}}}$$

Найдемъ теперь непрерывную дробь, соотвѣтствующую ряду (B). Имѣемъ

$$\lambda_0=\varphi_0=-x,$$

$$\theta_{-1}=-P=-1,\ \theta_0=Q+M\varphi_0'+N\varphi_0+P\varphi_0^2=1,\ \Omega_0=-\tfrac{1}{2}N-P\varphi_0=x.$$

Далѣе

$$\delta=1$$

и слѣдовательно $\theta_n=Const.$ и λ_{n+1} имѣетъ видъ $a_{n+1}x+b_{n+1}$.

Положивъ

$$\Omega_n=(n+1)x+\alpha_n$$

$$\mu_{n+1}=-\theta_n,$$

найдемъ по формулѣ (25):

$$S_n=(n+1)^2$$

$$\alpha_n=0$$

$$\theta_n=-1 \qquad \text{для } n>0,$$

и слѣдовательно имѣемъ

$$\Omega_n=(n+1)x$$

$$\mu_{n+1}=-\theta_n=1$$

при

$$\mu_1=-\theta_0=-1.$$

Изъ формулы (7) затѣмъ находимъ

$$\lambda_{n+1}=(2n+3)\,x,$$

и такимъ образомъ получаемъ разложеніе

$$(b)\ldots\ldots\ldots -x+\cfrac{1}{3x-\cfrac{1}{5x-\cfrac{1}{7x-\cfrac{1}{9x-\ldots}}}},$$

соотвѣтствующее ряду (B).

Постараемся рѣшить вопросъ о сходимости непрерывныхъ дробей (a) и (b). Остановимся сначала на непрерывной дроби (a) и найдемъ дифференціальныя ур-ія, которымъ удовлетворяютъ числитель и знаменатель n-наго приближенія этой дроби.

Непрерывной дроби (a) соотвѣтствуютъ

$$\Omega_n=nx,\quad \theta_n=-1,\quad S_n=n^2.$$

По формуламъ (26) и (27) находимъ:

$$K_n=L_n=n(n+1),$$

и слѣдовательно ур-ія (15) и (16) принимаютъ видъ:

$$(1)\begin{cases} x^2f_n''+2xf_n'-n(n+1)f_n=2\varphi_n' \\ x^2\varphi_n''+2x\varphi_n'-n(n+1)\varphi_n=-2f_n' \end{cases}$$

Замѣчая, что f_n и φ_n—многочлены степени n относительно x, полагаемъ:

$$f_n=A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots.+A_{k+1}x^{k+1}+A_kx^k+\ldots.,$$

$$\varphi_n=B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\ldots.+B_{k+1}x^{k+1}+B_kx^k+\ldots.,$$

причемъ

$$A_n=1.3.5\ldots.(2n-1)$$

$$B_n=1.3\,5\ldots.(2n-1)c,$$

чтó слѣдуетъ изъ закона образованія знаменателей и числителей приближеній (формулы $(4,a)$ и $(4,b)$).

Изъ ур-ій (1) находимъ слѣдующія зависимости между коэффиціентами многочленовъ f_n и φ_n:

$$(2)\ldots(n+k+1)(k-n)A_k=2(k+1)B_{k+1}$$

$$(3)\ldots.(n+k+1)(k-n)B_k=-2(k+1)A_{k+1}.$$

Положивши $k=n-1$, найдемъ:

$$A_{n-1}=-B_n$$

$$B_{n-1}=A_n,$$

и слѣдовательно

$$A_{n-1}=-1.3.5\ldots.(2n-1)c$$

$$B_{n-1}=1.3.5\ldots.(2n-1).$$

Замѣнивши въ ур-іи (2) k на $k-1$ и исключивши изъ полученнаго такимъ образомъ ур-ія B_k при помощи ур-ія (3), получимъ:

$$(4)\ldots(n+k+1)(n+k)(n-k+1)(n-k)A_{k-1}=-2k(2k+2)A_{k+1}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$(5)\ldots(n+k+1)(n+k)(n-k+1)(n-k)B_{k-1}=-2k(2k+2)B_{k+1}.$$

Положивши $k=n-1$, получимъ изъ ур-ій (4) и (5):

$$A_{n-2}=-\frac{2n(2n-2)}{1.2.2n(2n-1)}A_n$$

$$B_{n-2}=-\frac{2n(2n-2)}{1.2.2n(2n-1)}B_n$$

Положивши $k=n-3$, найдемъ:

$$A_{n-4}=-\frac{(2n-4)(2n-6)}{3.4.(2n-2)(2n-3)}A_{n-2}=\frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}A_n$$

$$B_{n-4}=-\frac{(2n-4)(2n-6)}{3.4.(2n-2)(2n-3)}B_{n-2}=\frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}B_n.$$

Легко видѣть, что вообще

$$A_{n-2\nu}=(-1)^\nu\frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots.(2n-4\nu+2)}{1.2.3\ldots.2\nu.2n(2n-1)(2n-2)\ldots.(2n-2\nu+1)}A_n$$

$$B_{n-2\nu}=(-1)^\nu\frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots.(2n-4\nu+2)}{1.2.3\ldots.2\nu.2n(2n-1)(2n-2)\ldots.(2n-2\nu+1)}B_n$$

Точно также

$$A_{n-3}=-\frac{(2n-2)(2n-4)}{1.2.3.(2n-1)(2n-2)}A_{n-1}$$

$$A_{n-5}=\frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)(2n-8)}{1.2.3.4.5.(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}A_{n-1}$$

. . . .

$$A_{n-2\nu-1}=(-1)^\nu\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots.(2n-4\nu)}{1.2.3\ldots.(2\nu+1)(2n-1)(2n-2)\ldots.(2n-2\nu)}A_{n-1}$$

$$B_{n-3}=-\frac{(2n-2)(2n-4)}{1.2.3.(2n-1)(2n-2)}B_{n-1}$$

$$B_{n-5}=\frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)(2n-8)}{1.2.3.4.5.(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}B_{n-1}$$

....

$$B_{n-2\nu-1}=(-1)^{\nu}\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots\ldots\ldots(2n-4\nu)}{1.2.3\ldots(2\nu+1).(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2\nu)}B_{n-1}.$$

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе написанныя выше значенія A_n, A_{n-1}, B_n, B_{n-1}, будемъ имѣть:

$$f_n=1.3.5\ldots\ldots(2n-1).x^n\Bigg[1-\frac{2n(2n-2)}{1.2.2n(2n-1)}x^{-2}+$$

$$+\frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}x^{-4}-\ldots\ldots$$

$$-c\Big\{x^{-1}-\frac{(2n-2)(2n-4)}{1.2.3.(2n-1)(2n-2)}x^{-3}+$$

$$+\frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)(2n-8)}{1.2.3.4.5.(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}x^{-5}-\ldots\Big\}\Bigg]$$

$$\varphi_n=1.3.5\ldots(2n-1).x^n\Bigg[c\Big\{1-\frac{2n(2n-2)}{1.2.2n(2n-1)}x^{-2}+$$

$$+\frac{2n(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}x^{-4}-\ldots\ldots\Big\}+$$

$$+x^{-1}-\frac{(2n-2)(2n-4)}{1.2.3.(2n-1)(2n-2)}x^{-3}+$$

$$+\frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)(2n-8)}{1.2.3.4.5.(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)}x^{-5}-\ldots\Bigg].$$

Раздѣляя нижнее равенство на верхнее и переходя къ предѣлу, получаемъ:

$$lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=$$

$$=\frac{c\left[1-\frac{1}{1.2}x^{-2}+\frac{1}{1.2.3.4}x^{-4}-...\right]+\left[x^{-1}-\frac{1}{1.2.3}x^{-3}-\frac{1}{1.2.3.4.5}x^{-5}-...\right]}{\left[1-\frac{1}{1.2}x^{-2}+\frac{1}{1.2.3.4}x^{-4}-...\right]-c\left[x^{-1}-\frac{1}{1.2.3}x^{-3}+\frac{1}{1.2.3.4.5}x^{-5}-....\right]}$$

Для всѣхъ значеній x (кромѣ $x=0$) ряды, стоящіе въ скобкахъ [ ], сходящіеся и представляютъ собою $\mathrm{Cos}\frac{1}{x}$ и $\mathrm{Sin}\frac{1}{x}$. Такимъ образомъ

$$lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=\frac{c.\mathrm{Cos}\,\frac{1}{x}+\mathrm{Sin}\,\frac{1}{x}}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{x}-c.\mathrm{Sin}\,\frac{1}{x}}=\frac{c+\mathrm{tg}\frac{1}{x}}{1-c.\mathrm{tg}\frac{1}{x}},$$

или, если положимъ

$$c=\mathrm{tg}\,h,$$

$$lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=\mathrm{tg}(\tfrac{1}{x}+h).$$

Функція, стоящая въ правой части этого равенства, какъ легко убѣдиться, удовлетворяетъ взятому нами дифференціальному ур-ію и, такъ какъ содержитъ произвольную постоянную h, представляетъ собою полный интегралъ его. Полученный результатъ показываетъ, что для всякаго x, кромѣ $x=0$,

$$(a)'....y=\mathrm{tg}(\tfrac{1}{x}+h)=\mathrm{tg}h+\cfrac{1+\mathrm{tg}^2h}{x-\mathrm{tg}h-\cfrac{1}{3x-\cfrac{1}{5x-\cfrac{1}{7x-.}}}}$$

. . .

Положивши

$$h=0,$$

будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{3x-\cfrac{1}{5x-\cfrac{1}{7x-\ldots}}}}$$

и слѣдовательно

$$\operatorname{Cotg}\frac{1}{x}=x-\cfrac{1}{3x-\cfrac{1}{5x-\cfrac{1}{7x-\ldots}}}$$

Такимъ образомъ непрерывная дробь (b) — сходящая и равна $-\operatorname{Cotg}\frac{1}{x}$. [Эта послѣдняя функція представляетъ собою частное рѣшеніе нашего дифференціальнаго ур-ія; она получается изъ полнаго интеграла $\operatorname{tg}(\frac{1}{x}+h)$, если положимъ $h=\frac{\pi}{2}$. Для этого значенія постоянной h разложеніе $(a)'$ теряетъ смыслъ; вмѣсто него должно быть взято разложеніе (b)].

5. Въ разсмотрѣнныхъ примѣрахъ мы находили непрерывныя дроби, соотвѣтствующія рядамъ, идущимъ по убывающимъ степенямъ перемѣнной независимой. Остановимся теперь на нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ другаго рода, въ которыхъ функціямъ, разлагаемымъ въ непрерывныя дроби, будутъ соотвѣтствовать ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ перемѣнной независимой. При разсмотрѣніи этихъ частныхъ случаевъ мы воспользуемся формулами и уравненіями, найденными въ § 2.

Найдемъ прежде всего разложеніе въ непрерывную дробь интеграла дифференціальнаго ур-ія

$$\frac{dy}{dx}-y=0,$$

въ которомъ $M=1$, $N=-1$, $P=Q=0$.

Для y получаемъ рядъ

$$c+cx+\frac{c}{1.2}x^2+\ldots,$$

гдѣ c— произвольная постоянная.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\lambda_0=\varphi_0=c,$$

$$\theta_{-1}=-P=0\,,\ \theta_0=Q+N\varphi_0+P\varphi_0^2=-c,\ \Omega_0=-\tfrac{1}{2}N-P\varphi_0=\tfrac{1}{2}.$$

Далѣе (см. § 2, стр. 37 и выноску на стр. 44), $\delta=-1$, $q_0=0$ (такъ какъ $\theta_0=-c$), и, слѣдовательно, изъ ур-ія

$$q_0=\delta+i_1,$$

которое получаемъ изъ ур-ія $q_n=\delta+i_{n+1}$, полагая $n=0$, находимъ:

$$i_1=1.$$

Положивъ

$$\mu_1=a_1x,$$

получимъ по формулѣ (VII)

$$\Omega_1+\Omega_0=\frac{1}{x}+\frac{\lambda_1\,.\,c}{a_1x},$$

и такъ какъ лѣвая часть—цѣлая ф-ція, то необходимо, чтобы

$$\frac{1}{x}+\frac{\lambda_1\,.\,c}{a_1\,x}=0,$$

т. е.

$$\frac{\lambda_1 . c}{a_1} = -1.$$

Такимъ образомъ

$$\Omega_1 + \Omega_0 = 0,$$

$$\Omega_1 = -\Omega_0 = -\tfrac{1}{2}.$$

Формула (VIII), написанная для $n=0$, принимаетъ видъ:

$$-\lambda_1 + \theta_1 = 0,$$

откуда

$$\theta_1 = \lambda_1 = Const.$$

и слѣдовательно

$$q_1 = 0.$$

Ур-іе $q_1 = \delta + i_2$ показываетъ, что $i_2 = 1$, и потому можно положить $\mu_2 = a_2 x$. Вообще легко видѣть, что, если $\Omega_n = const.$, $\theta_n = Const.$, $\mu_n = a_n x$, то

$$\Omega_{n+1} = -\Omega_n = Const.,$$

$$\theta_{n+1} = Const.,$$

$$\mu_{n+2} = a_{n+2}\, x.$$

Такъ какъ указанныя условія выполняются для $n=1$, то слѣдовательно

$$\Omega_2 = -\Omega_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$\theta_2 = Const.$$

$$\mu_3 = a_3 x;$$

далѣе (такъ какъ видимъ, что условія выполняются и для $n=2$)

$$\Omega_3 = -\Omega_2 = -\tfrac{1}{2}$$

$$\theta_3 = Const.$$

$$\mu_4 = a_4 x,$$

и вообще

$$\Omega_n=(-1)^n.\frac{1}{2}$$

$$\theta_n=Const.$$

$$\mu_{n+1}=a_{n+1}x,\text{ т. е. } i_{n+1}=1.$$

Полагая

$$\lambda_n=1$$

и вставляя написанныя выше выраженія для Ω_n и μ_{n+1} въ формулы (VII) и (VIII), находимъ:

$$(\alpha)\ldots.0=\frac{n+1}{x}-\frac{\theta_n}{a_{n+1}x}$$

$$(\beta)\ldots.(-1)^{n+1}+\theta_{n+1}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\theta_{n-1}=0$$

Изъ соотношенія (α) получаемъ:

$$(\gamma)\ldots\ldots\frac{\theta_n}{a_{n+1}}=n+1,$$

и такимъ образомъ соотношеніе (β) принимаетъ видъ:

$$(-1)^{n+1}+\theta_{n+1}-\frac{n}{n+1}\theta_n=0,$$

откуда

$$(n+1)\theta_{n+1}=n\theta_n+(-1)^n(n+1).$$

По этой формулѣ пишемъ рядъ равенствъ:

$$2\nu.\theta_{2\nu}=(2\nu-1)\theta_{2\nu-1}-2\nu$$

$$(2\nu-1)\theta_{2\nu-1}=(2\nu-2)\theta_{2\nu-2}+2\nu-1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2\theta_2=\theta_1-2$$

и наконецъ (что слѣдуетъ и изъ найденнаго раньше равенства $\theta_1=\lambda_1$)

$$\theta_1=\lambda_1.$$

Складывая всѣ эти равенства, находимъ:

$$2\nu.\theta_{2\nu}=-\nu,$$

откуда

$$\theta_{2\nu}=-\tfrac{1}{2}.$$

Складывая-же всѣ написанныя равенства, кромѣ перваго, получаемъ:

$$(2\nu-1)\,\theta_{2\nu-1}=\nu,$$

откуда

$$\theta_{2\nu-1}=\frac{\nu}{2\nu-1}.$$

По формулѣ (γ) имѣемъ:

$$a_{2\nu}=\frac{\theta_{2\nu-1}}{2\nu}=\frac{1}{2(2\nu-1)},$$

$$a_{2\nu-1}=\frac{\theta_{2\nu-2}}{2\nu-1}=-\frac{1}{2(2\nu-1)},$$

при

$$a_1=\theta_0=-c,$$

и слѣдовательно

$$\mu_{2\nu}=\frac{1}{2\nu-1}\cdot\frac{x}{2},$$

$$\mu_{2\nu-1}=-\frac{1}{2\nu-1}\cdot\frac{x}{2},\ \text{причемъ}\ \mu_1=-cx.$$

Такимъ образомъ y разлагается въ непрерывную дробь

$$c+\cfrac{cx}{1-\cfrac{\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{2}}{1+\ldots}}}}}}$$

По формулѣ (XIX) находимъ:

$$S_n=-n.\theta_n$$

и затѣмъ по формуламъ (XVII) и (XVIII):

$$K_n=n\theta_n[(-1)^n.\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}]+n\theta_n^2$$

$$L_n=n\theta_n[(-1)^n.\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}]+n\theta_n^2.$$

Такимъ образомъ

$$K_{2\nu}=2\nu.\theta_{2\nu}^2=2\nu.\theta_{2\nu}.\theta_{2\nu}=-\nu.\theta_{2\nu}$$

$$K_{2\nu-1}=(2\nu-1)\theta_{2\nu-1}^2-(2\nu-1)\theta_{2\nu-1}=(2\nu-1)\theta_{2\nu-1}(\theta_{2\nu-1}-1)=-(\nu-1)\theta_{2\nu-1}$$

$$L_{2\nu}=2\nu.\theta_{2\nu}+2\nu.\theta_{2\nu}^2=2\nu\,.\,\theta_{2\nu}(\theta_{2\nu}+1)=\nu.\theta_{2\nu}$$

$$L_{2\nu-1}=(2\nu-1)\theta_{2\nu-1}^2=(2\nu-1)\theta_{2\nu-1}\,\theta_{2\nu-1}=\nu.\theta_{2\nu-1}\,.$$

Ур-ія (XV) и (XVI) для $n=2\nu$ и $n=2n-1$ принимаютъ видъ:

$$(\text{I})\ldots.xf''_{2\nu}+(x-2\nu)f'_{2\nu}-\nu.f_{2\nu}=0$$

$$(\text{II})\ldots.xf''_{2\nu-1}+(x-2\nu+1)f'_{2\nu-1}-(\nu-1)f_{2\nu-1}=0$$

$$(\text{III})\ldots.x\varphi''_{2\nu}-(x+2\nu)\varphi'_{2\nu}+\nu.\,\varphi_{2\nu}=0$$

$$(\text{IV})\ldots.x\varphi''_{2\nu-1}-(x+2\nu-1)\varphi'_{2\nu-1}+\nu.\,\varphi_{2\nu-1}=0.$$

Эти ур-iя даютъ возможность найти асимптотическiя выраженiя для знаменателей и числителей приближенiй, т. е. тѣ предѣлы, къ которымъ они стремятся съ возрастанiемъ указателя до безконечности.

Замѣчая, что постоянный членъ многочлена f_n равенъ 1 (ибо всѣ λ равны 1), постоянный же членъ φ_n равенъ c, находимъ изъ ур-iй (I), (II), (III) и (IV) слѣдующiя выраженiя для знаменателей и числителей приближенiй:

$$f_{2\nu}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu-1}{1.2(2\nu-1)}x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3(2\nu-1)(2\nu-2)}x^3+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\frac{1}{2}\frac{(\nu-1)(\nu-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\nu-k+1)}{1.2\ldots k(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(2\nu-k+1)}x^k+\ldots\ldots$$

$$f_{2\nu-1}=1-\frac{\nu-1}{2\nu-1}x+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.(2\nu-1)(2\nu-2)}x^2-\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3(2\nu-1)(2\nu-2)(2\nu-3)}x^3+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\frac{(\nu-1)(\nu-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(\nu-k)}{1.2.\ldots k(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(2\nu-k)}x^k+\ldots$$

$$\varphi_{2\nu}=c\Big[1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu-1}{1.2(2\nu-1)}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3(2\nu-1)(2\nu-2)}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2}\frac{(\nu-1)(\nu-2)\ldots\ldots(\nu-k+1)}{1.2\ldots k(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(2\nu-k+1)}x^k+\ldots\ldots\Big]$$

$$\varphi_{2\nu-1}=c\Big[1+\frac{\nu}{2\nu-1}x+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2(2\nu-1)(2\nu-2)}x^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3(2\nu-1)(2\nu-2)(2\nu-3)}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\nu(\nu-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(\nu-k+1)}{1.2.\ldots k(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(2\nu-k)}x^k+\ldots\Big]$$

Отсюда получаемъ:

$$(\text{V})\ldots\ldots\ lim(f_{2\nu})_{\nu=\infty}=lim(f_{2\nu-1})_{\nu=\infty}=1-\frac{x}{2}+$$

$$+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+(-1)^k\frac{1}{1.2\ldots k}\left(\frac{x}{2}\right)^k+\ldots\ldots$$

$$(\text{VI})\ldots lim(\varphi_{2\nu})_{\nu=\infty}=lim(\varphi_{2\nu-1})_{\nu=\infty}=c\left[1+\frac{x}{2}+\frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots k}\left(\frac{x}{2}\right)^k+\ldots\ldots\right]$$

Рядъ, стоящій въ правой части равенства (V), для всякаго x — сходящійся и равенъ $e^{-\frac{x}{2}}$. Рядъ, стоящій въ правой части равенства (VI) въ скобкахъ, также сходящійся при всякомъ значеніи x и равенъ $e^{\frac{x}{2}}$. Слѣдовательно

$$lim\left(\frac{\varphi_{2\nu}}{f_{2\nu}}\right)_{\nu=\infty}=lim\left(\frac{\varphi_{2\nu-1}}{f_{2\nu-1}}\right)_{\nu=\infty}=\frac{ce^{\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}}=ce^x.$$

Функція ce^x представляетъ собою полный интегралъ взятаго нами дифференціальнаго ур-ія. Полученный результатъ показываетъ, что можемъ написать равенство, которое будетъ имѣть мѣсто для всякаго x:

$$y=ce^x=c+\cfrac{cx}{1-\cfrac{\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1+\cdots}}}}}}$$

6. Пусть дано ур-іе

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}-1=0$$

и слѣдовательно

$$M=x^2+1,\quad N=P=0,\quad Q=-1.$$

Разлагая y въ рядъ по восходящимъ степенямъ x, находимъ:

$$c+x-\frac{1}{3}x^3+\ldots.$$

Итакъ

$$\lambda_0=\varphi_0=c$$

$$\theta_{-1}=-P=0,\quad \theta_0=Q+N\varphi_0+P\varphi_0^2=-1,\quad \Omega_0=-\frac{1}{2}N-P\varphi_0=0$$

Такъ какъ $\delta=-1$, $q_0=0$, то изъ ур-ія (см. выноску на стр. 44)

$$q_0=\delta+i_1$$

находимъ:

$$i_1=1.$$

Положивъ

$$\mu_1=a_1x,\qquad \lambda_1=1,$$

и вставивши въ форм. (VII) написанныя значенія Ω_0, θ_0, μ_1 и λ_1 будемъ имѣть:

$$\Omega_1=\frac{x^2+1}{x}+\frac{1}{a_1x}$$

Такъ какъ Ω_1 — цѣлая ф-ція, то заключаемъ, что

$$\Omega_1=x,$$

$$\frac{1}{a_1}+1=0$$

и слѣдовательно

$$a_1=-1,\ \mu_1=a_1x=-x.$$

Положивъ въ формулѣ (VIII) $n=0$ и вставивши значенія λ_1, Ω_1, Ω_0 и θ_{-1}, находимъ:

$$\theta_1 = -x,$$

т. е. $q_1=1$. Такимъ образомъ изъ ур-ія $q_1=\delta+i_2$, находимъ $i_2=2$. Положивъ

$$\mu_2=a_2x^2, \quad \lambda_2=1,$$

получаемъ по формулѣ (VII):

$$\Omega_2+\Omega_1=3\frac{x^2+1}{x}+\frac{1}{a_2x}$$

Такъ какъ лѣвая часть написаннаго равенства — цѣлая ф-ція, то необходимо, чтобы

$$3+\frac{1}{a_2}=0,$$

откуда

$$a_2=-\tfrac{1}{3}, \quad \mu_2=a_2x^2=-\tfrac{1}{3}x^2,$$

и слѣдовательно

$$\Omega_2+\Omega_1=3x,$$

$$\Omega_2=3x-\Omega_1=2x.$$

Изъ формулы (VIII) находимъ, что

$$\theta_2=-\frac{4}{3}x$$

Легко видѣть, что вообще можно положить для $n>0$:

$$\theta_n=a_nx$$

$$\mu_{n+1}=a_{n+1}x^2$$

$$\Omega_n=A_nx$$

при

$$\theta_0=-1\,,\ \mu_1=-x\,,\ \Omega_0=0.$$

Внеся въ формулу (VII) написанныя выраженія для θ_n, μ_{n+1} и Ω_n и положивъ

$$\lambda_{n+1}=1$$

будемъ имѣть:

$$(A_{n+1}+A_n)x=(2n+1)\frac{x^2+1}{x}-\frac{a_n}{a_{n+1}x},$$

откуда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=2n+1$$

$$A_{n+1}+A_n=2n+1.$$

Изъ послѣдняго равенства находимъ:

$$A_3=5-A_2=3$$

$$A_4=7-A_3=4$$

и вообще

$$A_n=n.$$

Слѣдовательно

$$\Omega_n=nx.$$

Съ цѣлью упростить вычисленія, воспользуемся формулой (XIX). По этой формулѣ (принимая во вниманіе, что, въ силу найденной выше зависимости, $\frac{a_{n-1}}{a_n}=2n-1$) получаемъ:

$$n^2x^3-(2n-1)a_nx=(x^2+1)S_n \qquad \text{для } n>0\,,$$

откуда

$$S_n=n^2x$$

$$a_n=-\frac{n^2}{2n-1}$$

и слѣдовательно

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2n+1}=-\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Итакъ

$$\theta_n=a_n x=-\frac{n^2}{2n-1}x \qquad \text{при } \theta_0=-1\,,$$

$$\mu_{n+1}=a_{n+1}x^2=-\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}x^2 \quad \text{при } \mu_1=-x.$$

Функція y разлагается, слѣдовательно, въ непрерывную дробь

$$c+\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{1}.\frac{1}{3}x^2}{1+\cfrac{\frac{2}{3}.\frac{2}{5}x^2}{1+\cfrac{\frac{3}{5}.\frac{3}{7}x^2}{1+\cdots}}}}$$

Найдемъ ур-іе знаменателей приближеній. По формулѣ (XVII) получаемъ

$$K_n=n(n-1)x.\theta_n.$$

Такъ какъ $P=0$, то мы имѣемъ первый изъ случаевъ, разсмотрѣнныхъ въ 4-мъ членѣ § 2 (стр. 53). Линейное дифференціальное ур-іе 2-го порядка, которому удовлетворяютъ цѣлый многочленъ f_n и ф-ція $u_n=e^{\int\frac{N}{M}dx}(yf_n-\varphi_n)=yf_n-\varphi_n$, принимаетъ видъ (послѣ сокращенія на θ_n):

$$(1)\ldots(x^2+1)x\frac{d^2u}{dx^2}-[(2n-2)x^2+2n]\frac{du}{dx}+n(n-1)x.u-0$$

Положимъ

$$x^2=-\xi;$$

тогда ур-іе (1) преобразуется въ слѣдующее:

$$(2)\ldots 4\xi(\xi-1)\frac{d^2u}{d\xi^2}+[2(2n-1)-2(2n-3)\xi]\frac{du}{d\xi}+n(n-1)u=0$$

Этому ур-ію удовлетворяетъ ф-ція $F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},-\frac{2n-1}{2},\xi\right)$, и слѣдовательно, уравненію (1) удовлетворяетъ функція $F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},-\frac{2n-1}{2},-x^2\right)$, представляющая собою цѣлый многочленъ. Отсюда заключаемъ, что

$$f_n=C.F\left(-\frac{n'}{2},-\frac{n-1}{2},-\frac{2n-1}{2},-x^2\right)$$

Постоянный членъ лѣвой части этого равенства есть 1 (такъ какъ всѣ λ равны 1); постоянный членъ правой части равенъ C. Слѣдовательно

$$C=1$$

$$f_n=F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},-\frac{2n-1}{2},-x^2\right).$$

Полученный результатъ показываетъ, что ф-ція f_n не стремится ни къ какому конечному предѣлу, когда n возрастаетъ до ∞.

Съ цѣлью доказать, что отношеніе $\frac{\varphi_n}{f_n}$ имѣетъ конечный предѣлъ при безпредѣльномъ возрастаніи n, введемъ новую перемѣнную z, положивши (см. стр. 83 и 84)

$$z=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}},$$

причемъ подъ $\sqrt{1-\xi}$ мы разумѣемъ тотъ квадратный корень, который обращается въ 1 при $\xi=0$. Какъ извѣстно, всякому значенію ξ, за исключеніемъ значеній $+1\ldots\ldots+\infty$, соотвѣтствуетъ значеніе z, удовлетворяющее условію $Mod(z)<1$.

Вводя z въ ур-іе (2), получаемъ:

$$(3)\ldots z(1-z)(1+z)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(1+z)\left[2z(2-z)-\frac{2n-1}{2}(1+z)^2+\right.$$

$$\left.+2(2n-3)z\right]\frac{du}{dz}-n(n-1)(1-z)u=0.$$

Положивъ

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots u=(1+z)^m.v,$$

найдемъ для v ур-іе:

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots z(1-z)1+z)^{m+2}\frac{d^2v}{dz^2}+(1+z)^{m+1}\left[2mz(1-z)+\right.$$

$$\left.+2z(2-z)-\frac{2n-1}{2}(1+z)^2+2(2n-3)z\right]\frac{dv}{dz}-(1+z)^m\left[m(m-1)z(1-z)+\right.$$

$$\left.+2mz(2-z)-\frac{2n-1}{2}m(1+z)^2+2m(2n-3)z-n(n-1)(1-z)\right]v=0.$$

Опредѣлимъ m такъ, чтобы это ур-іе сокращалось на $(1+z)^{m+1}$, для чего выраженіе въ скобкахъ [ ], стоящее множителемъ при v, должно дѣлиться на $1+z$ или, иначе, должно обращаться въ нуль при $z=-1$. Вставивши въ это выраженіе -1 вмѣсто z, получимъ ур-іе

$$m^2+m(2n-1)+n(n-1)=0,$$

изъ котораго находимъ два значеніядля m: $-n$ и $-(n-1)$. Отдавая предпочтеніе первому, найдемъ, что ур-іе (5) можно сократить на $(1+)z^{-n+2}$, послѣ чего будемъ имѣть:

$$(6)\ldots(1-z)z\frac{d^2v}{dz^2}+\left[\frac{2n-3}{2}z-\frac{2n-1}{2}\right]\frac{dv}{dz}+\frac{n}{2}v=0$$

Равенство же (4) приметъ видъ:

$$u=(1+z)^{-n}.v$$

Ур-iю (6) удовлетворяетъ ф-цiя

$$v_1=F(\tfrac{1}{2},\ -n,\ -n+\tfrac{1}{2},\ z)$$

и слѣдовательно функцiя

$$(7)\ldots\ldots u_1=(1+z)^{-n}.v_1=(1+z)^{-n}F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z)$$

удовлетворяетъ ур-iю (3), а также ур-iямъ (2) и (1), если x, ξ и z связаны между собою ур-iями

$$x^2=-\xi$$

$$z=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}}.$$

Итакъ мы нашли одинъ частный интегралъ ур-iя (1). Найдемъ другой.

Если u есть ф-цiя, удовлетворяющая ур-iю (1), то ф-цiя $U=\frac{1}{x}u$ удовлетворяетъ ур-iю

$$(8)\ldots\ldots x^2(x^2+1)\frac{d^2U}{dx^2}-x[(2n-4)x^2+2n-2]\frac{dU}{dx}+$$
$$+[(n-1)(n-2)x^2-2n]\,U=0,$$

и наоборотъ, если найдемъ ф-цiю U, удовлетворяющую ур-iю (8), то ф-цiя u, опредѣляемая равенствомъ $u=x.U$, будетъ удовлетворять ур-iю (1).

Полагаемъ, какъ и прежде,

$$x^2=-\xi\,.$$

Ур-іе (8) преобразуется въ слѣдующее:

$$(9)\ldots\ldots 4\xi^2(1-\xi)\frac{d^2U}{d\xi^2}+\xi[2(1-\xi)+$$

$$+2(2n-4)\xi-2(2n-2)]\frac{dU}{dz}-[(n-1)(n-2)\xi+2n]U=0$$

Если положимъ

$$U=\xi^n.V\,,$$

то для V получимъ ур-іе:

$$(10)\ldots 4(1-\xi)\xi\frac{d^2V}{d\xi^2}+[2(2n+3)-2(2n+5)\xi]\frac{dV}{d\xi}-(n+1)(n+2)V=0.$$

Вводя въ это ур-іе перемѣнную z, связанную съ ξ зависимостью

$$z=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}}\,,$$

получимъ ур-іе

$$(11)\ldots\quad 2(1-z)(1+z)^2z\frac{d^2V}{dz^2}+(1+z)[4z(2-z)+$$

$$+(2n+3)(1+z)^2-4(2n+5)z]\frac{dV}{dz}-2(n+1)(n+2)(1-z)V=0.$$

Полагая затѣмъ

$$(\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots V=(1+z)^mW,$$

найдемъ для W дифференц. ур-іе:

$$(12)\ldots 2z(1-z)(1+z)^{m+2}\frac{d^2W}{dz^2}+(1+z)^{m+1}[4mz(1-z)+4z(2-z)+$$

$$+(2n+3)(1+z)^2-4(2n+5)z]\frac{dW}{dz}+(1+z)^m[2m(m-1)(1-z)z+$$

$$+4mz(2-z)+m(2n+3)(1+z)^2-4m(2n+5)z-2(n+1)(n+2)(1-z)\}W=0$$

Выбираемъ m такъ, чтобы написанное ур-іе сокращалось на $(1+z)^{m+1}$. Для этого m должно удовлетворять ур-ію

$$m^2-m(2n+3)+(n+1)(n+2)=0\,.$$

Отсюда получаемъ два значенія для m: $n+1$ и $n+2$. Отдавая предпочтеніе первому изъ этихъ значеній, получимъ соотношеніе (α) въ видѣ:

$$V=(1+z)^{n+1}.\ W\,;$$

ур-іе же (12), если вставимъ $n+1$ вмѣсто m, можетъ быть сокращено на $(1+z)^{n+3}$, послѣ чего получимъ:

$$2z(1-z)\frac{d^2W}{dz^2}+[2n+3-(2n+5)z]\frac{dW}{dz}-(n+1)W=0\,.$$

Этому ур-ію удовлетворяетъ ф-ція

$$W_1=F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z)$$

и слѣдовательно ф-ція

$$V_1=(1+z)^{n+1}.\ W_1=(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2}\,,\,n+1\,,\,n+\tfrac{3}{2}\,,\,z)$$

удовлетворяетъ ур-ію (11) или ур-ію (10) при условіи написанной выше зависимости между перемѣнными ξ и z.

Далѣе, ф-ція

$$U_1=\xi^n.\ V_1=\xi^n.(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z)$$

удовлетворяетъ ур-ію (9), а также ур-ію (8), если между x, ξ и z существуютъ зависимости

$$x^2=-\xi\,,\quad z=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}}\,,$$

и наконецъ функція

$$(13)\ldots.u_2=xU_1=x\xi^n(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2}\,,\,n+1\,,\,n+\tfrac{3}{2}\,,\,z)$$

удовлетворяетъ ур-ію (1).

Мы нашли два частныхъ интеграла (7) и (13) ур-ія (1). Общій интегралъ этого ур-ія имѣетъ слѣдовательно видъ:

$$u=C_1(1+z)^{-n}F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z)+C_2x\xi^n(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z).$$

Такъ какъ ф-ціи f_n и $yf_n-\varphi_n$ удовлетворяютъ ур-ію (1), то должны имѣть мѣсто равенства

$$f_n=C_1'(1+z)^{-n}F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z)+C_2'x\xi^n(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z)$$

$$yf_n-\varphi_n=C_1''(1+z)^{-n}F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z)+C_2''x\xi^n(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z)$$

Не трудно убѣдиться (путемъ соображеній, аналогичныхъ тѣмъ, которыя приведены въ членѣ 3 параграфа 3, стр. 87, 88 и 89), что $C_2'=0$, $C_1''=0$, т. е.

$$(14)\ldots\ldots\ldots f_n=C_1'(1+z)^{-n}F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z)$$

$$(15)\ldots\ldots yf_n-\varphi_n=C_2''x\xi^n(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z)$$

Помноживши на $(1+z)^n$ обѣ части равенства (14), получимъ:

$$(16)\ldots\ldots\ldots(1+z)^nf_n=C_1'F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z).$$

Раньше мы нашли слѣдующее выраженіе для f_n:

$$f_n=F(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},-\frac{2n-1}{2},\xi)$$

Слѣдовательно

$$(1+z)^nf_n=(1+z)^nF\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},-\frac{2n-1}{2},\xi\right)=$$

$$=(1+z)^nF\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},-\frac{2n-1}{2},\frac{4z}{(1+z)^2}\right)$$

Отсюда заключаемъ, что членъ лѣвой части равенства (16),

не содержащій z, равенъ 1. Членъ-же правой части того же равенства, не зависящій отъ z, равенъ C_1'. Слѣдовательно

$$C_1'=1,$$

и такимъ образомъ

$$(17)\ldots\ldots\ldots f_n=(1+z)^{-n}.\,F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z)$$

Найдемъ теперь C_2''. Помноживъ обѣ части равенства (15) на

$$x^{-1}\xi^{-n}=(-1)^n x^{-(2n+1)},$$

получимъ

$$(18)\ldots(-1)^n x^{-(2n+1)}(yf_n-\varphi_n)=C_2''(1+z)^{n+1}F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z)$$

Изъ формулы

$$yf_n-\varphi_n=\frac{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_{n+1}}{y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_{n+1}},$$

гдѣ, въ разсматриваемомъ случаѣ,

$$\mu_1\cdot\mu_2\ldots\mu_{n+1}=(-1)^{n+1}\frac{1^2}{1\,3}\cdot\frac{2^2}{3.5}\cdot\frac{3^2}{5.7}\cdots\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1},$$

а ф-ціи y_1, y_2, ... y_{n+1} разлагаются въ ряды, идущіе по восходящимъ степенямъ x и начинающіеся постоянными членами, равными 1 (ибо всѣ λ равны 1), — заключаемъ, что функція $yf_n-\varphi_n$ даетъ рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ x и начинающійся членомъ:

$$(-1)^n\frac{1^2}{1.3}\cdot\frac{2^2}{3.5}\cdot\frac{3^2}{5.7}\cdots\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что функція, стоящая въ лѣвой части равенства (18), разлагается по возрастающимъ степенямъ x въ рядъ, первый членъ котораго есть

$$(A)\ldots\ldots\ldots\frac{1^2}{1.3}\cdot\frac{2^2}{3.5}\cdot\frac{3^2}{5.7}\cdots\cdots\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\,.$$

Очевидно, что, разлагая эту же ф-цію по возрастающимъ степенямъ z, получимъ рядъ, также начинающійся постояннымъ (не зависящимъ отъ z) членомъ, который равенъ выраженію (A).

Членъ же правой части равенства (18), не содержащій z, равенъ C_2''; слѣдовательно C_2'' равно выраженію (A), и такимъ образомъ равенство (15) принимаетъ видъ:

$$yf_n-\varphi_n=\frac{1^2}{1.3}\cdot\frac{2^2}{3.5}\cdot\frac{3^2}{5.7}\cdots\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}x\xi^n(1+z)^{n+1}.F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z).$$

Раздѣливши это равенство на равенство (17), найдемъ:

$$y-\frac{\varphi_n}{f_n}=\frac{1^2}{1.3}\cdot\frac{2^2}{3.5}\cdot\frac{3^2}{5.7}\cdots\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}x\xi^n(1+z)^{2n+1}\,\frac{F(\frac{1}{2},n+1,n+\frac{3}{2},z)}{F(\frac{1}{2},-n,-n+\frac{1}{2},z)}$$

или, если ξ замѣнимъ чрезъ $\dfrac{4z}{(1+z)^2}$,

$$y-\frac{\varphi_n}{f_n}=\frac{1^2}{1.3}\cdot\frac{2^2}{3.5}\cdot\frac{3^2}{5.7}\cdots\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}x(4z)^n(1+z)\frac{F(\frac{1}{2},n+1,n+\frac{3}{2},z)}{F(\frac{1}{2},-n,-n+\frac{1}{2},z)}$$

Отсюда, замѣчая, что при условіи $Mod(z)<1$

$$\lim F(\tfrac{1}{2},n+1,n+\tfrac{3}{2},z)_{n=\infty}=\lim F(\tfrac{1}{2},-n,-n+\tfrac{1}{2},z)_{n=\infty}=(1-z)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim\left[\frac{1^2}{1.3}\cdot\frac{2^2}{3.5}\cdot\frac{3^2}{5.7}\cdots\cdots\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}(4z)^n\right]_{n=\infty}=$$

$$=\lim\left[\frac{2^2.4^2.6^2\ldots\ldots\ldots\ldots(2n)^2}{1^2.3^2.5^2\ldots.(2n-1)^2(2n+1)}z^n\right]_{n=\infty}=0\ ^{*}),$$

приходимъ къ заключенію, что

---

*) См. стр. 65 и 66.

$$\lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=y$$

при условіи $Mod(z)<1$. Это условіе, такъ какъ $z=\frac{1-\sqrt{1-\xi}}{1+\sqrt{1-\xi}}$,

будетъ выполняться, если изъ всѣхъ значеній ξ исключимъ дѣйствительныя значенія $+1\ldots.+\infty$. Далѣе,

$$x^2=-\xi,$$

и слѣдовательно исключаемымъ значеніямъ ξ соотвѣтствуютъ чисто мнимыя значенія x (т. е. значенія вида bi), модуль которыхъ $\geqq 1$.

Итакъ, всякому x, за исключеніемъ чисто мнимыхъ значеній съ модулемъ бо́льшимъ или равнымъ 1, соотвѣтствуетъ z, удовлетворяющее условію $Mod(z)<1$, и слѣдовательно для всякаго x внѣ указанныхъ значеній

$$\lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty}=y,$$

т. е. можно написать равенство

$$y=c+\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{1}.\frac{1}{3}x^2}{1+\cfrac{\frac{2}{3}.\frac{2}{5}x^2}{1+\cfrac{\frac{3}{5}.\frac{3}{7}x^2}{1+\cdots}}}}$$

Интегрируя дифференціальное ур-іе, которымъ опредѣляется наша ф-ція y, находимъ

$$y=\operatorname{arctg}x+c;$$

такимъ образомъ

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1.1}{1.3}x^2}{1+\cfrac{\frac{2.2}{3.5}x^2}{1+\cfrac{\frac{3.3}{5.7}x^2}{1+\cdots}}}}$$

Равенство это имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній x, за исключеніемъ значеній чисто мнимыхъ съ модулемъ бо́льшимъ или равнымъ 1; для послѣднихъ значеній x'а непрерывная дробь, представляющая разложеніе $\operatorname{arctg} x$, перестаетъ быть сходящеюся.

3. Въ заключеніе, разложимъ въ непрерывную дробь ф-цію, удовлетворяющую дифференціальному ур-ію

$$x(x-1)\frac{dy}{dx}+(\alpha x-\gamma+1)y+\gamma-1=0$$

и дающую въ разложеніи гипергеометрическій рядъ $F(\alpha, 1, \gamma, x)$.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$M=x(x-1),\ N=\alpha x-(\gamma-1),\ P=0,\ Q=\gamma-1,$$

$$\lambda_0=\varphi_0=1,$$

$$\theta_{-1}=-P=0,\ \theta_0=Q+N\varphi_0+P\varphi_0^2=\alpha x,\ \Omega_0=-\frac{1}{2}N-P\varphi_0=\frac{\gamma-1}{2}-\frac{\alpha}{2}x.$$

Прежде всего замѣчаемъ, что q_n (нисшая степень x въ ф-ціи θ_n) не можетъ быть меньше 1. Это слѣдуетъ изъ ур-ія $q_n=\delta+i_{n+1}$, такъ какъ i_{n+1} не меньше 1, а δ въ данномъ случаѣ равно нулю.

Такъ какъ $q_0=1$ (ибо $\theta_0=\alpha x$), $\delta=0$, то изъ уравненія $q_0=\delta+i_1$ находимъ, что $i_1=1$. Положивъ $\mu_1=a_1 x$, $\lambda_1=1$, будемъ имѣть по формулѣ (VII):

$$\Omega_1+\frac{\gamma-1}{2}-\frac{\alpha}{2}x=x-1-\frac{\alpha}{a_1}$$

и слѣдовательно Ω_1— цѣлая ф-ція первой степени.

Изъ формулы (VIII), написанной для $n=0$, слѣдуетъ затѣмъ, что θ_1— также первой степени; и такъ какъ θ_1 (какъ доказано выше) не содержитъ x въ степени, низшей 1, то слѣдовательно θ_1 имѣетъ видъ b_1x, т. е. $q_1=1$.

Ур-іе $q_1=\delta+i_2$ показываетъ, что $i_2=1$, и потому можно положить $\mu_2=a_2x$. Изъ формулы (VII), написанной для $n=1$, заключаемъ, что Ω_2—не выше первой степени, и изъ формулы (VIII) затѣмъ находимъ, что θ_2 имѣетъ видъ b_2x и т. д. Вообще такимъ образомъ можно положить

$$\Omega_n=A_nx+B_n$$

$$\theta_n=b_nx$$

$$\mu_{n+1}=a_{n+1}x;$$

при этомъ $A_0=-\frac{\alpha}{2}$, $B_0=\frac{\gamma-1}{2}$, $b_0=\alpha$, $b_{-1}=0$.

Полагая $\lambda_{n+1}=1$ и вставляя написанныя выраженія для Ω_n, θ_n, μ_{n+1} и λ_{n+1} въ формулы (VII) и (VIII), находимъ:

$$(A_{n+1}+A_n)x+B_{n+1}+B_n=(n+1)(x-1)-\frac{b_n}{a_{n+1}}$$

$$(A_{n+1}-A_n)x+B_{n+1}-B_n+b_{n+1}x-\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n-1}x=0. \quad \text{для } n>0,$$

и для $n=0$:

$$(A_1-A_0)x+B_1-B_0+b_1x=0.$$

Отсюда

$$(1)\ldots A_{n+1}+A_n=n+1$$

$$(2)\ldots B_{n+1}+B_n=-(n+1)-\frac{b_n}{a_{n+1}}$$

$$(3)\ldots\ldots A_{n+1}-A_n+b_{n+1}-\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n-1}=0$$

$$(4)\ldots\ldots B_{n+1}-B_n=0,$$

причемъ въ формулѣ (3) при $n=0$ исчезаетъ послѣдній членъ лѣвой части, и формула принимаетъ видъ:

$$(3)' \quad \ldots\ldots A_1-A_0+b_1=0.$$

Формула же (4) справедлива для $n\geqq 0$; изъ нея такимъ образомъ слѣдуетъ, что

$$B_{n+1}=B_n=\ldots\ldots=B_1=B_0=\frac{\gamma-1}{2}.$$

Итакъ соотношеніе (2) можно представить въ видѣ

$$(5)\ldots\ldots\frac{b_n}{a_{n+1}}=-(n+\gamma)$$

По формулѣ (1) получаемъ

$$A_{2k}+A_{2k-1}=2k$$

$$A_{2k-1}+A_{2k-2}=2k-1;$$

отсюда

$$A_{2k}-A_{2k-2}=1.$$

Поставивши на мѣсто k послѣдовательно $\nu, \nu-1, \nu-2, \ldots 2, 1$, получимъ рядъ равенствъ

$$A_{2\nu}-A_{2\nu-1}=1$$

$$A_{2\nu-2}-A_{2\nu-4}=1$$

$$A_{2\nu-4}-A_{2\nu-6}=1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_4-A_2=1$$

$$A_2-A_0=1$$

Складывая написанныя равенства, находимъ:

$$A_{2\nu}=A_0+\nu=\frac{2\nu-\alpha}{2}.$$

и затѣмъ

$$A_{2\nu-1}=2\nu-A_{2\nu}=\frac{2\nu+\alpha}{2}.$$

Положивши въ формулѣ (3) $n=2\nu-1$, вставивши найденныя значенія $A_{2\nu}$ и $A_{2\nu-1}$, замѣнивши $\frac{b_{2\nu-2}}{a_{2\nu-1}}$, по формулѣ (5), чрезъ $-(2\nu-2+\gamma)$ и $a_{2\nu}$ (по той же формулѣ) чрезъ $-\frac{b_{2\nu-1}}{2\nu-1+\gamma}$, получимъ

$$-\alpha+b_{2\nu}-\frac{2\nu-2+\gamma}{2\nu-1+\gamma}b_{2\nu-1}=0,$$

откуда

$$(6)\ldots(2\nu-1+\gamma)b_{2\nu}=(2\nu-2+\gamma)b_{2\nu-1}+(2\nu-1+\gamma)\alpha.$$

Подобнымъ же образомъ, положивши въ формулѣ (3) $n=2\nu$, найдемъ:

$$(7)\ldots(2\nu+\gamma)b_{2\nu+1}=(2\nu-1+\gamma)b_{2\nu}-(2\nu+\gamma)(\alpha+1)$$

Складывая равенства (6) и (7), получаемъ:

$$(2\nu+\gamma)b_{2\nu+1}=(2\nu-2+\gamma)b_{2\nu-1}-\alpha-(2\nu+\gamma)$$

По этой формулѣ пишемъ рядъ равенствъ:

$$(2\nu-2+\gamma)b_{2\nu-1}=(2\nu-4+\gamma)b_{2\nu-3}-\alpha-(2\nu-2+\gamma)$$

....

$$(2+\gamma)b_3=\gamma b_1-\alpha-(2+\gamma)$$

Складывая написанныя равенства, находимъ:

$$(2\nu+\gamma)b_{2\nu+1}=\gamma\,.\,b_1-\nu\alpha-\nu(\nu+1+\gamma).$$

Изъ соотношенія (3)' получаемъ:

$$b_1=A_0-A_1=-\frac{\alpha}{2}-\frac{2+\alpha}{2}=-(\alpha+1),$$

и слѣдовательно

$$(2\nu+\gamma)b_{2\nu+1}=-\gamma(\alpha+1)-\nu\alpha-\nu(\nu+1+\gamma)=-(\nu+\gamma)(\nu+1+\alpha),$$

откуда

$$b_{2\nu+1}=-\frac{(\nu+\gamma)(\nu+1+\alpha)}{2\nu+\gamma}.$$

Изъ равенства (6) находимъ

$$(2\nu-1+\gamma)b_{2\nu}=(2\nu-2+\gamma)b_{2\nu-1}+(2\nu-1+\gamma)\alpha=$$
$$=-(\nu-1+\gamma)(\nu+\alpha)+(2\nu-1+\gamma)\alpha=-\nu(\nu-1+\gamma-\alpha),$$

откуда

$$b_{2\nu}=-\frac{\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{2\nu-1+\gamma}.$$

Наконецъ по формулѣ (5) имѣемъ:

$$a_{2\nu+1}=-\frac{b_{2\nu}}{2\nu+\gamma}=\frac{\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{(2\nu-1+\gamma)(2\nu+\gamma)} \quad \text{при} \quad a_1=-\frac{b_0}{\gamma}=-\frac{\alpha}{\gamma},$$

$$a_{2\nu}=-\frac{b_{2\nu-1}}{2\nu-1+\gamma}=\frac{(\nu+\alpha)(\nu-1+\gamma)}{(2\nu-2+\gamma)(2\nu-1+\gamma)}$$

Итакъ, при $\lambda_n=1$,

$$\Omega_{2\nu}=A_{2\nu}x+B_{2\nu}=\frac{2\nu-\alpha}{2}x+\frac{\gamma-1}{2}$$

$$\Omega_{2\nu-1}=A_{2\nu-1}x+B_{2\nu-1}=\frac{2\nu+\alpha}{2}x+\frac{\gamma-1}{2}$$

$$\theta_{2\nu}=b_{2\nu}x=-\frac{\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{2\nu-1+\gamma}x$$

$$\theta_{2\nu-1}=b_{2\nu-1}x=-\frac{(\nu+\alpha)(\nu-1+\gamma)}{2\nu-2+\gamma}x$$

$$\mu_{2\nu}=a_{2\nu}x=\frac{(\nu+\alpha)(\nu-1+\gamma)}{(2\nu-2+\gamma)(2\nu-1+\gamma)}x$$

$$\mu_{2\nu+1}=a_{2\nu+1}x=\frac{\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{(2\nu-1+\gamma)(2\nu+\gamma)}x, \quad \text{причемъ} \quad \mu_1=-\frac{\alpha}{\gamma}.$$

y разлагается такимъ образомъ въ непрерывную дробь

$$1+\cfrac{\frac{\alpha}{\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{1+\alpha}{1+\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{1.(\gamma-\alpha)}{(1+\gamma)(2+\gamma)}x}{1-\cdots\cdots-\cfrac{\frac{(\nu+\alpha)(\nu-1+\gamma)}{(2\nu-2+\gamma)(2\nu-1+\gamma)}x}{1-\cfrac{\frac{\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{(2\nu-1+\gamma)(2\nu+\gamma)}x}{1-\cdots}}}}}$$

Положивъ въ формулѣ (XIX) $n=2\nu$ и вставивши найденныя значенія $\Omega_{2\nu}$, $\theta_{2\nu}$, $\theta_{2\nu-1}$ и $\mu_{2\nu}$, получимъ:

$$S_2=\nu(\nu-\alpha)x.$$

По формулѣ (XVII) получаемъ затѣмъ:

$$K_{2\nu}=\theta_{2\nu}\,.\,\nu(\nu+\alpha)x$$

Уравненіе *), которому удовлетворяютъ функціи $f_{2\nu}$ и $u_{2\nu}=e^{\int\frac{N}{M}dx}(yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu})=e^{\int\frac{\alpha x-\gamma+1}{x(x-1)}dx}(yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu})=x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha-\gamma+1}\times$ $\times(yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu})$, имѣетъ слѣдовательно, видъ:

$$(8)\ldots x(x-1)\frac{d^2u}{dx^2}-[(2\nu-1+\alpha)x-(2\nu-1+\gamma)]\frac{du}{dx}+\nu(\nu+\alpha).u=0.$$

Точно такъ же получаемъ ур-іе

$$(9)\ldots x(x-1)\frac{d^2u}{dx^2}-[(2\nu-2+\alpha)x-(2\nu-2+\gamma)]\frac{du}{dx}+(\nu-1)(\nu+\alpha).u=0,$$

которому удовлетворяютъ ф-ціи $f_{2\nu-1}$ и $u_{2\nu-1}=x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha-\gamma+1}\times$ $\times(yf_{2\nu-1}-\varphi_{2\nu-1})$.

Замѣчая, что постоянные члены въ многочленахъ $f_{2\nu}$ и $f_{2\nu-1}$ равны 1, находимъ изъ ур-ій (8) и (9):

$$f_{2\nu}=F(-\nu,-\nu-\alpha,1-2\nu-\gamma,x)$$

$$f_{2\nu-1}=F(-\nu+1,-\nu-\alpha,2-2\nu-\gamma,x).$$

Легко видѣть отсюда, что, при возрастаніи указателя до ∞, знаменатели приближеній найденной нами непрерывной дроби не имѣютъ конечнаго предѣла. Тѣмъ не менѣе непрерывная дробь — сходящаяся для всякаго x, за исключеніемъ значеній $+1\ldots\ldots+\infty$. Для доказательства этого мы употребимъ пріемъ, основная мысль котораго принадлежитъ Thomé **).

*) Такъ какъ $P=0$, то мы имѣемъ первый случай изъ разсмотрѣнныхъ въ членѣ 4 § 2 (стр. 53.)

**) См. Crelle's Journal, B-de 66, und 67.. статьи Thomé: 1) Ueber die Kettenbruchentwickelung der Gauss'schen Function $F(\alpha,1,\gamma,x)$, 2) Ueber die Kettenbruchentwickelung des Gauss'schen Quotienten $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}$.

Положимъ

$$z=\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}},$$

причемъ знакъ корня $\sqrt{1-x}$ опредѣляемъ условіемъ, чтобы этотъ корень обращался въ 1 при $x=0$.

Вводя перемѣнную z въ ур-іе (8) (для чего пользуемся зависимостью $x=\frac{4z}{(1+z)^2}$, получаемою изъ выше написанной), находимъ:

$$z(1-z)(1+z)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(1+z)[2z(2-z)+4(2\nu-1+\alpha)z-$$
$$-(2\nu+\gamma-1)(1+z)^2]\frac{du}{dz}-4\nu(\nu+\alpha)(1-z)u=0$$

Этому ур-ію удовлетворяетъ ф-ція

$$f_{2\nu}=F\left(-\nu,-\nu-\alpha,1-2\nu-\gamma,\frac{4z}{(1+z)^2}\right),$$

и слѣдовательно ф-ція

$$V_{2\nu}=(1+z)^{2\nu}.f_{2\nu}=(1+z)^{2\nu}.F\left(-\nu,-\nu-\alpha,1-2\nu-\gamma,\frac{4z}{(1+z)^2}\right),$$

представляющая собою, очевидно, цѣлый многочленъ степени 2ν относительно z, удовлетворяетъ ур-ію

$$(10)\ldots\ldots z(1-z^2)\frac{d^2V}{dz^2}+[(2\nu-1-\gamma)z^2-2(\gamma-2\alpha-1)z-$$
$$-(2\nu+\gamma-1)]\frac{dV}{dz}+2\nu(\gamma z+\gamma-2\alpha-1)V=0$$

Положивъ

$$V_{2\nu}=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_{2\nu}z^{2\nu},$$

причемъ, очевидно,

$$A_{2\nu-k}=A_k,$$

находимъ изъ ур-ія (10) слѣдующую зависимость между тремя рядомъ стоящими коэффиціентами A_{k+2}, A_{k+1} и A_k:

$$(11)\ldots A_{k+2}=\frac{(\gamma-2\alpha-1)(2\nu-2k-2)}{(k+2)(2\nu+\gamma-k-2)}A_{k+1}+\frac{(k+\gamma)(2\nu-k)}{(k+2)(2\nu+\gamma-k)}A_k;$$

при этомъ

$$A_0=1,\qquad A_1=\frac{2\nu(\gamma-2\alpha-1)}{2\nu+\gamma-1}$$

Изъ соотношенія (11) слѣдуетъ, что, если A_k и A_{k+1} остаются конечными при ν безконечно большомъ, то также и A_{k+2}—конечно. Такъ какъ $A_0=1$, $lim\,(A_1)_{\nu=\infty}=\gamma-2\alpha-1$, то слѣдовательно A_2, A_3,....A_k (k—число конечное) остаются конечными, когда ν безконечно возрастаетъ.

Всегда существуетъ число ρ достаточно большое для того, чтобы при $\nu\geqq k\geqq\rho$ имѣли мѣсто неравенства:

$$(12)\ldots\begin{cases} Mod\left[\dfrac{(\gamma-2\alpha-1)(2\nu-2k-2)}{(k+2)(2\nu+\gamma-k-2)}\right]<\varepsilon \\ Mod\left[\dfrac{(k+2)(2\nu-k}{(k+2)(2\nu+\gamma-k)}\right]<1+\varepsilon, \end{cases}$$

гдѣ ε — величина положительная, какъ угодно малая.

Когда ρ такимъ образомъ опредѣлено, возьмемъ рядъ коэффиціентовъ

$$(a)\ldots\ldots\ldots A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots\ldots\ldots A_\rho,\ A_{\rho+1}.$$

Изъ только что сказаннаго о коэффиціентахъ A_k слѣдуетъ, что модули коэффиціентовъ ряда (a) остаются конечными, когда ν возрастаетъ безпредѣльно. Существуетъ поэтому конечная величина A, которая (при какомъ угодно ν, также при $\nu=\infty$)

больше каждаго изъ модулей коэффиціентовъ (a). Такимъ образомъ à fortiori:

$$Mod(A_1)<A(1+\varepsilon)\ ,\ Mod(A_2)<A(1+\varepsilon)^2,\ldots\ldots$$

$$Mod(A_\rho)<A(1+\varepsilon)^\rho\ ,\ Mod(A_{\rho+1})<A(1+\varepsilon)^{\rho+1}.$$

Изъ равенства (11) и неравенствъ (12) слѣдуетъ, что, при $\rho\leq\nu$,

$$Mod(A_{\rho+2})<\varepsilon.A(1+\varepsilon)^{\rho+1}+A(1+\varepsilon)^{\rho+1}$$

или

$$Mod(A_{\rho+2})<A(1+\varepsilon)^{\rho+2};$$

далѣе, при $\rho+1\leq\nu$,

$$Mod(A_{\rho+3})<A(1+\varepsilon)^{\rho+3},$$

и т. д. Вообще, такимъ образомъ, для $k\leq\nu$ можемъ написать:

$$(13)\ldots\ldots\ldots\ldots Mod(A_k)<A(1+\varepsilon)^k$$

Такъ какъ $A_k=A_{2\nu-k}$, то при $k>\nu$

$$Mod(A_k)=Mod(A_{2\nu-k})<A(1+\varepsilon)^{2\nu-k}$$

и, тѣмъ болѣе,

$$Mod(A_k)<A(1+\varepsilon)^k.$$

Итакъ, при всякомъ k (начиная отъ $k=0$ и до $k=2\nu$) неравенство (13) имѣетъ мѣсто, и слѣдовательно

$$\sum_{k=0}^{k=2\nu} Mod(A_k z^k)<A\sum_{k=0}^{k=2\nu}\{(1+\varepsilon)^k Mod(z^k)\}$$

и тѣмъ болѣе

$$\sum_{k=0}^{k=2\nu} Mod(A_k z^k)<A\sum_{k=0}^{k=\infty}\{(1+\varepsilon)^k Mod(z^k)\}$$

Если

$$Mod(z)<\frac{1}{1+\varepsilon},$$

то рядъ $\sum_{k=0}^{k=\infty}\{(1+\varepsilon)^k Mod(z^k)\}$ — сходящійся, а слѣдовательно рядъ $\sum_{k=0}^{k=2\nu} Mod(A_k z^k)$ имѣетъ конечное значеніе при ν безконечно большомъ. Отсюда же заключаемъ, что рядъ $V_{2\nu}=\sum_{k=0}^{k=2\nu} A_k z^k$ (а также его производныя) сохраняетъ величину конечную, когда ν безпредѣльно возрастаетъ, если только $Mod(z)<\frac{1}{1+\varepsilon}$, или, такъ какъ ε — величина произвольно малая, если $Mod(z)<1$.

Изъ ур-ія (10), которому удовлетворяетъ ф-ція $V_{2\nu}$, не трудно найти предѣлъ, къ которому стремится $V_{2\nu}$ при возрастаніи ν до ∞.

Положивъ

$$\frac{z(1-z^2)\frac{d^2V_{2\nu}}{dz^2}-[(\gamma+1)z^2+2(\gamma-2\alpha-1)z+\gamma-1]\frac{dV_{2\nu}}{dz}}{1-z^2}=\omega_{2\nu},$$

причемъ замѣчаемъ, что ф-ція $\omega_{2\nu}$ остается конечной при ν безконечно большомъ (если $Mod(z)<1$), получимъ изъ уp-ія (10):

$$\frac{dV_{2\nu}}{dz}-\frac{\gamma z+\gamma-2\alpha-1}{1-z^2}V_{2\nu}=\frac{1}{2\nu}\omega_{2\nu}.$$

Разсматривая это ур-іе, какъ линейное перваго порядка, и интегрируя, находимъ (замѣчая, что для $z=0$ $V_{2\nu}=1$):

$$V_{2\nu}=e^{\int_0^z\frac{\gamma z+\gamma-2\alpha-1}{1-z^2}dz}\left[1+\frac{1}{2\nu}\int_0^z\omega_{2\nu}e^{-\int_0^z\frac{\gamma z+\gamma-2\alpha-1}{1-z^2}dz}dz\right]$$

Отсюда, переходя къ предѣлу, получаемъ:

$$lim(V_{2\nu})_{\nu=\infty}=e^{\int_0^z\frac{\gamma z+\gamma-2\alpha-1}{1-z^2}dz}=(1+z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}$$

и слѣдовательно

$$\lim[(1+z)^{2\nu}.f_{2\nu}]_{\nu=\infty}=\lim(V_{2\nu})_{\nu=\infty}=(1+z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}.$$

Изъ формулы

$$f_{2\nu}-\lambda_{2\nu}f_{2\nu-1}+\mu_{2\nu}f_{2\nu-2}=0$$

находимъ, замѣчая, что

$$\lambda_{2\nu}=1,\ \mu_{2\nu}=\frac{(\nu+\alpha)(\nu-1+\gamma)}{(2\nu-2+\gamma)(2\nu-1+\gamma)}x=\frac{(\nu+\alpha)(\nu-1+\gamma)}{(2\nu-2+\gamma)(2\nu-1+\gamma)}.\frac{4z}{(1+z)^2}:$$

$$(1+z)^{2\nu}.f_{2\nu-1}=(1+z)^{2\nu}.f_{2\nu}+\frac{4(\nu+\alpha)(\nu-1+\gamma)}{(2\nu-2+\gamma)(2\nu-1+\gamma)}z(1+z)^{2\nu-2}.f_{2\nu-2},$$

откуда

$$(1+z)\lim[(1+z)^{2\nu-1}.f_{2\nu-1}]_{\nu=\infty}=\lim[(1+z)^{2\nu}.f_{2\nu}]_{\nu=\infty}+$$

$$+z.\lim[(1+z)^{2\nu-2}.f_{2\nu-2}]_{\nu=\infty}=(1+z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}+$$

$$+z.(1+z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}=(1+z)^{-\alpha+\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}$$

и слѣдовательно

$$\lim[(1+z)^{2\nu-1}.f_{2\nu-1}]_{\nu=\infty}=(1+z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}.$$

Итакъ вообще

$$\lim[(1+z)^{n}f_{n}]_{n=\infty}=(1+z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}.$$

Ур-ію (8) удовлетворяетъ ф-ція $u_{2\nu}=x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha-\gamma+1}(yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu})$, и слѣдовательно ф-ція

$$U_{2\nu}=yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu}$$

удовлетворяетъ ур-ію

$$x^2(x-1)\frac{d^2U}{dx^2}+x[2\nu+1-\gamma-(2\nu-1-\alpha)x]\frac{dU}{dx}+$$

$$+[(2\nu+1)(\gamma-1)+\nu(\nu-\alpha)x]U=0$$

Положивъ

$$U_{2\nu}=-\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2\nu+1}.Y_{2\nu}=-a_1a_2\ldots a_{2\nu+1}x^{2\nu+2}.Y_{2\nu},$$

найдемъ, что $Y_{2\nu}$ удовлетворяетъ ур-ію

$$x(x-1)\frac{d^2Y}{dx^2}+[(2\nu+3+\alpha)x-(2\nu+1+\gamma)]\frac{dY}{dx}+$$
$$+(\nu+1)(\nu+1+\alpha)Y=0$$

Введя въ это ур-іе перемѣнную z, получимъ:

$$z(1-z)(1+z)^2\frac{d^2Y}{dz^2}+(1+z)[2z(2-z)-4(2\nu+3+\alpha)z+$$
$$+(2\nu+1+\gamma)(1+z)^2]\frac{dY}{dz}-4(\nu+1)(\nu+1+\alpha)(1-z)Y=0$$

Положивъ

$$Y_{2\nu}=(1+z)^m.\ W_{2\nu},$$

найдемъ для $W_{2\nu}$ уравненіе

$$(14)\ldots.z(1-z)(1+z)^{m+2}\frac{d^2W}{dz^2}+(1+z)^{m+1}[2mz(1-z)+$$
$$+2z(2-z)-4(2\nu+3+\alpha)z+(2\nu+1+\gamma)(1+z)^2]\frac{dW}{dz}+$$
$$+(1+z)^m[m(m-1)z(1-z)+2mz(2-z)-4m(2\nu+3+\alpha)z+$$
$$+m(2\nu+1+\gamma)(1+z)^2-4(\nu+1)(\nu+1+\alpha)(1-z)]W=0.$$

Выбираемъ m такъ, чтобы полученное ур-іе сокращалось на $(1+z)^{m+1}$, для чего выраженіе въ скобкахъ [ ], стоящее множителемъ при W, должно дѣлиться на $1+z$. Положивъ въ этомъ выраженіи $z=-1$, получимъ ур-іе

$$m^2-m(4\nu+4+2\alpha)+(2\nu+2)(2\nu+2+2\alpha)=0,$$

откуда для m находимъ два значенія: $2\nu+2$ и $2\nu+2+2\alpha$. Положивъ въ ур-іи (14) $m=2\nu+2$ и сокративъ затѣмъ ур-іе на $(1+z)^{2\nu+3}$, найдемъ:

$$(15)\ldots z(1-z^2)\frac{d^2W}{dz^2}+[2\nu+4+\gamma+2(\gamma-2\alpha-1)z-$$

$$-(2\nu+5-\gamma)z^2]\frac{dW}{dz}+(2\nu+2)[\gamma-2\alpha-1+(\gamma-2)z]\,W=0.$$

Этому ур-iю удовлетворяетъ ф-цiя

$$(16)\ldots W_{2\nu}=(1+z)^{-2\nu-2}Y_{2\nu}=\frac{(1+z)^{-2\nu-2}.\,x^{-2\nu-1}}{-a_1\,a_2\,\ldots\ldots a_{2\nu+1}}\cdot U_{2\nu}=$$

$$=\frac{(1+z)^{-2\nu-2}.\,x^{-2\nu-1}}{-a_1\,a_2\,\ldots\ldots a_{2\nu+1}}(yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu})$$

Функцiя

$$yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu}=-\frac{\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_{2\nu+1}}{y_1y_2\ldots\ldots y_{2\nu+1}}=-\frac{a_1\,a_2\ldots\ldots a_{2\nu+1}.\,x^{2\nu+1}}{y_1\,y_2\ldots\ldots\ldots\ldots y_{2\nu+1}}$$

разлагается по восходящимъ степенямъ x въ рядъ, начинающiйся членомъ, равнымъ $-a_1\,a_2\ldots a_{2\nu+1}.x^{2\nu+1}$(ибо y_1, y_2, $\ldots y_{2\nu+1}$ даютъ ряды, идущiе по возрастающимъ степенямъ x и начинающiеся постоянными членами, равными 1,—такъ какъ всѣ λ равны 1).

Слѣдовательно ф-цiя $\frac{x^{-2\nu-1}}{-a_1\,a_2\ldots\ldots a_{2\nu+1}}(yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu})$ даетъ рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ x и начинающiйся постояннымъ членомъ, равнымъ 1. Замѣнивъ въ этой ф-цiи x чрезъ $\frac{4z}{(1+z)^2}$ и помноживъ ее затѣмъ на $(1+z)^{-2\nu-2}$, будемъ имѣть, очевидно, для полученной такимъ образомъ ф-цiи (равной $W_{2\nu}$) рядъ, идущiй по восходящимъ степенямъ z и начинающiйся постояннымъ членомъ, который равенъ 1.

Итакъ полагаемъ, что ф-цiя $W_{2\nu}$ разлагается въ рядъ

$$B_0+B_1z+B_2z^2+\ldots\ldots=\sum_{k=0}^{k=\infty}B_kz^k,$$

причемъ $B_0=1$.

Изъ ур-ія (15) находимъ зависимость между тремя последовательными коэффиціантами B_k, B_{k+1} и B_{k+2}:

$$(17)\ldots B_{k+2}=\frac{(2\alpha+1-\gamma)(2\nu+2k+4)}{(k+2)(2\nu+k+2+\gamma)}B_{k+1}+\frac{(k+2-\gamma)(2\nu+k+2)}{(k+1)(2\nu+k+2+\gamma)}B_k;$$

при этомъ

$$B_0=1,\ B_1=\frac{(2\alpha+1-\gamma)(2\nu+2)}{2\nu+1+\gamma}$$

Можно опредѣлить число ρ такъ, чтобы при $k\geqq\rho$ имѣли мѣсто неравенства (каково бы ни было ν):

$$(18)\ldots\left\{\begin{aligned}&Mod\left[\frac{(2\alpha+1-\gamma)(2\nu+2k+4)}{(k+2)(2\nu+k+2+\gamma)}\right]<\varepsilon\\&Mod\left[\frac{(k+2-\gamma)(2\nu+k+2)}{(k+2)(2\nu+k+2+\gamma)}\right]<1+\varepsilon,\end{aligned}\right.$$

гдѣ ε — произвольно малая величина.

Опредѣливши такимъ образомъ ρ, беремъ рядъ коэффиціентовъ

$$(b)\ldots\ldots B_0,\ B_1,\ldots\ldots B_\rho,\ B_{\rho+1}$$

Каждый изъ этихъ коэффиціентовъ остается конечнымъ при ν безконечно большомъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $B_0=1$, $lim\,(B_1)_{\nu=\infty}=2\alpha+1-\gamma$, то изъ равенства (16) слѣдуетъ, что $lim\,(B_2)_{\nu=\infty}$ есть величина конечная, затѣмъ $lim\,(B_3)_{\nu=\infty}$ — величина конечная и т.д., наконецъ $lim(B_\rho)_{\nu=\infty}$ и $lim(B_{\rho+1})_{\nu=\infty}$— величины конечныя.

Итакъ существуетъ конечная величина B, которая больше каждаго изъ модулей коэффиціентовъ (b), каково бы ни было ν. Слѣдовательно можемъ написать

$$B_0=1<B$$

$$Mod(B_1)<B(1+\varepsilon)$$

$$Mod\,(B_2) < B(1+\varepsilon)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Mod\,(B_\rho) < B(1+\varepsilon)^\rho$$

$$Mod\,(B_{\rho+1}) < B\,(1+\varepsilon)^{\rho+1}.$$

Изъ равенства (17) и неравенствъ (18) слѣдуетъ что

$$Mod\,(B_{\rho+2}) < \varepsilon.\, B(1+\varepsilon)^{\rho+1} + B\,(1+\varepsilon)^{\rho+1}$$

или

$$Mod\,(B_{\rho+2}) < B\,(1+\varepsilon)^{\rho+2}$$

затѣмъ

$$Mod\,(B_{\rho+3}) < B(1+\varepsilon)^{\rho+3},$$

и вообще, для всякаго k,

$$Mod\,(B_k) < B(1+\varepsilon)^k.$$

Слѣдовательно, каково бы ни было ν,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\{Mod\,(B_k).\, Mod(z^k)\} < B\sum_{k=0}^{k=\infty}\{(1+\varepsilon)^k\, Mod(z^k)\}$$

и такъ какъ рядъ $\sum_{k=0}^{k=\infty}\{(1+\varepsilon)^k.\, Mod\,(z^k)\}$ — сходящійся при условіи $Mod\,(z) < \frac{1}{1+\varepsilon}$, то и рядъ $\sum_{k=0}^{k=\infty}\{Mod(B_k).\, Mod(z^k)\}$ — также сходящійся и сохраняетъ конечную величину при ν безконечно большомъ, если z удовлетворяетъ указанному условію. Отсюда же слѣдуетъ, что рядъ $\sum_{k=0}^{k=\infty} B_k z^k$ будетъ сходящимся и будетъ сохранять конечное значеніе при ν безконечно большомъ, если $Mod\,(z) < \frac{1}{1+\varepsilon}$, или, такъ какъ ε — величина произвольно малая, если $Mod(z) < 1$

Такъ какъ рядъ $\sum\limits_{k=0}^{k=\infty} B_k z^k$, представляющій собою разложеніе ф-ціи $W_{2\nu}$, — сходящійся, то можно написать равенство

$$W_{2\nu}=\sum_{k=0}^{k=\infty} B_k z^k,$$

и слѣдовательно ф-ція $W_{2\nu}$ остается конечной при ν безконечно большомъ.

Не трудно найти предѣлъ, къ которому приближается ф-ція $W_{2\nu}$, когда ν стремится къ ∞.

Положивъ

$$\frac{z(1-z^2)\frac{d^2W_{2\nu}}{dz^2}+[\gamma-1+2(\gamma-2\alpha-1)z-(3-\gamma)z^2]\frac{dW_{2\nu}}{dz}}{1-z^2}=-\psi_{2\nu},$$

получимъ изъ ур-ія (15):

$$\frac{dW_{2\nu}}{dz}+\frac{\gamma-2\alpha-1+(\gamma-2)z}{1-z^2}W_{2\nu}=\frac{1}{2\nu+2}\psi_{2\nu}$$

Интегрируя это ур-іе, какъ линейное перваго порядка, и замѣчая, что $W_{2\nu}$ при $z=0$ обращается въ 1, находимъ:

$$W_{2\nu}=e^{-\int_0^z\frac{\gamma-2\alpha-1+(\gamma-2)z}{1-z^2}dz}\left[1+\frac{1}{2\nu+2}\int_0^z\psi_{2\nu}\,.\,e^{\int_0^z\frac{\gamma-2\alpha-1+(\gamma-2)z}{1-z^2}dz}\,.\,dz\right]$$

Отсюда, переходя къ предѣлу и замѣчая, что ф-ція $\psi_{2\nu}$ остается конечной при ν безконечно большомъ (если $Mod(z)<1$), получаемъ:

$$lim(W_{2\nu})_{\nu=\infty}=e^{-\int_0^z\frac{\gamma-2\alpha-1+(\gamma-2)z}{1-z^2}dz}=(1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\gamma-\alpha-\frac{3}{2}}.$$

Изъ формулъ

$$f_n-\lambda_n f_{n-1}+\mu_n f_{n-2}=0$$

$$\varphi_n-\lambda_n \varphi_{n-1}+\mu_n \varphi_{n-2}=0$$

находимъ:

$$(yf_n-\varphi_n)-\lambda_n(yf_{n-1}-\varphi_{n-1})+\mu_n(yf_{n-2}-\varphi_{n-2})=0.$$

Отсюда, замѣчая, что въ разсматриваемомъ нами случаѣ $\lambda_n=1$, $\mu_{2\nu}=a_{2\nu}x$, получаемъ:

$$(19)\ldots\ldots(yf_{2\nu}-\varphi_{2\nu})-(yf_{2\nu-1}-\varphi_{2\nu-1})+a_{2\nu}x(yf_{2\nu-2}-\varphi_{2\nu-2})=0.$$

Полагая вообще (см. стр. 133, равенство (16))

$$(20)\ldots\ldots\ldots\ldots yf_n-\varphi_n=-a_1\,a_2\ldots\ldots a_{n+1}x^{n+1}(1+z)^{n+2}.\ W_n\,,$$

получимъ по формулѣ (19):

$$-\,a_1\,a_2\ldots\ldots\ldots a_{2\nu+1}x^{2\nu+1}(1+z)^{2\nu+2}.\ W_{2\nu}+$$

$$+a_1a_2\ldots a_{2\nu}x^{2\nu}(1+z)^{2\nu+1}.\ W_{2\nu-1}-a_1\,a_2\ldots a_{2\nu}x^{2\nu}(1+z)^{2\nu}W_{2\nu-2}=0.$$

Сокративъ это ур-іе на $-a_1a_2\ldots a_{2\nu}x^{2\nu}(1+z)^{2\nu}$, подставивши $\dfrac{4z}{(1+z)^2}$ вмѣсто x и $\dfrac{\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{(2\nu-1+\gamma)(2\nu+\gamma)}$ вмѣсто $a_{2\nu+1}$, найдемъ:

$$\frac{4\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{(2\nu-1+\gamma)(2\nu+\gamma)}z.\ W_{2\nu}-(1+z).\ W_{2\nu-1}+W_{2\nu-2}=0,$$

и слѣдовательно

$$(1+z)W_{2\nu-1}=\frac{4\nu(\nu-1+\gamma-\alpha)}{(2\nu-1+\gamma)(2\nu+\gamma)}z.\ W_{2\nu}+W_{2\nu-2}.$$

Отсюда

$$(1+z)\,lim\,(W_{2\nu-1})_{\nu=\infty}=z\,lim(W_{2\nu})_{\nu=\infty}+lim(W_{2\nu-2})_{\nu=\infty}$$

$$=z(1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\gamma-\alpha-\frac{3}{2}}+(1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\gamma-\alpha-\frac{3}{2}},$$

$$\lim(W_{2\nu-1})_{\nu=\infty}=(1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\gamma-\alpha-\frac{3}{2}}.$$

Итакъ вообще, при условіи $Mod(z)<1$,

$$\lim(W_n)_{n=\infty}=(1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\gamma-\alpha-\frac{3}{2}}$$

Раздѣляя обѣ части равенства (20) на f_n и вставляя $\frac{4z}{(1+z)^2}$ вмѣсто x, получимъ:

$$(21)\ldots\ldots y-\frac{\varphi_n}{f_n}=-a_1a_2\ldots\ldots a_{n+1}(4z)^{n+1}\cdot\frac{W_n}{(1+z)^n\cdot f_n}$$

Не трудно доказать, что правая часть этого равенства имѣетъ предѣломъ нуль, когда n стремится къ ∞, при условіи $Mod(z)<1$.

Полагаемъ
$$Mod(z)=\frac{1-\eta}{1+\eta},$$

причемъ η означаетъ положительную величину между 0 и 1, приближающуюся къ нулю по мѣрѣ того, какъ $Mod(z)$ приближается къ 1.

Можно опредѣлить число ρ такимъ образомъ, что при $k\geqq\rho$

$$Mod(4a_{2k})=Mod\left[\frac{4(k+\alpha)(k-1+\gamma)}{(2k-2+\gamma)(2k-1+\gamma)}\right]<1+\eta$$

$$Mod(4a_{2k+1})=Mod\left[\frac{4k(k-1+\gamma-\alpha)}{(2k-1+\gamma)(2k+\gamma)}\right]<1+\eta$$

или, иначе, при $m\geqq2\rho$

$$Mod(4a_m)<1+\eta.$$

Слѣдовательно (при $n\geqq2\rho$)

$$Mod[a_1a_2\ldots a_{n+1}(4z)^{n+1}]<Mod[a_1a_2\ldots a_{2\rho-1}(4z)^{2\rho-1}](1+\eta)^{n+2-2\rho}[Mod(z)]^{n+2-2\rho}$$

или, если положимъ $Mod[a_1a_2\ldots\ldots\ldots a_{2\rho-1}(4z)^{2\rho-1}]=p$,

причемъ p — величина конечная, и внесемъ $\frac{1-\eta}{1+\eta}$ вмѣсто $Mod(z)$,

$$Mod\left[a_1 a_2 \ldots . a_{n+1}(4z)^{n+1}\right] < p(1-\eta)^{n+2-2p}$$

При n безконечно большомъ правая часть этого неравенства, а значитъ и лѣвая,—величина безконечно малая. Слѣдовательно произведеніе

$$-a_1 a_2 \ldots . a_{n+1}(4z)^{n+1}$$

стремится къ нулю, когда n безпредѣльно возрастаетъ.

Далѣе,

$$lim\left[\frac{W_n}{(1+z)^n f_n}\right]_{n=\infty} = \frac{(1+z)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\gamma-\alpha-\frac{3}{2}}}{(1+z)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1-z)^{\alpha+\frac{1}{2}-\gamma}} = (1+z)^{2\alpha}(1-z)^{2\gamma-2\alpha-2},$$

и такимъ образомъ изъ равенства (21) слѣдуетъ, что

$$y - lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty} = 0$$

или

$$lim\left(\frac{\varphi_n}{f_n}\right)_{n=\infty} = y$$

при условіи $Mod(z) < 1$. Это условіе будетъ, какъ извѣстно, выполняться, если только будутъ исключены для x значенія $+1 \ldots . +\infty$. Итакъ для всѣхъ значеній x, кромѣ дѣйствительныхъ значеній, лежащихъ между $+1$ и $+\infty$, найденная нами непрерывная дробь — сходящаяся и представляетъ собою ту ф-цію, которая удовлетворяетъ дифференціальному ур-ію

$$x(x-1)\frac{dy}{dx} + (ax - \gamma + 1)y + \gamma - 1 = 0$$

и для значеній x, удовлетворяющихъ условію $Mod(x) < 1$, выражается рядомъ $F(\alpha, 1, \gamma, x)$.

ОПЕЧАТКИ.

СТРАН.	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО:	ДОЛЖНО БЫТЬ:
8	13	$\varphi_{n+1}=\lambda_{n+1}\varphi_n-\mu_{n+1}\varphi_{n+1}$	$\varphi_{n+1}=\lambda_{n+1}\varphi_n-\mu_{n+1}\varphi_{n-1}$
—	15	$\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$	$\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n+1}$
12	.1	члонъ	членъ
—	20	доказательствъ	доказательства
14	1	завизимостей	зависимостей
—	19	многочленовъ.	многочленовъ
18	6	представитьь	представить
19	20	степнинямъ	степенямъ
22	30	поэффиціентами	коэффиціентами
26	10	переняся	перенеся
—	24	Замѣчая	Замѣчая,
27	8	коэфиціенты	коэффиціенты
29	7	(20)	(20),
32	13и14	и формула (25)	———— (не читать)
33	11	рядъ	рядъ,
—	19	цѣлóе	цѣлое
36	4	$2\frac{\varphi_n}{f_n}+\left(\frac{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}{x}\right)+\left(\frac{2\sum^{s=n+1} i_s}{x^{n+1}}\right)$	$2\frac{\varphi_n}{f_n}\left(\frac{\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}{x}\right)+\left(\frac{2\sum_{s=1}^{s=n+1} i_s}{x}\right)$
53	16	уговлетворяетъ	удовлетворяетъ
57	3	θ_{-1}	$\theta_{\nu-1}$
60	11	$z_k\frac{dv}{dz}$	$z^k\frac{dv}{dz}$
61	6	(11) сокративши	(11) и сокративши
76	3	соотношенія,	соотношенія:
77	7	и такъ какъ B_0,	и такъ какъ $B_0=0$,

СТРАН.	СТРОКА	НАПЕЧАТАНО:	ДОЛЖНО БЫТЬ:
83	18	$\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$	$\frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$
87	21	заключаемъ что	заключаемъ, что
—	22	равенства (γ) есть	равенства (γ), есть
88	15	членамъ	членомъ
89	13	цолучаемъ	получаемъ
99	14	сходящая	сходящаяся
112	22	сократить на $(1+)z^{-n+2}$	сократить на $(1+z)^{-n+2}$
126	3	имѣетъ слѣдовательно,	имѣетъ, слѣдовательно,



Théorie des équations générales.

PAR

A. Starkoff.

L'illustre Cauchy a donné le nom de fonctions alternées[1]) aux éxpressions qui, pour une permutation mutuelle de deux variables indépendantes, changent de signe sans changer de valeur absolue. Par analogie, dans la théorie des déterminants, on attribue le nom de *déterminant alterné* ou *alternant* à celui, dans lequel tous les éléments de chaque colonne verticale (ou tous les éléments de chaque ligne horizontale) sont des fonctions de la même variable indépendante[2]). En conséquence la permutation mutuelle de deux variables indépendantes est équivalente au déplacement de deux colonnes verticales (ou de deux lignes horizontales, si le déterminant est disposé suivant les lignes horizontales); donc, le dêterminant change de signe et c'est de là que vient le nom de déterminant alterné (alternant). Le but de l'article présent est d'indiquer quelques unes des propriétés des déterminants alternés (alternants) ainsi que leur application aux équations.

---

[1]) *Cauchy.* Sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales etc. Journal de l'École Polytechn. cah. XVIII p. 29.

[2]) *Muir.* A treatise on the treory of determinants. London 1882, p. 161 etc.

I.

L'alternant, qui est considéré ici, est disposé suivant les colonnes de la manière suivante

$$\begin{vmatrix} z^{(0)}, & z_1^{(0)}, & z_2^{(0)}, & \ldots & z_n^{(0)} \\ z^{(1)}, & z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & \ldots & z_n^{(1)} \\ z^{(2)}, & z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & \ldots & z_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z^{(n)}, & z_1^{(n)}, & z_2^{(n)}, & \ldots & z_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (I)$$

c'est-à dire tous les éléments de la première colonne sont des fonctions données de la même variable indépendante; tous les éléments de la seconde colonne sont les mêmes fonctions de la seconde variable indépendante etc., tous les éléments de la n-ème colonne sont des fonctions de la n-ème variable indépendante, identiques aux fonctions de la première colonne. Il est bien entendu, que les résultats exposés dans cet article ne changent pas dans le cas où la disposition du déterminant ci dessus indiquée sera faite non suivant les colonnes, mais suivant les lignes[3]).

Les fonctions d'une variable indépendante qui composent ici les éléments de chaque colonne, doivant avoir les propriétés suivantes:

1. Des éléments d'une ligne quelconque soit de la m-éme d'en haut nous pouvons déduire les éléments corréspondants de deux lignes voisines: nous aurons les éléments de la ligne inférieure, $(m+1)$—éme, par des opérations déterminées, dont nous désignons l'ensemble par K, et nous aurons les éléments

[3]) Les resultats ci-dessous exposés ne changent pas non plus dans le cas, l'on substitue aux variables indépendantes des fonctions différentes pour chaque colonne d'une ou de plusieurs variables indépendantes.

de la ligne supérieure, $(m-1)$—éme par des opérations inverses que nous désignons par K^{-1}. Donc

$$K(z^{(m)})=z^{(m+1)},\ K(z_1^{(m)})=z^{(m+1)},\ldots K(z^{(m)})=z_n^{(m+1)}$$

et d'autre part

$$K^{-1}(z^{(m)})=z^{(m-1)},\ K^{-1}(z_1^{(m)})=z_1^{(m-1)},\ldots K^{-1}(z_n^{(m)})=z_n^{(m-1)}$$

Il s'en suit:

A. Des éléments d'une ligne donnée on peut déduire tous les éléments corréspondants des lignes supérieures par un nombre déterminé d'opérations K^{-1} et les éléments corréspondants des lignes inférieures par un nombre déterminé d'opérations K, en désignant ce nombre de répétitions des opérations K^{-1} et K par un exposant, savoir

$$K(K(K\ldots K(z^{(m)}))\ldots))=K^q(z^{(m)})=z^{(m+q)}$$

et d'autre part

$$K^{-1}(K^{-1}(K^{-1}\ldots K^{-1}(z^{(m)})\ldots))=K^{-q}(z^{(m)})=^{(m-q)}$$

B. De la première ligne d'en haut on peut déduire toutes les autres lignes par un nombre des opérations K, égal à leur indice. De la première ligne d'en bas on peut déduire toutes les autres lignes par le nombre des opérations égal à la différence des indices de la dernière ligne et de la ligne obtenue.

2. Les opérations désignées par K et leurs inverses désignées par K^{-1} doivent satisfaire indifféremment aux conditions

$$K^{-1}(K(a))=K(K^{-1}(a))=a \text{ et } K^{-n}(K^m(a))=K^m(K^{-n}(a))=K^{m-n}(a)$$

II.

Pour le déterminant d'orde n, qui satisfait aux conditions ci-dessus indiquées, on peut facilement démontrer le theoréme suivant:

Theoréme I. *La substitution à un élément d'une horizontale quelconque d'un des élémens restants de la même horizontale réduit le déterminant donné* (I) *à zéró.*

Supposons que pour $z^{(m)}$ nous mettons $z_p^{(m)}$ où p a l'une des valeurs 1, 2, 3,... n. En vertu de ce qui a été dit plus haut nous avons

$$z^{[m+(q)]}=K^{(q)}(z^{(m)})=K^{(q)}(z_p^{(m)})=z_p^{[m+(q)]}$$

où q a des valeurs positives ou négatives. Donc par la substitution de l'élément $z_p^{(m)}$ à l'élément $z^{(m)}$, deux colonnes du déterminant en question deviennent égales entre elles et le déterminant se réduit à zero. C. q. f. d.

Il est évident, que le déterminant (I) se réduit encore à zéro par la substitution à $z^{(m)}$ d'un des produits.

$$B_1z_1^{(m)},\ B_2z_2^{(m)},\ldots\ldots B_nz_n^{(m)}$$

si tous les B_1, $B_2,\ldots B_n$ ne dépendent pas des opérations K et K^{-1}. c'est-à-dire si la condition.

$$K^{(q)}[B_pz_{(p)}^{(m)}]=B_pK^{(q)}(z_p^{(m)})$$

est remplie.

La sommes des produits

$$B_1z_1^{(m)}+B_2z_2^{(m)}+\ldots\ldots+B_nz_n^{(m)}$$

substituée à $z^{(m)}$ réduit aussi le déterminant (I) à zéro, si la condition

$$K^{(q)}[B_1z_1^{(m)}+B_2z_2^{(m)}+\ldots+B_nz_n^{(m)})=B_1K^{(q)}(z_1^{(m)})+B_2K^{(q)}(z_2^{(m)}\ldots+$$
$$\ldots+B_nK^{(q)}(z_n^{(m)})$$

est remplie

D'autre part la substitution à $z^{(m)}$ de toute autre quantité a, prise arbitrairement, msis différente des autres élé-

ments $z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots z_n^{(m)}$ de la même ligne et n'ayant pas avec ces éléments de certaines rélations foctionnelles, ne peut pas réduire le déterminant (I) à zéro. Donc

Theoréme II. *Il n'existe que* n *valeurs différentes et indépendantes entre elles pour un élément quelconque du déterminant* (I) *d'ordre* n, *qui réduisent ce déterminant à zéro.*

Ces valeurs sont les élémerts restants de la même ligne.

Il suit de ce qui a été dit ci-dessus que de n eléments donnés et choisis arbitrairement $y_1, y_2 \ldots y_n$, en y ajoutant l'élément indéterminé y, on peut former le déterminant (I); à cet effet il faut faire subir à chacune des quantités $y, y_1, y_2 \ldots y_n$ les opératians K et K^{-1} en quantité necéssaire, ces opérations pouvant aussi être données, mais devant seulement satisfaire aux conditions ci-dessus enoncées. Le determinant ainsi composé se réduit n fois à zéro pour

$$y=y_1,\ y=y_2,\ y=y_3 \ldots y=y_n$$

Pour toutes les autres valeurs de y ce déterminant ne se réduit pas à zéro [1]).

III.

On sait par la théorie des déterminants que chaque déterminant peut se développer suivant une colonne quelconque en une expression linéaire. Le déterminant (I) se développe suivant la premiére colonne en une expression linéaire

$$A_0 z^{(n)} + A_1 z^{(n-1)} + A_2 z^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} z^{(1)} + A_n z^{(0)} \qquad \text{(III)}$$

dans laquelle les coéfficients $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$ sont les mineurs du déterminant (I) et n'ont pas de $z^{(n)}, z^{(n-1)}, \ldots$

[1]) Il est bien entendu, que les éléments donnés $y_1, y_2, \ldots y_n$ et l'indéterminé y se distribuent toujours en lignes, par ce qu'en donnant la colonne, on ne peut pas former le déterminant (I).

$z^{(1)}$, $z^{(0)}$. L'expression linéaire (III) se réduit à zéro avec le déterminant (I), chaque fois que l'on substitue à $z^{(m)}$ l'un des éléments de la même ligne. Donc

Il y a seulement n *valeurs différentes et indépendantes entre elles pour* $z^{(m)}$, *qui réduisent à zéro l'expression linéaire* (III).

En égalant à zéro l'expression linéaire (III) et en substituant à A_0, $A_1, \ldots A_n$ leurs valeurs sans indiquer la maniére, dont elles sont composées d'éléments z_1, $z_2 \ldots z_n$ nous obtenons *une équation* de l'ordre n et las n valeurs pour $z^{(m)}$, qui réduisent l'expression (III) à zéro sout *les* n *racines* de l'équation. Resoudre une équation c'est trouver toutes les racines, c'est-à dire les valeurs de $z^{(m)}$ [5]), qui verifient identiquement cette équation.

Dans le § 2 on a montré la possibilité de composer le déterminant (I) d'ordre n de n éléments quelconques choisis arbitrairement y_1, $y_2, \ldots y_n$ et d'un élément indéterminé y (qui est inconnue dans l'équation). En développant le determinant ainsi formé en une expression linéaire, puis en calculant dans cette derniére les valeurs des mineurs A_0, $A_1, \ldots A_n$ et en l'égalant à zéro, on aura une équation. Donc avec n valeurs données, choisies arbitrairement on peut toujours former l'équation d'ordre n. En modifiant et en variant ces valeurs choisies arbitrairement et indépendantes entre elles on peut avoir des équations différentes en nombe infini, qui différent les unes des autres seulement par leurs coéfficients. Les équations ainsi obtenues oot les propriétés suivantes:

1. *L'équation d'ordre* n *a seulement* n *racines, c'est-à'dire* n *valeurs de l'inconnue indépendantes entre elles, qui verifient identiquement l'équation.*

---

[5]) Par les propiétés des opérations K on détermine celle des valeurs $z^{(0)}$, $z^{(1)}$, $z^{(2)} \ldots z^{(n)}$ dans laquelle on doit chercher la résolution de l'équation donnée. Dans les équations algébriques on cherche la valeur de $z^{(1)}$ dans les équations différentielles linéaires la valeur de $z^{(0)}$.

2. *Les sommes des racines, multipliées par des valeurs indépendantes des opérations* K (si les conditions indiquées au § 2 sont remplies), *peuvent aussi satisfaire à l'équation.*

3. *Les coéfficients de l'équation d'ordre* n *sont les fonctions de ses racines, formées comme les mineurs du déterminant de* $(n+1)^2$ *éléments.*

La question inverse, c'est-à-dire la formation d'un déter minant de l'expession linéaire donnée ou de l'équation donnée exige la resolution complete de cette dernière, savoir la recherche de toutes ses racines.

IV.

Jusqu'ici les opération K ont été limitées par la condition de reciprocité mutuelle de K et K^{-1} et les propriétés cidéssus indiquées conviennent aux équations de la forme générale. Pour les recherches, qui suivent, il faut encore inscrire pour les opérations K la condition

$$K(u^{(0)}v^{(0)})=v^{(0)}K(u^{(0)})+u^{(0)}K(v^{(0)})$$

et en général [6])

$$K^m(u^{(0)}.v^{(0)})=v^{(0)}K^m(u^{(0)})+mK(u^{(0)})K^{m-1}(u^{(0)})+$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}K^2(v^{(0)})K^{m-1}(u^{(0)})+\ldots+\frac{m(m-1)}{1.2}K^{m-1}(v^{(0)})K^2(u^{(0)})+$$
$$+mK^{m-1}(v^{(0)})K(u^{(0)})+u^{(0)}K^m(v^{(0)}).$$

---

[6]) Pour les équations algébrique les opérations K désignent une multiplication de la forme

$$K(z^p)=z^p.\,z=z^{p+1},\quad K^q(z^p)=z^p.\,z^q=z^{p+q}$$

et la propriété introduite dans le texte devient

$$K(u^0.v^0)=v^0\,K(u^0)+u^0K(v^0)=1.\,u+1.\,v=1(u+v)=u+v$$

par ce que nous savons que $v^0.u=1$: ensuite

$$K^2(u^0.v^0)=v^0K^2(u^0)+2K(v^0).K(u^0)+u^0K^2(v^0)=1.u^2+2v.u+1.v^2=1.(u+v)(u+v)=(u+v)^2$$

Donc dans ce cas K équivaut à une multiplication par $u+v$.

Pour les équations différentielles linéaires et les équations en différences linéaires la signification de K est évidente.

En adoptant cette condition pour les opérations K nous pouvons démontrer deux propriétés importantes des équations d'ordre n. En premier lieu:

Theoréme III. *Dans l'équation d'ordre* n *on peut faire disparaitre le coéfficient* A_{n-m} *quelconque de l'inconnue avec l'indice* m *de* $z^{(m)}$ *ce qui exige la résolution de l'équation d'ordre* n—m.

En d'autres termes:

Une équation d'ordre n *peut se transformer en une autre du même ordre, qui n'a plus de terme renfermant l'inconnue avec l'indice* m *et cela n'exige que la recherche d'une seule racine de l'équation d'ordre* n—m.

La seconde propriété:

Theoréme IV. *Étant données* m *racines de l'équation d'ordre* m, *pour avoir les* n — m *racines restantes il faut résoudre une équation d'ordre* n—m.

Ou: *Si on connait* m *racines de l'équation d'ordre* n *on peut abaisser son ordre de* m *unités.*

Pour démontrer ces deux théorèmes il faut remplacer dans l'équation d'ordre n

$$A_0 z^{(n)} + A_1 z^{(n-1)} + A_2 z^{(n-2)} + \ldots + A_{n-1} z^{(1)} + A_n z^{(0)} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

l'inconnue $z^{(0)}$ par le produit de deux indéterminées $u^{(0)}$ et $v^{(0)}$ dont l'une est tout-à-fait arbitraire, mais dont la seconde se détermine par la formule

$$z^{(0)} = u^{(0)}.v^{(0)}$$

ou par une autre formule quelconque, qui en provient.

En se fondant sur la propriété mentionnée des opérations K nous avons

$$z^{(0)} = u^{(0)}.v^{(0)}$$

$$z^{(1)} = K(z^{(0)}) = K(u^{(0)}.v^{(0)}) = v^{(0)} K(u^{(0)}) + u^{(0)} K(v^{(0)}) = v^{(0)} u^{(1)} + u^{(0)} v^{(1)}$$

$$z^{(2)} = K^2(z^{(0)}) = K^2(u^{(0)}.v^{(0)}) = v^{(\ )}.u^{(\ )} + 2 v^{(1)}.u^{(1)} + u^{(0)} v^{(2)}$$

et en général

$$z^{(m)}=K^{(m)}(z^{(0)})=K^{(m)}(v^{(0)}.u^{(0)})=v^{(0)}.u^{(m)}+mv^{(1)}u^{(m-1)}+$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}v^{(2)}u^{(m-1)}+\ldots+\frac{m(m-1)}{1.2}v^{(m-1)}u^{(2)}+mv^{(m-1)}v^{(1)}+u^{(0)}v^{(m)}$$

En substituant ces valeurs des $z^{(0)}$, $z^{(1)}\ldots z^{(n)}$ dans l'équation (IV) et en disposant ses termes suivant les indices de la lettre u, nous avons [7])

---

[7]) Il est plus commode de disposer l'équation obtenue dans l'ordre inverse, savoir

$$[A_0v^{(n)}+A_1v^{(n-1)}+A_2v^{(n-2)}+\ldots+A_{(n-2)}v^{(2)}+A_{n-1}v^{(1)}+A_nv^{(0)}]\,u^{(0)}+$$

$$+\frac{1}{1}[nA_0v^{(n-1)}+(n-1)A_1v^{(n-2)}+(n-2)A_2v^{(n-3)}+\ldots+2A_{n-2}v^{(1)}+A_{n-1}v^{(0)}]u^{(1)}+$$

$$+\frac{1}{1.2}[n(n-1)A_0v^{(n-2)}+(n-1)(n-2)A_1v^{(n-3)}+2.1\,A_{n-2}v^{(0)}]u^{(2)}+$$

....

$$+\frac{1}{1.2.3..\,m}[n(n-1)\ldots(n-m+1)A_0v^{(n-m)}+(n-1)(n-2)\ldots(n-m)A_1v^{(n-m-1)}+\ldots$$

$$\ldots\ldots+(n+1)m\ldots3.2A_{n-m+1}v^{(1)}+m(m-1)\ldots3.2.1A_{n-m}v^{(0)}]u^{(m)}+$$

....

$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}[n(n-1)\ldots3.2A_0v^{(1)}+(n-1)(n-2)\ldots3.2.1A_1v^{(0)}]u^{(n-1)}+$$

$$+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n}n(n-1)\ldots3.2.1A_0v^{(0)}u^{(n)}=0$$

Par cette disposition il est facile de voir, comment se forment les coéfficients de cette transformation.

En mettant dans l'équation (IV) v au lieu de z nous avons le coéfficient du premier terme, savoir de $u^{(0)}$.

En différentiant le coéfficient de $u^{(0)}$ par rapport à v, en adoptant leurs indices pour exposants, en prenant les coéfficients $A_0, A_1, \ldots A_{(n)}$ pour des quantités constantes et en divisant par 1, nous aurons le coéfficient de $u^{(1)}$.

En différentiant le coéfficient de $u^{(0)}$ deux fois dans les mêmes condi-

$$A_0 v^{(0)}.u^{(n)}+$$

$$+[nA_0 v^{(1)}+A_1 v^{(0)}]u^{(n-1)}+$$

$$+\left[\frac{n(n-1)}{1.2}A_0 v^{(2)}+(n-1)A_1 v^{(1)}+A_2 v^{(0)}\right]u^{(n-2)}+ \qquad (3)$$

....

$$+\left[\frac{n(n-1...(m+1)}{1.2.3...(n-m)}A_0 v^{(n-m)}+\frac{(n-1)(n-2)...(m+1)}{1.2.3...(n-m-1)}A_1 v^{(n-m-1)}+...\right.$$

$$\left. ...+(m+1)A_{n-m+1}v^{(1)}+A_{n-m}v^{(0)}\right]u^{(m)}+$$

....

$$+[nA_0 v^{(n-1)}+(n-1)A_1 v^{(n-2)}+(n-2)A_2 v^{(n-3)}+....$$

$$....+2A_{n-2}v^{(1)}+A_{n-1}v^{(0)}]u^{(1)}+$$

$$+[A_0 v^{(n)}+A_1 v^{(n-1)}+A_2 v^{(n-2)}+...+A_{n-1}v^{(1)}+A_n v^{(0)}]u^{(0)}=0$$

Dans cette transformation les coéfficients de u sont des équations d'ordre $n-m$ semblable à l'équation donnée, c'est-à dire d'un ordre qui se détermine par la différence entre n et l'indice de u.

Par condition l'une des valeurs u ou v peut être choisie arbitrairement: dans le cas donné en vertu de la disposition de l'expression (3) nous donnerons à v une valaur arbitraire. Déterminons v, $v^{(0)}=v_m^{(0)}$ étant une racine d'une équation, dont

---

tions et en divisant le résultat par le produit 1.2 on aura le coéfficient de $u^{(2)}$ etc.

En général le coéfficient de $u^{(m)}$ peut être obtenu du coéfficient de $u^{(0)}$ par des différentiations m fois repétés de ce dernier coéfficient par rapport à v en adoptant les indices de v pour exposants, en prenant les coéfficients A_0, A_1,....$A_{(n)}$ pour des quantités constantes et en divisant le résultat par le produit 1.2.3....m.

Il est bien entendu, que dans toutes les différentiations $v^{(0)}$ est prise pour constante de la même manière qu'une quantité avec l'exposant zéro.

la première partie est le coéfficient de $u^{(m)}$. Il est évident que la substitution de cette valeur dans l'expression (3) la réduit à une équation d'ordre n par rapport à u, qui n'a pas de terme contenant $u^{(m)}$, et les racines de l'équation primitive sont facilement déduites des racines de cette dernière par la formule $z^{(0)}=u^{(0)}.v^{(0)}$ c. q. f. d.

Il faut observer, que pour la disparition du terme en $z^{(n)}$ ou $u^{(n)}$ il est nécéssaire

$$A_0v^{(0)}=0$$

ce qui est impossible, par ce que A_0 est différent de zéro et $v^{(0)}=0$ entraine $z^{(0)}=0$.

D'autre part la disparition du terme en $u^{(0)}$ exige pour $v^{(0)}$ une valeur déterminée par l'équation

$$A_0v^{(n)}+A_1v^{(n-1)}+A_2v^{(n-2)}+\ldots+A_{n-2}v^{(2)}+A^{n-1}v^{(1)}+A_nv^{(0)}=0$$

c'est-à-dire égale à la racine de l'équation primitive.

Si nous supposons, que l'une des racines de l'équation est connue, par exemple $z_1^{(0)}$, en faisant $v^{(0)}=z_1^{(0)}$ dans la formule $z^{(0)}=u^{(0)}.v^{(0)}$ on peut annuler le terme en $u^{(0)}$ et l'équation primitive sera

$$B_0u^{(n)}+B_1u^{(n-1)}+B_2u^{(n-2)}+\ldots+B_{n-2}u^{(2)}+B_{n-1}u^{(1)}=0 \qquad (4)$$

en posant ici

$$u^{(0)}=K^{-1}(w^{(0)})$$

on trouve

$$u^{(n)}=w^{(n-1)},\ u^{(n-1)}=w^{(n-2)},\ u^{(n-2)}=w^{(n-3)},\ldots u^{(2)}=w^{(1)},\ u^{(1)}=w^{(0)}$$

et l'équation (4) sera

$$B_0w^{(n-1)}+B_1w^{(n-2)}+B_2w^{(n-3)}+\ldots+B_{n-2}w^{(1)}+B_{n-1}w^{(0)}=0 \quad (4_1)$$

qui est d'ordre $n-1$. En connaissant les racines $w_1^{(0)},w^{(0)}\ldots w_{(n-1)}^{(0)}$ de cette équation nous avons par les formules

$$z^{(0)}=v^{(0)}.u^{(0)}, \quad v^{(0)}=z_1^{(0)} \quad \text{et} \quad u^{(0)}=K^{-1}(w^{(0)})$$

les racines de l'équation primitive sous la forme suivante

$$z_1^{(0)}=z_1^{(0)}$$

$$z_2^{(0)}=z_1^{(0)}K^{-1}(w_1^{(0)})$$

$$z_3^{(0)}=z_1^{(0)}K^{-1}(w_2^{(0)})$$

. . . .

$$z_n^{(0)}=z_1^{(0)}K^{-1}(w_{n-1}^{(0)})$$

Donc si l'une des racines de l'équation primitive est connue, son ordre peut être abaissé d'une unité.

Soient connues deux racines de l'équation primitive $z_1^{(0)}$ et $z_2^{(0)}$: en les substituant dans la formule

$$z_2^{(0)}=z_1^{(0)}K^{-1}(w^{(0)})$$

on peut déterminer l'un des valeurs de $w^{(0)}$, par exemple $w^{(0)}$, sous la forme suivante [8])

$$w_1^{(0)}=K\left(\frac{z_2^{(0)}}{z_2^{(0)}}\right)=\begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \end{vmatrix}$$

---

[8]) Il faut indiquer ici quelques propriétés du symbole K relatives aux fractions et aux déterminants.

De la propriété mentionnée du symbole K

$$K(u^{(0)}.\, v^{(0)})=v^{(0)}K(u^{(0)})+u^{(0)}K(v^{(0)})$$

ii est facile de trouver la valeur $K\left(\frac{u^{(0)}}{v^{(0)}}\right)$: en posant $\frac{u^{(0)}}{v^{(0)}}=x^{(0)}$, nous avons $u^{(0)}=x^{(0)}.\, v^{(0)}$ et

$$K(u^{(0)})=K(x^{(0)}.\, v^{(0)})=v^{(0)}K(x^{(0)})+x^{(0)}K(v^{(0)})$$

$$\text{d'où} \quad K(x^{(0)})=K\left(\frac{u^{(0)}}{v^{(0)}}\right)=\frac{v^{(0)}K(u^{(0)})-u^{(0)}K(v^{(0)})}{[v^{(0)}]^2}$$

En connaissant l'une des racines de l'équation (4_1) on peut, conformément à ce qui précède abaisser son ordre d'une unité en posant

$$w^{(0)} = w_1^{(0)} K^{-1}(t^{(0)})$$

et on aura

$$C_0 t^{(n-2)} + C_1 t^{(n-3)} + C_2 t^{(n-4)} + \ldots + C_{n-3} t^{(1)} + C_{n-2} t^{(0)} = 0 \quad (5)$$

L'application de cette formule aux équations différentielles est evidente; pour les équations algebriques on a

$$K\left(\frac{u^{(0)}}{v^{(0)}}\right) = 1.(u=v) = u-v$$

Pour la recherche des propriétés du symbole K relatives au déterminants R_{n-1} de la forme (I) nous emploierons la décomposition connue du déterminant en multiplicateurs linéairs (*Scott.* A treatise on the theory of determinants, Cambridge 1880 p. 12, 13; *Muir.* Ibid. pag. 146 et 147.

$$R_n = a_0.a_1.a_2 \ldots a_{n-2} a_{n-1}$$

où

$$a_p = s_1^{(p)} e_1 + s_2^{(p)} e_2 + \ldots + s_{n-2}^{(p)} e_{n-2} + s_{n-1}^{(p)} e_{n-1} + s_n^{(p)} e_n$$

De la propriété indiquée du symbole K relative ou produit on a

$$K(R_n) = K(a_0.a_1.a_2 \ldots a_{n-1}) = K(a_0).a_1.a_2 \ldots a_{n-1} + a_0.K(a_1).a_2 \ldots a_{n-2}.a_{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_0.a_1.a_2 \ldots K(a_{n-2}).a_{n-1} + a_0.a_1.a_2 \ldots a_{n-2}.K(a_{n-1})$$

Or $e_1, e_2, e_3, \ldots e_n$ ne dépendent pas des opérations K, donc

$$K(a_0) = a_1,\ K(a_1) = a_2, \ldots K(a_{n-2}) = a_{n-1},\ K(a_{n-1}) = a_n$$

et dans tous les determinants de la somme precédénte, excepté le dernier, on aura deux lignes égales; donc tous les termes de la somme sont égaux à zéro, excepté le dernier et nous avons

$$K\begin{vmatrix} s_1^{(0)}, & s_2^{(0)}, \ldots & s_n^{(0)} \\ s_1^{(1)}, & s_2^{(1)}, \ldots & s_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^{(n-2)}, & s_2^{(n-2)}, \ldots & s_n^{(n-2)} \\ s_1^{(n-1)}, & s_2^{(n-1)}, \ldots & s_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1^{(0)}, & s_2^{(1)}, \ldots & s_n^{(0)} \\ s_1^{(1)}, & s_2^{(1)}, \ldots & s_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^{(n-2)}, & s_2^{(n-2)}, \ldots & s_n^{(n-2)} \\ s_1^{(n)}, & s_2^{(n)}, \ldots & s_n^{(n)} \end{vmatrix} = \frac{\partial R_n}{\partial s_{n+1}^{(n-1)}}$$

où R_n est un déterminant analogue avec $(n+1)^2$ éléments.
Par la même voie il est facile de trouver la valeur de $K^q(R_{n-1})$ etc.

En outre il est facile d'obtenir la valeur de

une équation d'ordre $n-2$, qui détermine les valeurs de $t^{(0)}$ et avec elles les racines de l'équation primitive.

$$K\frac{\left|\begin{array}{cccc} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)},\ldots & z_{n-1}^{(0)}, & z_{n+1}^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)},\ldots & z_{n-1}^{(1)}, & z_{n+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)}, & z_2^{(n-1)},\ldots & z_{n-1}^{(n-1)}, & z_{n+1}^{(n-1)} \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cccc} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)},\ldots & z_{n-1}^{(0)}, & z_n^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)},\ldots & z_{n-1}^{(1)}, & z_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)}, & z_2^{(n-1)},\ldots & z_{n-1}^{(n-1)}, & z_n^{(n-1)} \end{array}\right|}=$$

$$=\left|\begin{array}{ccc} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)},\ldots & z_{n-1}^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)},\ldots & z_{n-1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-2)}, & z_2^{(n-2)},\ldots & z_{n+1}^{(n-2)} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{ccccc} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)},\ldots & z_{n-1}^{(0)}, & z_n^{(0)}, & z_{n+1}^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)},\ldots & z_{n-1}^{(1)}, & z_n^{(1)}, & z_{n+1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-2)}, & z_2^{(n-2)},\ldots & z_{n-1}^{(n-2)}, & z_n^{(n-2)}, & z_1^{(n-2)} \\ z_1^{(n-1)}, & z_2^{(n-1)},\ldots & z_{n-1}^{(n-1)}, & z_n^{(n-1)}, & z_{n+1}^{(n-1)} \\ z_1^{(n)}, & z_2^{(n)},\ldots & z_{n-1}^{(n)}, & z_n^{(n)}, & z_{n+1}^{(n)} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{cccc} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)},\ldots & z_{n-1}^{(0)}, & z_n^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)},\ldots & z_{n-1}^{(1)}, & z_1^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-2)}, & z_2^{(n-2)},\ldots & z_{n-1}^{(n-2)}, & z_n^{(n-2)} \\ z_1^{(n-1)}, & z_2^{(n-1)},\ldots & z_{n-1}^{(n-1)}, & z_n^{(n-1)} \end{array}\right|^{-2}$$

En effet, en désignant par R'_{n-1} et R_{n-1} deux déterminants, qui se trouvent sous le signe du symbole K, on aura

$$K\left(\frac{R'_{n-1}}{R_{n-1}}\right)=\frac{R_{n-1}K(R'_{n-1})-R'_{n-1}K(R_{n-1})}{(R_{n-1})^2}$$

Par suite, en dessignant par R_{n-2} et R_n des déterminants analogues avec $(n-1)^2$ et $(n+1)^2$ eléménts nous avons

$$R_{n-1}=\frac{\partial R_n}{\partial z_n^{(n)}},\ R_{n-1}=\frac{\partial R_n}{\partial z_{n+1}^{(n)}},\ K(R'_{n-1})=\frac{\partial R_n}{\partial z_n^{(n-1)}},\ K(R_{n-1})=\frac{\partial R_n}{\partial z_{n+1}^{(n-1)}}$$

et le numerateur de la formule précédente conformémant à une propriété connue (*Brioschi.* Théorie de determinants Paris, 1856, pag. 13. *Muir.* Ibid. pag. 32) peut être remplacé par l'expression

$$\frac{\partial R_n}{\partial z_{n+1}^{(n)}}\cdot\frac{\partial R_n}{\partial z_n^{(n-1)}}-\frac{\partial R_n}{\partial z_n^{(n)}}\cdot\frac{\partial R_n}{\partial z_{n+1}^{(n-1)}}=\frac{\partial^2 R}{\partial z_n^{(n-1)}\partial z_{n+1}^{(n)}}R_n \text{ donc } K\left(\frac{R'_{n-1}}{R_{n-1}}\right)=R_{n-2}.R_n.(R_{n-1})^{-2}$$

c. q. f. d.

Connaissant les racines de l'équation (5) nous obtenons le système des racines de l'équation primitive sous la forme

$$z_1^{(0)} = z_1^{(0)}$$

$$z_2^{(0)} = z_2^{(0)}$$

$$z_3^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \end{vmatrix} (z_1^{(0)})^{-2} K^{-1} (t_1^{(0)}) \right\}$$

$$z_4^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \end{vmatrix} (z_1^{(0)})^{-2} K^{-1} (t_2^{(0)}) \right\}$$

. . . .

$$z_n^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \end{vmatrix} (z_1^{(0)})^{-2} K^{-1} (t_{n-2}^{(0)}) \right\}$$

Donc si deux racines $z_1^{(0)}$ et $z_2^{(0)}$ de l'équation primitive sont connues, l'ordre de l'équation peut être diminué de deux unités.

En connaissant trois racines de l'équation primitive sa résolution peut être ramenée à la résolution de l'équation d'ordre $n-3$ de la forme

$$D_0 s^{(n-3)} + D_1 s^{(n-4)} + D_2 s^{(n-5)} + \ldots + D_{n-4} s^{(1)} + D_{n-3} s^{(0)} = 0$$

et le système des racines de l'équation primitive sera

$$z_1^{(0)} = z_1^{(0)}$$

$$z_2^{(0)} = z_2^{(0)}$$

$$z_3^{(0)} = z_3^{(0)}$$

$$z_4^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, z_2^{(1)} \end{vmatrix} \cdot (z_1^{(0)})^{-2} \overset{-1}{K} \left\{ z_1^{(0)} \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)}, & z_3^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & z_3^{(1)} \\ z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & z_3^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \end{vmatrix}^{-2} \overset{-1}{K} (s_1^{(0)}) \right\} \right\}$$

$$z_5^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, z_2^{(1)} \end{vmatrix} \cdot (z_1^{(0)})^{-2} \overset{-1}{K} \left\{ z_1^{(0)} \cdot \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)}, & z_3^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & z_3^{(1)} \\ z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & z_3^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \end{vmatrix}^{-2} \overset{-1}{K} (s_2^{(0)}) \right\} \right\}$$

. . . .

$$z_n^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, z_2^{(1)} \end{vmatrix} \cdot (z_1^{(0)})^{-2} \overset{-1}{K} \left\{ z_1^{(0)} \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)}, & z_3^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & z_3^{(1)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(2)}, & z_3^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)} \end{vmatrix}^{-2} \overset{-1}{K} (s_{n-3}^{(0)}) \right\} \right\}$$

où $s_1^{(0)}$, $s_2^{(0)}$, $s_3^{(0)}$, ... $s_{n-3}^{(0)}$ sont les racines de l'équation (6) d'ordre $n-3$.

En général, si on connait m racines de l'équation primitive, sa résolution par la méthode indiquée se ramène à celle de l'équation d'ordre $n-m$ et si on désigne en général le déterminant par

$$\begin{vmatrix} z_1^{(0)}, & z_2^{(0)}, & z_p^{(0)} \\ z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, & z_p^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(p-1)}, & z_2^{(p-1)}, \dots & z_p^{(p-1)} \end{vmatrix} = \left| z_1^{(0)}, z_p^{(p-1)} \right| \qquad (A)$$

le système des racines de l'équation primitive sera

$$z_1^{(0)} = z_1^{(0)}$$

$$z_2^{(0)} = z_2^{(0)}$$

$$\dots\dots$$

$$z_m^{(0)} = z_m^{(0)}$$

$$z_{m+1}^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \{ \left| z_1^{(0)}, z_2^{(1)} \right| . \left| (z_1^{(0)})^{-2} K^{-1} \{ z_1^{(0)} . \left| z_1^{(0)}, z_3^{(2)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_2^{(1)} \right|^{-2} K^{-1} \{ \dots$$
$$\dots K^{-1} \{ \left| z_1^{(0)}, z_{m-2}^{(m-3)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_m^{(m-1)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_{m-1}^{(m-2)} \right|^{-2} K^{-1} (\omega_1^{(0)}) \} \dots \}\}\}$$

$$z_{m+1}^{(1)} = z_1^{(0)} K^{-1} \{ \left| z_1^{(0)}, z_2^{(1)} \right| . (z_1^{(0)})^{-2} K^{-1} \{ z_1^{(0)} . \left| z_1^{(0)}, z_3^{(2)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_2^{(2)} \right|^{-2} K^{-1} \{ \dots$$
$$\dots K^{-1} \{ \left| z_1^{(0)}, z_{m-2}^{(m-3)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_m^{(m-1)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_{m-1}^{(m-2)} \right|^{-2} K^{-1} (\omega_2^{(0)}) \} \dots \}\}\}$$

....

$$z_n^{(0)} = z_1^{(0)} K^{-1} \{ \left| z_1^{(0)}, z^{(1)} \right| . (z_1^{(0)})^{-2} K^{-1} \{ z_1^{(0)} . \left| z_1^{(0)}, z_3^{(2)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_2^{(1)} \right|^{-2} K^{-1} \{ \dots$$
$$\dots K^{-1} \{ \left| z_1^{(0)}, z_{m-2}^{(m-3)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_m^{(m-1)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_{m-1}^{(m-2)} \right|^{-2} K^{-1} (\omega_{n-m}^{(0)}) \} \dots \}\}\}$$

où $\omega_1^{(0)}$, $\omega_2^{(0)}$,.. $\omega_{n-m}^{(0)}$ sont les racines de l'équation d'ordre $n-m$

$$M_0 \omega^{(n-m)} + M_1 \omega^{(n-m-1)} + M_2 \omega^{(n-m-1)} + \dots + M_{(n-m-1)} \omega^{(1)} + M_{n-m} \omega^{(0)} = 0$$

Passons maintenant à la détermination des coéfficients des équations abaissées par les coéfficients de l'équation primitive

A cet effet désignons l'équation primitive par

$$\sum_{m=n}^{m=0} A_m z^{(n-m)} = 0$$

Les coéfficients de la première équation abaissée (4_1) (c'est-à-dire abaissée d'une unité) comme il a été dit dans la note (7) (pag. 9) se déterminent par la formule symbolique

$$B_{n-\alpha} = \frac{1}{1.2.3....(\alpha-1).\alpha} \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \sum_{m=n}^{m=0} A_m z^{(n-m)}$$

où l'on considère les indices de z dans la différentiation comme des éxposants et les coéfficients A_m comme de quantités constantes. D'après ces conditions l'équation (4_1) peut être mise sous la forme

$$\sum_{\alpha=n}^{\alpha=1} w^{(n-\alpha)} \frac{1}{1.2.3...(\alpha-1).\alpha} \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \sum_{m=n}^{m=0} A_m z^{(n-m)} = 0$$

L'équation àbaissée suivante (5) s'obtient de l'équation (4_1) par le même procédé qui nous a servi pour obtenir cette dernière de la primitive; par là les coéfficients de la seconde équation abaissée s'expriment par la formule symbolique.

$$C_{n-\beta-1} = \frac{1}{1.2.3...\beta} \frac{d^\beta}{dw^\beta} \sum_{\alpha=n}^{\alpha=1} w^{(n-\alpha)} \frac{1}{1.2.3..\alpha} \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \sum_{m=n}^{m=0} A_m z^{(n-m)}$$

et on peut écrire l'équation (5)

$$\sum_{\beta=n-1}^{\beta=1} t^{(n-\beta-1)} \frac{1}{1.2.3...\beta} \frac{d^\beta}{dw^\beta} \sum_{n=\alpha}^{\alpha=1} w^{(n-\alpha)} \frac{1}{1.2.3...\alpha} \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \sum_{n=m}^{m=0} A_m z^{(n-m)} = 0$$

Par le mêmé procédé il est facile d'obtenire l'équation

abaissée dans le cas, où on connait les m raciens de l'équation primitive, savoir

$$\sum_{\mu=n-m+1}^{\mu=1} \omega^{(n-\mu-m+1)} \frac{1}{1.2.3..\mu} \frac{d^\mu}{d\psi^\mu} \sum_{\gamma=n-m+2}^{\gamma=1} \psi^{(n-\lambda-m+2)} \frac{1}{1.2.3..\lambda} \frac{d^\lambda}{d\xi^\lambda} \sum \cdots$$

$$\cdots \sum_{\beta=n-1}^{\beta=1} t^{(n-\beta-1)} \frac{1}{1.2.3..\beta} \frac{d^\beta}{dw^\beta} \sum_{\alpha=n}^{\alpha=1} w^{(n-\alpha)} \frac{1}{1.2.3..\alpha} \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \sum_{m=n}^{m=0} A_m z^{(n-m)} = 0$$

ici ω représente la quantité cherchée et les valeurs de $\psi^{(0)}, \ldots t^{(0)}, w^{(0)}$ sont determinées par les expressions, en adoptant la signification (A)

$$z^{(0)} = z_1^{(0)}$$

$$w^{(0)} = \left| z_1^{(0)}, z_2^{(1)} \right| . \left(z_1^{(0)} \right)^{-2}$$

$$t^{(0)} = z_1^{(0)} . \left| z_1^{(0)}, z_3^{(2)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_2^{(1)} \right|^{-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi^{(0)} = \left| z_1^{(0)}, z_{m-2}^{(m-3)} \right| . \left| z_1^{(0)}, z_m^{(m-1)} \right| . \left| z_1^{(0)}, {}_{m-1}^{(m-2)} \right|^{-2}$$

où $z^{(0)}, z_1^{(0)}, z_2^{(0)} \ldots z_m^{(0)}$ représentent les m racines connues de l'équation primitive

Ajoutons qu'on obtient des résultats tout-à-fait identiques dans le cas, où les substitutions indiquées se sont dans le déterminant et non dans l'équation.

V.

Les substitions émployées dans le § précédant peuvent avec de légères modifications conduire aux résultats très intéréssants. En effet raisons dans l'équation (III), qui se pré-

sente sous la forme du déterminant (I), la substitution $Q^{(0)}.v^{(0)}$ non au lieu de $z^{(0)}$, mais au lieu de $z^{(1)}$, c'est-à-dire

$$z^{(1)}=Q_1^{(0)}.v^{(0)} \qquad \text{et} \qquad z^{(0)}=K^{-1}(Q^{(0)}.v^{(0)})$$

alors on obtient

$$\begin{vmatrix} K^{-1}(Q_1^{(0)}.v^{(0)}), & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ Q_1^{(0)}.v^{(0)}, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ Q_1^{(1)}.v^{(0)}+Q_1^{(0)}.v^{(1)}, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ Q_1^{(2)}.v^{(0)}+2Q_1^{(1)}.v^{(1)}+Q^{(0)}.v^{(2)}, & z_1^{(3)}, z_2^{(3)}, \ldots z_n^{(3)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Q_1^{(n-1)}v^{(0)}+(n-1)Q_1^{(n-2)}.v^{(1)}+\ldots+Q_1^{(0)}.v^{(n-1)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

Décomposons cette expression en une somme de deux déterminants de manière que dans l'un d'eux on puisse prendre $v^{(0)}$ pour facteur commun savoir

$$v^{(0)}\begin{vmatrix} 0, & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ Q_1^{(0)}, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ Q_1^{(1)}, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Q_1^{(n-1)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K^{-1}(Q_1^{(0)}.v^{(0)}), & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ 0, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ Q_1^{(0)}.v^{(1)}, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (n-1)Q_1^{(n-2)}.v^{(1)}+\ldots+Q_1^{(0)}.v^{(n-1)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

Faisons dans le second de ces déterminants une substitution semblable à celle, qui a été indiquée plus haut

$$v^{(1)}=Q_2^{(0)}.u^{(0)} \qquad \text{d'où} \qquad v^{(0)}=K^{-1}(Q_2^{(0)}.u^{(0)})$$

et décomposons ce second déterminant en deux autres de ma-

nière que dans l'un deux on puisse prendre $u^{(0)}$ par facteur commun ; nous aurons

$$v^{(0)}\begin{vmatrix} 0, & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ Q_1^{(0)}, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ Q_1^{(1)}, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ Q_1^{(2)}, & z_1^{(3)}, z_2^{(3)}, \ldots z_n^{(3)} \\ \ldots & \ldots \\ Q_1^{(n-1)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} + u^{(0)}\begin{vmatrix} 0, & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ 0, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ \alpha_0 Q_2^{(0)}, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \alpha_1 Q_2^{(1)}, & z_1^{(3)}, z_2^{(3)}, \ldots z_n^{(3)} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-2} Q_2^{(n-2)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} K^{-1}(Q_1^{(0)}.K^{-1}(Q_2^{(0)}.u^{(0)})), & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ 0, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ 0, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \alpha_{1,1} Q_2^{(0)} u^{(1)} & z_1^{(3)}, z_2^{(3)}, \ldots z_n^{(3)} \\ \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-2,1} Q_2^{(n-3)} u^{(1)} + \ldots + \alpha_{n-2,n-2} Q_2^{(0)} u^{(n-2)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

où les valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{1,1}, \ldots \alpha_{n-2, n-2}$ sont composées des Q_1 et de quantités constantes.

En continuant ainsi, c'est-à-dire en remplaçant

$$u^{(1)} = Q_3^{(0)} s^{(0)}, \quad s^{(1)} = Q_4^{(0)} t^{(0)}, \ldots\ldots$$

d'où

$$u^{(0)} = K^{-1}(Q_3^{(0)} s^{(0)}), \quad s^{(0)} = K^{-1}(Q_4^{(0)} t^{(0)}), \ldots\ldots$$

et en décomposant chaque fois d'une manière analogue le dernier determinant en une somme de deux déterminants nous aurons

$$v^{(0)}\begin{vmatrix} 0, & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ Q_1^{(0)}, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ Q_1^{(1)}, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ Q_1^{(n-1)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} + u^{(0)}\begin{vmatrix} 0, & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ 0, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ \alpha_0 Q_2^{(0)}, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \alpha_{n-2} Q_2^{(n-2)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} + s^{(0)}\begin{vmatrix} 0, & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ 0, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ 0, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \beta_{n-3} Q_3^{(n-3)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + w^{(0)}\begin{vmatrix} 0, & z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots z_n^{(0)} \\ 0, & z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots z_n^{(1)} \\ 0, & z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots z_n^{(2)} \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \mu_0 Q_n^{(0)}, & z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots z_n^{(n)} \end{vmatrix} + A_n K^{-1}(Q_1^{(0)} K^{-1}(Q_2^{(0)} \ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)} K^{-1}(Q_n^{(0)} w^{(0)}))..)) = 0 \qquad (V)$$

où $\alpha.\beta, \ldots \mu$ sont des expressions qui dépendent de toutes les fonctions Q précéndantes et de quantités constantes.

En examinant l'expression (V) il est facile de voir, qu'elle est la somme des déterminants d'ordres $n-1$, $n-2$, $n-3, \ldots 3, 2, 1, 0$ par rapport à $Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)} \ldots Q_{n-1}^{(0)}, Q_n^{(0)}$ et du determinant, dans lequel tous les éléments de la première colonne, excepté le premier, sont nuls. On peut regarder tous ces déterminants, excepté le dernier comme des équations d'ordre $n-1$, $n-2, \ldots 2, 1$ par rapport à $Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, \ldots Q_{n-1}^{(0)}$. En supposant que toutes ces équations sont résolues, la première par rapport à $Q_1^{(0)}$, la second par rapport à $Q_2^{(0)}$ etc.. nous obtenons les valeurs de $Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, \ldots Q_{n-1}^{(0)}$ qui annulent separement tous les deux derniers, dont la somme doit aussi être égale à zéro. Donc

$$\mu_0 w^{(0)} Q_n^{(0)} A_0 + A_n K^{-1}(Q_1^{(0)} K^{-1}(Q_2^{(0)} \ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)} K^{-1}(Q_n^{(0)} w^{(0)}))..)) = 0$$

l'expression dans laquelle en posant, pour la détermination $Q_n^{(0)}$

$$\mu_0 A_0 Q_n^{(0)} = -A_n$$

nous obtenons

$$w^{(0)}=K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}....K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)}K^{-1}(Q_n^{(0)}w^{(0)}))...))$$

Mais de la marche même de la décomposition il suit

$$z^{(0)}=K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(_2^{(0)}....K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)}K^{-1}(Q_n^{(0)}w^{(0)}))..));$$

donc $w^{(0)}=z^{(0)}$ et

$$z^{(0)}=K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}....K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)}K^{-1}(Q_n^{(0)}.z^{(0)}))..)) \qquad .(7)$$

à l'aide de cette formule on peut représenter l'équation primitive, qui est donnée sous forme lineaire.

Examinons maintenant les équations qui déterminent $Q_1^{(0)}$, $Q_2^{(0)}$,.... $Q_{n-1}^{(0)}$ et occupons nous de la détermination des valéurs de ces quantités.

L'équation primitive (III) après la substitution $z^{(1)}=Q_1^{(0)}v^{(0)}$ s'écrira

$$v^{(0)}[A_0Q_1^{(n-1)}+A_1Q_1^{(n-2)}A_3Q_1^{(n-3)}+....+A_{(n-2)}Q_1^{(1)}+A_{(n-1)}Q_1^{(0)}]+$$

$$+v^{(1)}[(n-1)A_0Q_1^{(n-2)}+...+A_{n-2}Q_1^{(0)}]+...+A_nK^{-1}(Q_1^{(0)}v^{(0)})=0,)$$

donc la valeur de $Q_1^{(0)}$ se détermine par l'équation

$$A_0Q_1^{(n-1)}+A_1Q_1^{(n-2)}+A_3Q_1^{(n-3)}+....+A_{n-2}Q_1^{(1)}+A_{n-1}Q_1^{(0)}=0 \qquad (8)$$

qui, comme il est facile de voir, est identique avec le premier déterminant dans la décomposition (V). Désignons l'équation; qui détermine $Q_1^{(0)}$, comme avant (§ IV) par

$$\sum_{m=n-1}^{m=0} A_{n-m-1}Q_1^{(m)}=0$$

l'équation, primitive (III) sera

$$\sum_{\alpha=n-1}^{\alpha=1} v^{(n-\alpha)} \frac{1}{1.2.3...\alpha} \frac{d^\alpha}{dQ_1^\alpha} \sum_{m=n-1}^{m=0} A_{n-m-1} Q_1^{(m)} = K^{-1}(Q_1^{(0)} v^{(0)}) = 0$$

En faisant dans cette expression pour v la seconde substitution $v^{(1)} = Q_2^{(0)} u^{(0)}$ et un séparant la partie qui a $u^{(0)}$ pour facteur commun nous aurons

$$u^{(0)} \sum_{\alpha=n-1}^{\alpha=1} Q_2^{(n-\alpha-1)} \frac{1}{1.2.3..\alpha} \frac{d^\alpha}{dQ_1^\alpha} \sum_{m=n-1}^{m=0} A_{n-m-1} Q_1^{(m)} +$$

$$+ \sum_{\beta=n-2}^{\beta=1} Q^{(n-\beta-1)} \frac{1}{1.2.3..\beta} \frac{d^\beta}{dQ_2^\beta} \sum_{\alpha=n-1}^{\alpha=1} Q^{(n-\alpha-1)} \frac{1}{1.2.3...\alpha} \frac{d^\alpha}{dQ_1^\alpha} \sum_{m=n-1}^{m=0} A_{n-m-1} Q_1^{(m)} +$$

$$+ K^{-1}(Q_1^{(0)} K^{-1}(Q_2^{(0)} u^{(0)})) = 0$$

Donc pour la détermination $Q_2^{(0)}$ on trouve l'équation d'ordre $n-2$

$$\sum_{\alpha=n-1}^{\alpha=1} Q_2^{(n-\alpha-1)} \frac{1}{1.2.3..\alpha} \frac{d^\alpha}{dQ_1^\alpha} \sum_{m=n-1}^{m=0} A_{n-m-1} Q_1^{(m)} = 0$$

identique avec celle qu'on obtiendrait de (8) comme abaissée d'nne unité dans le cas. où une de ses racines serait connue.

Par la même méthode pour la détermination de $Q_3^{(0)}$ on obtient l'équation d'ordre $n-3$

$$\sum_{\beta=n-2}^{\beta=1} Q_3^{(n-\beta-2)} \frac{1}{1.2.3...\beta} \frac{d^\beta}{dQ_2^\beta} \sum_{\alpha=n-1}^{\alpha=1} Q^{n-\alpha-1} \frac{1}{1.2.3...\alpha} \frac{d^\alpha}{dQ_1^\alpha} \sum_{m=n-1}^{m=0} A_{n-m-1} Q_1^{(m)} = 0$$

etc. Donc les équations, qui déterminent $Q_2^{(0)}, Q_3^{(0)}, \ldots . Q_{n-1}^{(0)}$ peuvent être obtenues de l'équation (8), qui détermine $Q_1^{(0)}$,

par la méthode de la déduction des équations abaissées dans le cas, où l'on connait une, deux, trois.... et $n-1$ racines de l'équation (6), qui détermine $Q_1^{(0)}$.—

Cette remarque permêt d'écrire immediatement toutes les valeurs de $Q_2^{(0)}, Q_3^{(0)} \ldots . Q_{n-1}^{(0)}$ sans chercher et sans résoudre les équations qui les déterminent.

En effet, désignons par

$$q_1^{(0)},\ q_2^{(0)},\ q_3^{(0)}, \ldots . q_{n-1}^{(0)}$$

les $n-1$ racines de l'équation (8), qui détermine $Q_1^{(0)}$, c'est-à-dire de l'équation

$$A_0 Q_1^{(n-1)} + A_1 Q_1^{(n-2)} + A_2 Q_1^{(n-3)} + \ldots + A_{(n-2)} Q_1^{(1)} + A_{(n-1)} Q_1^{(0)} = 0 \qquad (8)$$

qui étant d'ordre inférieure d'une unité représente l'équation primitive sans son dernier terme; nous obtenons les $n-2$ valeurs de $Q_2^{(0)}$ par la formule

$$Q_2^{(0)} = \left|\prod_{p=n-1}^{p=2} \left| q_1^{(0)}, q_p^{(1)} \right| . \left(q_1^{(0)}\right)\right|^{-2}$$

les $n-3$ valeurs de $Q_3^{(0)}$ par l'expression

$$Q_3^{(0)} = \left|\prod_{p=n-1}^{p=3} q_1^{(0)} . \left| q_1^{(0)}, q_p^{(1)} \right| . \left| q_1^{(0)}, q_2^{(1)} \right|\right|^{-2}$$

etc,, et en général les $n-m$ valeurs de $Q_{n-m}^{(0)}$ par l'expression

$$Q_{n-m}^{(0)} = \left|\prod_{p=n-1}^{p=m} \left| q_1^{(0)}, q_{m-2}^{(m-3)} \right| . \left| q_1^{(0)}, q_p^{m-1} \right| \left| q_1^{(0)}, q_{m-1}^{(m-2)} \right|\right|^{-2}$$

Il reste à trouver la valeur de $Q_n^{(1)}$, qui comme il a été indiqué plus haut, se détermine par la condition

$$\mu_0 A_0 Q_n^{(0)} = -A_n$$

D'autre part, les termes, qui renferment $v^{(n-1)}$, $u^{(n-2)}$, $s^{(n-3)}$..... $r^{(1)}$ avec les plus grands indices se transforment consecutivement en

$$A_0 Q_1^{(0)} v^{(n-1)},$$

$$A_0 Q_1^{(0)} Q_2^{(0)} u^{(n-2)}$$

$$A_0 Q_1^{(0)} Q_2^{(0)} Q_3^{(0)} s^{(n-3)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_0 Q_1^{(0)} Q_2^{(0)} Q_3^{(0)} \ldots\ldots Q_{n-1}^{(0)} r^{(1)}$$

et enfin après la dernière substitution $r^{(1)}=Q_n^{(0)} w^{(0)}$ en

$$A_0 Q_1^{(0)} Q_3^{(0)} \ldots\ldots Q_{n-1}^{(0)} Q_n^{(0)} w^{(0)}$$

donc la valeur de μ_0 est

$$\mu_0=Q_1^{(0)} Q_2^{(0)} Q_3^{(0)} \ldots\ldots Q_{n-1}^{(0)};$$

en y portant les valeurs de $Q_1^{(0)}$, $Q_2^{(0)}$, $Q_3^{(0)}$,...Q_{n-1}, irouvées plus haut, nous obtenons

$$\mu_0=\frac{|q_1^{(0)}, q_{n-1}^{(n-2)}|}{|q_1^{(0)}, q_{n-2}^{(n-3)}|}$$

Par conséquent la valeur de $Q_n^{(0)}$ sera

$$Q_n^{(0)}=-\frac{A_n|q_1^{(0)}, q_{n-2}^{(n-3)}|}{A_0|q_1^{(0)}, q_{n-1}^{(n-2)}|}$$

Donc la réduction de l'équation primitive (III) à la forme (7) depend de la résolution de l'équation (8) d'ordre inférieure d'une unité à la primitive et dont les coéfffcients A_0, A_1.... A_{n-1} sont des coéfficients de l'équation primitive, disposés dans la même ordre.

On est encore conduit aux mêmes résultats par la substitutions des valeurs $z^{(1)}$, $v^{(1)}$, $u^{(1)}$,... qui ont été employées plus haut dans l'équation primitive (III), prise sous forme lineaire (9).

Observons en terminant que la reciprocité mutuelle des opérations désignées par les symboles K et K^{-1} permét aussi de représenter l'équation primitive sous la forme

$$z^{(0)}=\frac{1}{Q_1^{(0)}}K\left(\frac{1}{Q_2^{(0)}}K\left(\frac{1}{Q_3^{(0)}}\cdots K\left(\frac{1}{Q_{n-1}^{(0)}}K\left(\frac{1}{Q_n^{(0)}}(Kz^{(0)})\right)\right)\cdots\right)\right)$$

où les valeurs $Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, Q_3^{(0)},\ldots Q_{n-1}^{(0)}, Q_n^{(0)}$ restent les mêmes(10). Du reste la valeur de $z^{(0)}$ peut être substituée ici et dans la formule (7) autant des fois que l'on veut, sans modifier les résultats.

VI.

On a dit plus haut que résoudre une équation c'est trouver toutes ses racines c'est-à-dire les valeurs pour $z^{(0)}$ par exemple, qui verifient identiquement cette équation. De ce, qui precéde, on peut voir que ces valeurs sont liées fonctionellement avec les coéfficients de l'équation donnèe. Aussi la résolution de l'équation peut être faite en deux manière: soit en calculant par série des epreuves la valeur de chaque racine en tous cas particuliers indépendement; soit en exprimant

(9) Ici on a pris l'équation primitive sous la forme d'une déterminant avec le seul but de relier plus intimement ces deux formes: la forme linéaire et celle d'une déterminant.

(10) Les résultats obtenus sont complétement applicables à l'équation algébrique avec cette seule différence que l'on doit prendre les substitutions sous la forme $z^{(1)}=Q_1^{(0)}u^{(1)}+Q_1^{(1)}u^{(0)}$, car dans ce cas on a toujours $a^{(0)}=1$.

toutes les racines de l'équation donnée en fonctions de ses coéfficients. Cette dernière forme de la résolution applicable à tous cas particuliers, donne la solution générale de l'équation. La question sur cette solution générale, c'est-à-dire d'exprimer les racines de l'équation en fonction de ces coefficients, parait l'une des plus importantes dans l'analyse. Quoique les fonctions qui entrent dans cette solution peuvent être composées des opérations quelconques, mais on a en vue ordinairement des fonctions pour exprimer les racines, qui se composent des opérations inverses avec celles de l'équation donnée. Dans le paragraphe présent on suppose de déterminer l'équation de la forme plus générale possible, qui admet d'exprimer les racines en fonctions de ses coefficients et ces fonctions doivent être composées d'une infinité des opérations inverses à celles de l'équation même.

En effet, si la signification du symbole K excepté de ce qui a été dit plus haut, est limitée encore par la condition [11]

$$K(1+z^{(n)})=K(z^{(n)})$$

les racines de l'équation (III) s'expriment facilement par des séries à l'aide des opérations inverses K^{-1} et des fonctions $Q_1^{(0)}, Q_2^{(0)}, \ldots Q_{n-1}^{(0)}, Q_n^{(0)}$; de plus chaque racine a sa propre série qui est indépendante des autres [12]. Le système de ces n séries pour l'équation (III) est de la forme

(11) On, en général, par la condition

$$K(\alpha+z^{(n)})=K(z^{(n)})$$

semblable à celle qui a lieu pour les fonctions périodiques.

(12) Si je ne me trompe pas, c'est le premier essai de donner des expréssions séparées pour chacune des racines d'une équation dans un cas assez général

$$z_1^{(0)}=1+K^{-1}(Q_1^{(0)}(Q_2^{(0)}\ldots\ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)}K^{-1}(Q_n^{(0)}))..))+$$

$$+K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}\ldots K^{-1}(Q_n^{(0)}K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}\ldots K^{-1}(Q_n^{(0)}))..))\ldots))+\ldots$$

$$z_2^{(0)}=K^{-1}(Q_1^{(0)})+K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}\ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)}K^{-1}(Q_n^{(0)}K^{-1}(Q_1^{(0)})))..))+\ldots$$

$$z_3^{(0)}=(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}))+K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}\ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)}K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}))))..))+\ldots$$

....

$$z_n^{(0)}=K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}\ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)})\ldots))+K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)}K^{-1}(Q_n^{(0)}K^{-1}(Q_1^{(0)}K^{-1}(Q_2^{(0)}\ldots K^{-1}(Q_{n-1}^{(0)})..)))..))+\ldots.$$

où les fonctions Q ont la signification indiquée dans la paragraphe prècéndant. Ainsi la résolution compléte de l'équation dans un cas assêz général est amenée à la résolution d'une équation avec les mêmes coéfficients d'ordre moindre d'une unité et les racines de la première sont exprimées par des fonctions des racines de la dernière. L'équation abaissée d'ordre $n-1$ de son coté peut être résolue par la même manière à l'aide de l'équation d'ordre moindre d'une unité etc.

Après un nombre suffisant de ces abaissements nous obténons l'équation d'ordre premier

$$A_0 w^{(1)}+A_1 w^{(0)}=0$$

En supposant que la racine de cette équation peut être exprimée en fonction de ses coéfficients nous aurons la possibilité, les conditions indiquées étant satisfaites, d'exprimer les racines de l'équation donnée d'ordre n à l'aide des séries infinies d'opérations inverses K^{-1} sur ses coéfficients. Par cette méthode on peut résoudre immédiatement des équations linéaires différentielles et des équations en différences d'ordre quelconque avec une variable indépendante. Quant à des équations algébriques, les opérations à l'aide desquelles elles sont

composées, ne satisfont pas à la condition (9); donc sa résolution en forme indiquée par des opérations inverses n'a pas lieu en général. Mais la forme donnée de la solution comme nous verrons plus tard peut être appliquée à la résolution des équations algébriques à l'aide des équations différentielles linéaires.

Considérons encore quelles doivent être les opérations K pour que l'équation primitive puisse être decomposée en un produit de différences linéaires et admettre des racines égales.

A cet effet considérons l'équation donnée sous la forme du déterminant (I) et divisons chacune de ses lignes par l'élément correspondant de la première horisontale; nous aurons

$$z^{(0)}.z_1^{(0)}.z_2^{(0)}.z_3^{(0)}\ldots z_n^{(0)}\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \frac{z^{(1)}}{z^{(0)}}, & \frac{z_1^{(1)}}{z_1^{(0)}}, & \frac{z_2^{(1)}}{z_2^{(0)}}, & \ldots & \frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(0)}} \\ \frac{z^{(2)}}{z^{(0)}}, & \frac{z_1^{(2)}}{z_1^{(0)}}, & \frac{z_2^{(2)}}{z_2^{(0)}}, & \ldots & \frac{z_n^{(2)}}{z_n^{(0)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{z^{(n)}}{z^{(0)}}, & \frac{z_1^{(n)}}{z_1^{(0)}}, & \frac{z_2^{(n)}}{z_2^{(0)}}, & \ldots & \frac{z_n^{(n)}}{z_n^{(0)}} \end{vmatrix}$$

En retranchant dans ce determinant la première colonne de toutes les autres nous obtenons

$$z^{(0)}.\prod_n^1(z_p^{(0)})\begin{vmatrix} \frac{z_1^{(1)}}{z_1^{(0)}}-\frac{z^{(1)}}{z^{(0)}}, & \frac{z_2^{(1)}}{z_2^{(0)}}-\frac{z^{(1)}}{z^{(0)}}, & \ldots & \frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(0)}}-\frac{z^{(1)}}{z^{(0)}} \\ \frac{z_1^{(2)}}{z_1^{(0)}}-\frac{z^{(2)}}{z^{(0)}}, & \frac{z_2^{(2)}}{z_2^{(0)}}-\frac{z^{(2)}}{z^{(0)}}, & \ldots & \frac{z_n^{(2)}}{z_n^{(0)}}-\frac{z^{(2)}}{z^{(0)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{z_1^{(n)}}{z_1^{(0)}}-\frac{z^{(n)}}{z^{(0)}}, & \frac{z_2^{(n)}}{z_2^{(0)}}-\frac{z^{(n)}}{z^{(0)}}, & \ldots & \frac{z_n^{(n)}}{z_n^{(0)}}-\frac{z^{(n)}}{z_n^{(0)}} \end{vmatrix}$$

un déterminant, qui est composé de n^2 éléments. En effectuant dans ce déterminant les transformations identiques avec celles qui ont été faites plus haut nous avons

$$z^{(0)}.\prod_n^1(z_p^{(0)}).\prod_n^1\left(\frac{z_p^{(1)}}{z_p^{(0)}}-\frac{z^{(1)}}{z^{(0)}}\right)\begin{vmatrix} A_2, & B_2, \ldots\ldots & M_2 \\ A_3, & B_3, \ldots\ldots & M_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n, & B_n, \ldots\ldots & M_n \end{vmatrix}$$

une expression dans laquelle le déterminant est composé de $(n-1)^2$ éléments.

En continuant ainsi nous décomposerons le déterminant donné ou l'équation primitive en un produit de différences, multiplié par un certain coéfficient $z^{(0)}\prod_n^1(z_p^{(0)})$. Afin que la décomposition obtenue ne soit pas exclusivement formelle et ne contienne pas le coéfficient indiqué, il faut avant tout

$$z^{(0)}.\prod_n^1(z_p^{(0)})=z^{(0)}.z_1^{(0)}.z_2^{(0)}\ldots\ldots z_n^{(0)}=1$$

d'où en vertu de l'indépendance entre les multiplicateurs il faut

$$z^{(0)}=1,\ z_1^{(0)}=1,\ z_2^{(0)},=1\ldots\ldots z_n^{(0)}=1$$

et le premier produit de différences sera de la forme

$$\prod_n^1(z_p^{(1)}-z^{(1)})$$

c'est-à-dire de la forme cherchée. Pour réduire tous les autres produits à cette forme on doit avoir en général

$$z_p^{(m)}-z^{(m)}\equiv 0[mod(z_p^{(1)}-z^{(1)})] \qquad (10)$$

Mais on a vu plus haut

$$z_p^{(m)}=K^{m-1}(z_p^{(1)})$$

donc en posant

$$z_p^{(1)} = z^{(1)} + (z_p^{(1)} - z^{(1)})$$

nous obtenons par la série de Taylor

$$\frac{z_p^{(m)} - z^{(m)}}{z_p^{(1)} - z^{(1)}} = \frac{dz^{(m)}}{dz^{(1)}} + \frac{z_p^{(1)} - z^{(1)}}{1.2} \frac{d^2 z^{(m)}}{dz^{(1)2}} + \frac{(z_p^{(1)} - z^{(1)})^2}{1.2.3} \frac{d^3 z^{(m)}}{dz^{(1)3}} + \ldots\ldots$$

Pour que la condition (10) soit remplie, la dernière décomposition doit être terminée et par conséquent il faut

$$\frac{d^{q+1} z^{(m)}}{dz^{(1)q+1}} = 0 \qquad \text{et en général} \qquad \frac{d^{q+1} z^{(m)}}{dz^{(1)q+1}} = 0 \qquad . \quad (11)$$

où t a toutes les valeurs entières de 1 jusque ∞ inclusivement. Les conditions (11) font voir que $z^{(m)}$ doit être une fonction algébrique, rationnelle et entière de $z^{(1)}$ et on s'assure facilement que tous les autres produits se convertissent en produits de différences des racines d'une forme identique à là précédante. Donc *l'équation primitive peut être décomposée en produit de différences des racines dans le seul cas où K exprime une multiplication* ou on d'autres termes, *il n'y a que les équations algébriques qui peuvent être décomposées en un produit de différences des racines.*

Par une méthode analogue il est facile de faire voir, que *les équations algébriques seules admettendt des racines égales.*

VII.

Les réchérches exposées peuvent être appliquées aux cas particuliers suivants: aux équations algébriques du n-ème dégré avec une inconue aux équations différentielles linéaires et aux équations en différences d'ordre n avec une variable indépendante.

I. Équation algebriques.

Les récherches exposées sont applicables aux équations algébriques du n-ème dégré avec une inconue les opérations K devant alors être regardée comme équivalentes à une multiplication par la quantité soumise à l'opération et les opérations inverses K^{-1} devant être regardées comme équivalentes à une division, savoir

$$K^n(a^p)=a^{p+n} \text{ et } K^{-n}(a^p)=a^{p-n}$$

En outre dans le cas considéré les opérations K jouissent de la propriété particulière que toute quantité, qui n'a pas du tout été soumise aux opérations K, est égale à l'unité (13)

$$a_0=1$$

Cela posé, en vertu de ce qui a été dit relativement au cas général, nous aurons pour l'équation algébrique:

Les coéfficients de l'équation algébrique en forme linéaire sont des fonctions de ses racines et s'expriment comme les mineurs du déterminant de $(n+1)^2$ éléments dévéloppé suivant la premiére colonne. En outre ces coéfficients par suite des propriétés particulières des opérations K dans le cas

---

(13) D'après cela il faut distinguer les cas

$$K(1)=K(a^0)=a \text{ et } K(1)=K[(a^m)^0]=a^m$$

Pour le premier cas nous aurons

$$K(a^p)=a^{p+1} \text{ et en général } K^n(a^p)=a^{p+n};$$

pour le second

$$K(a^p)=a^{p+m} \text{ et en général } K^n(a^p)=a^{p+nm}$$

Donc il faut toujours indiquer la valeur de la quantité donnée avec l'opération K effectuée une fois.

des équations algébriques peuvent être exprimés par des fonctions symmetriques des racines ([14]).

L'équation algébrique du n-ème dégré a n racines.

L'équation algébrique peut encore être satisfaite par des sommes de ses racines

$$a_1E_1+a_2E_2+a_3E_3+....+a_nE_n$$

avec les conditions

$$E_pE_q=0, \quad E_pE_q..E_t=0, \quad E_pE_p....E_p=E_p^m=E_p;$$

c'est-à-dire en d'autres termes les multiplicateurs E ne doivent pas dépendre des opérations K.

Puisque les opérations K dans le cas des équations algébriques satisfont à la condition

$$K(u^0v^0)=u^0K(v^0)v^0K(u^0)=v+u$$

et en général

$$K^n(u^0.v^0)=u^0.v^n+nuv^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^{n-2}+......$$
$$......+nu^{n-1}v+u^nv^0=(v+u)^n$$

tout ce qui a été dit dans le cas général relativement à l'évanouissement du coéfficient indiqué dans l'équation donnée et relativement à l'abaissement de son ordre est encore applicable à l'équation algébrique. De plus en vertu de la propriété particulière de l'équation algébrique de se decomposer

---

([14]) Pour la démonstration de cette propriété à l'aide des déterminants voir:

Fiore. Dimonstrazione d'una trasformazione di determinati. Battaglini G. X. 170.

Nägelsbach. Über eine Klasse symmetrischer Functionen. Zweibrücken 1871.

et encore dans les cours récents de la théorie des déterminants.

en un produit de differences des racines, l'abaissement de leur dégré dans le cas où l'on connai m de ses racines s'éffectue plus facilement à l'aide de la division.

Outre les propriétés indiquées ici, qui sont identiques avec celles qui ont été trouvées pour l'équation de la forme générale, l'équation algébrique a des propriétés spéciales, savoir : l'équation algébrique est décomposable en un produit de différences des racines et admet des racines égales, comme on l'a vu plus haut. Mais il faut remarquer, que criterium ordinaire des racines égales peut être deduit plus facilement, si on prend l'équation algébrique sous forme d'un déterminant.

En conséquence de ce qui a été dit ici et dans le cas général, l'équation algébrique peut se présenter indifféremment dans l'une des formes suivantes:

I. La forme linéaire

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots\ldots+A_{n-1}x+A_n=0$$

II. La forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, \ldots\ldots 1 \\ x, & a_1, & a_2, \ldots\ldots a_n \\ x^2, & a_1^2, & a_2^2, \ldots\ldots a_n^2 \\ x^3, & a_1^3, & a_2^3, \ldots\ldots a_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x^n, & a_1^n, & a_2^n, \ldots\ldots a_n^n \end{vmatrix}=0$$

III. La forme d'un produit des différences

$$\left.\begin{matrix} (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots\ldots(x-a_n) \\ (a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_n) \\ (a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a^{n-1}-a_n) \end{matrix}\right\}=0$$

IV. Les deux formes correspondantes à celles qui sont indiquées dans le § V pour le cas général

$$A_0x(x-q_1)(x-q_2)\ldots(x-q_{n-1})+A_n=0$$

et aussi ([15])

$$x=-\frac{A_n}{A_0}\cdot\frac{1}{(x-q_1)(x-q_2)\ldots(x-q_{n-1})}$$

En terminant il faut observer, que pour les opérations K dans le cas des équations algébrique la condition (9) n'est pas remplie, et par conséquent la résolution immediate de l'équation algébrique par séries, indiquée au § VI est impossible. Néanmoins nous donnerons plus tard le moyen de resoudre une équation algébrique par séries à l'aide d'équations différentielles linéaires

2. Équations différentielles linéaires.

Les recherches qui ont été developpées pour le cas général s'appliquent aux équations différentielles linéaires d'ordre n avec une variable indépendante, les opérations K devant être regardées comme identiques à des différentiation et les opérations inverses K^{-1} comme identiques à intégrations savoir

$$K^p(y)=\frac{d^py}{dx^p} \qquad \text{et} \qquad K^{-p}(y)=\int\int\int\cdots\cdot\int ydxdxdx..dx$$

Ces conditions admises nous aurons pour l'équation différentielle linéaire:

Les coéfficients de l'équation différentielle d'ordre n sont des fonctions de ses intégrales particulières et peuvent être

([15]) Cette dernière forme peut servir de point de départ pour exprimer une racine de l'équation algébrique sous forme d'une fraction continue.

exprimées comme les mineurs du déterminant de $(n+1)^2$ éléments développé suivant la première colonne. ([16])

L'équation différentielle linéaire a n intégrales particulières (ou n racines comme on disait dans le cas général) indépendantes entre elles.

A l'équation différentielle linéaire satisfont encore les sommes des leurs intégrales particulières, multinciées par des constantes arbitraires.

Puis que les opérations dans le cas de l'équation différentielle linéaire satisfont à la condition,

$$K(u^{(0)}.v^{(0)})=u^{(0)}K(v^{(0)})+v^{(0)}K(u^{(0)})$$

tout ce qui a été dit dans le cas général relativement à l'evanouissement dans l'équation du coéfficient déterminé et de l'abaissement d'ordre, est applicable à l'équation différentielle linéaire. De plus dans le cas, où l'on connaît m intégrales de l'équation donnée un abaissement d'ordre de m unité n'est possible qu'avec la condition que tous ces m intégrales n'ayent pas entre elles de dépendance linéaire([17]).

([16]) L'égalité connue qui exprime la liaison entre le coéfficient P_1 de $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ dans l'équation différentielle d'ordre n (on suppose dans ce cas le coéfficient de $\frac{d^n y}{dx^n}$ égal à l'unité) et le déterminant Δ, qui est composé de ses n intégrales particulières, se deduit facilement à l'aide de ce qui est dit dans la huitième note. En effet nous avons

$$P_1=\frac{A_1}{A_0},\ A_1=-\frac{dA_0}{dx} \text{ et } A_0=\Delta$$

d'où

$$\Delta=C_e^{-\int P_1 dx}$$

ce qu'il fallait démontrer.

([17]) L'existance d'une dépendance linéaire entre les m intégrales données s'exprime par une condition

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots & y_m \\ y'_1, & y'_2, & \ldots & y'_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)}, & y_2^{(m-1)}, & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}=0 \quad \text{ou} \quad \left| y_1, y_m^{(m-1)} \right|=0$$

qui représente une équation linéaire $m-1$.

L'équation abaissée d'ordre $n-m$ peut être facilement treuvée par la methode indiquée dans le cas général. En désignant ces $n-m$ intégrales indépendantes entre elles par

$$w_1 \ , \ w_2 \ , \ \ldots . \ w_{n-m}$$

nous obtenons le système des n intégrales de l'équation donnée sous la forme ([18]).

$$y_1 = y_1$$
$$y_2 = y_2$$
$$y_3 = y_3$$
$$\ldots\ldots$$
$$y_m = y_m$$

$$y_{m+1} = y_1 \int |y_1, y'_2| \cdot y_1^{-2} dx \int y_1 \cdot |y_1, y''_3| \cdot |y_1, y'_2|^{-2} dx \int \ldots .$$
$$\ldots . \int |y_1, y_{m-2}^{(m-3)}| \cdot |y_1, y_m^{(m-1)}| \cdot |y_1, y_{m-1}^{(m-2)}|^{-2} dx \int w_1 dx$$

$$y_{m+2} = y_1 \int |y_1, y'_2| \cdot y_1^{-2} dx \int y_1 \cdot |y_1, y''_3| \cdot |y_1, y'_2|^{-2} dx \int \ldots .$$
$$\ldots . \int |y_1, y_{m-2}^{(m-3)}| \cdot |y_1 . y_m^{m-1}| \cdot |y_1, y_{m-1}^{(m-2)}|^{-2} dx \int w_2 dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_1 \int |y_1, y'_2| \cdot y_1^{-2} dx \int y_1 \cdot |y_1, y''_3| \cdot |y_1, y'_2|^{-2} dx \int \ldots .$$
$$\ldots . \int |y_1, y_{m-2}^{(m-3)}| \cdot y_1, y_m^{(m-1)}| \cdot |y_1, y_{m-1}^{(m-2)}|^{-2} dx \int w_{n-m} dx$$

([18]) On trouve des expression semblables aux indiquées pour les intégrales particulières de l'équation linéaire dans les ouvrages.

Tannery. Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coéfficients variables. (Thèses), Paris 1874 p. 15 etc. *Floquet*. Théorie des

Ici il sera à propos d'indiquer une forme d'intégrale de l'équation différentielle linéaire avec second membre dans le cas, oú l'on connait ses n intégrales sans second membre.

En faisant dans l'équation donnée avec second membre X les n substitutions, analogues à celles. qui ont été admises plus haut pour l'abaissement d'ordre de l'équation dans le cas général, nous aurons pour la détermination de la dernière inconnue z l'équation

$$A_0.y_1.v_1.u_1 \ldots . w_1.z = X$$

d'où

$$z = \frac{X}{A_0 y_1 v_1 u_1 \ldots w_1}$$

En portant ici les valeurs $v_1, u_1, \ldots . w_1$ exprimées sous forme de déterminants composés d'un nombre respectif d'intégrales particulières $y_1, y_2, \ldots y_n$ on aura, toute réductions faites,

$$z = \frac{X.|y_1.y_{n-1}^{(n-2)}|}{A_0|y_1, y_n^{(n-1)}|} = \frac{X}{A_0} e^{\int \frac{A_1}{A_0} dx} . |y_1, y_{n-1}^{(n-2)}|$$

et l'intégrale générale de l'équation donnée avec second membre dans le cas où l'on connaît ses n intégrales $y_1, y_2, y_3, \ldots . y_n$ sans second membre sera

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots \ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n +$$

$$+ y_1 \int |y_1, y_2'| . \overset{-2}{y_1} dx \int y_1 . |y_1, y_3''| \, \overset{-2}{|y_1, y_2'|} dx \int \ldots .$$

$$\ldots . \int |y_1, y_{n-2}^{(n-3)}| . |y_1, y_n^{(n-1)}| . \overset{-2}{|y_1, y_{n-1}^{(n-2)}|} dx \int \frac{X.|y_1, y_{n-1}^{(n-2)}|}{A_0.|y_1, y_n^{(n-1)}|} dx$$

équations différentielles linéaires. (Thèses) Paris 1879 p. 64 etc., et dans les cours récents, par exemple, dans celui de M. Hoüel, mais on n'a pas donné des expressions pour les fonctions sous le signe intégral.

Chez *Tomaselli*. Esercizii sulle equazioni differenziali. Milano 1883 p. 206 etc. les cas particuliers seulement sont discutés.

L'équation différentielle linéaire d'ordre n admet une décomposition analogue avec celle de l'équation algébrique([19]) en n équations du dernier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx}-Q_1 v=0,\quad \frac{dv}{dx}-Q_2 u=0, \ldots\ldots \frac{dt}{dx}-Q_n y=0$$

Ici les fonctions $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ se déterminent comme plus haut de la manière suivante: de l'équation primitive

$$A_0\frac{d^n y}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+A_{n-2}\frac{d^2y}{dx^2}+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n y=0$$

on déduit l'équation, qui détermine Q_1 d'ordre moindre d'une unité de la forme

$$A_0\frac{d^{n-1}Q_1}{dx^{n-1}}+A_1\frac{d^{n-2}Q_1}{dx^{n-2}}+A_2\frac{d^{n-3}Q_1}{dx^{n-3}}+\ldots+A_{n-2}\frac{dQ_1}{dx}+A_{n-1}Q_1=0$$

Désignons le système de $n-1$ intégrales particulières (système fondamental) de la dernière équation par

$$q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots\ldots q_{n-2},\ q_{n-1}$$

alors les valeurs des différents Q s'expriment

$$Q_1=q_1$$

$$Q_2=|q_1, q_2'|\cdot q_1^{-2}$$

$$Q_3=q_1\cdot|q_1, q_3''|\cdot|q_1, q_2'|^{-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_{n-1}=|q_1, q_{n-3}^{(n-4)}|\cdot|q_1, q_{n-1}^{(n-2)}|\cdot|q_1, q_{n-2}^{(n-3)}|^{-2}$$

$$Q_n=\frac{A_n\cdot|q_1, q_{n-2}^{(n-3)}|}{A_0\cdot|q_1, q_{n-1}^{(n-2)}|}$$

([19]) Une équation algébrique d'ordrè n peut être représentée par l'ensemble de n équations du prémier dégré.

$$[x-a_1=0,\ x-a_2=0, \ldots\ldots x-a_n=0]$$

où $a_1, a_2, \ldots a_n$ sont les racines de l'équation primitive.

En vertu de ce qui a été dit plus haut l'équation différentielle linéaire peut être donnée indifférement sous l'une des formes suivantes

I. Sous la forme linéaire

$$A_0\frac{d^ny}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dy^{n-1}}+A_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+A_{n-2}\frac{d^2y}{dx_1}+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_ny=0$$

II. Sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} y, & y_1, & y_2, & \ldots y_n \\ y', & y_1', & y_2', & \ldots y_n' \\ y'', & y_1'', & y_2'', & \ldots y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n)}, & y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

III. Sous la forme de n différentiations ([20])

$$\frac{1}{Q_n}\frac{d}{dx}\frac{1}{Q_{n-1}}\frac{d}{dx}\cdots\cdots\frac{d}{dx}\frac{1}{Q_2}\frac{d}{dx}\frac{1}{Q_1}\frac{dy}{dx}+y=0$$

IV. Sous la forme de n intégrations ([21])

$$y=\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\ldots\int Q_{n-1}dx\int Q_nydx$$

([20]) On trouve cette forme chez

Thomson W. Mechanical integration of the general linear differential equation of any order with variable coefficients. Proceeding of the Royal Soc. XXIV, 271–275, 1876.

Mon article: Zur Frage über die Integration linearer Differentialgleichungen. Odessa 1878.

Amanzio D. Di alcune transformazioni del symbolo d'operazione

$$r\frac{d}{dx}v\frac{d}{dx}\cdots s\frac{d}{dx}y\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}$$

e proprietà di acluni determinanti che derivano da queste transformazioni. Battaglini Giorn. XXI 1883.

([21]) Cette forme est discutée dans mon article: о формулѣ (н) $y=(-1)^n\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_nydx$. Одесса 1880.

(Sur la formule (н) $y=(-1)^n\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_nydx$. Odessa 1880)

Les deux dernières formes correspondent à celles qui sont données dans les § V pour le cas général.

Pour l'équation différentielle linéaire la condition (9) est satisfaite

$$d(1+z^{(n)})+dz^{(n)}$$

Donc la méthode exposée dans le § VI pour la résolution d'une équation par séries peut être complétement appliquée à l'équation différentielle linéaire et ses n intégrales particulières indépendantes entre elle (système fondamentale) s'expriment

$$y_1=1+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots$$
$$\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx+\ldots\ldots$$

$$y_2=\int Q_1dx+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots$$
$$\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx+\ldots$$

$$y_3=\int Q_1dx\int Q_2dx+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx\int Q_2dx+\ldots$$

. . . .

$$y_n=\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_{n-1}dx+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots$$
$$\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_{n-1}dx+\ldots\ldots$$

Ces séries sont en général convergentes excepté les points,

pour lesquels l'un ou plusieurs Q tendent à l'infini([22]). La sommation de ces séries être effectuée dans le cas

$$Q_1=Q_2=Q_3=\ldots\ldots\ldots=Q_n$$

et les intégrales de l'équation donnée prennent la forme

$$y_1=e^{\alpha_1\int Qdx},\ y_2=e^{\alpha_2\int Qdx},\ldots\ y_n=e^{\alpha_n\int Qdx}$$

où $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ sont les racines de l'équation $\alpha^n-1=0$([23]).

D'autre part les valeurs des $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ dans ces cas seront

$$q_1=q_1,\ q_2=q_1\int q_1dx,\ q_3=q_1\frac{\left(\int q_1dx\right)^2}{1.2},\ldots q_{n-1}=q_1\frac{\left(\int q_1dx\right)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}$$

et q_1 se détermine par l'équation

$$\frac{n(n-1)}{1.2}A_0\frac{dq_1}{dx}A_1q_1=0$$

d'où

$$q_1=e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int\frac{A_1}{A_0}dx}$$

([22]) Cette question est discutée en détail dans mon article cité plus haut: Zur Frage über die Integralien etc. ainsi que: Sur l'intégration des équations différentielles linéaires a coéfficients variables. Nouvelle Correspondance Mathém. V. 1878.

([23]) Par exemple pour l'équation, qui l'on rencontre dans la Physique Mathématique

$$(1-\cos^2\varphi)\frac{d^2M}{d\varphi^2}+\sin\varphi\cos\varphi\frac{dM}{d\varphi}-gM=0$$

nous avons

$$gQ_1=Q_2=g\,\mathrm{sc}\,\varphi$$

et l'intégrale générale séra

$$M=C_1\left(\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^{\sqrt{g}}+C_2\left(\mathrm{tang}\frac{\varphi}{2}\right)^{-\sqrt{g}}$$

où g est une quantité constante.

Dans cet expression nous avons le criterium pour le cas de Q égaux, par ce que la valeur indiquée de q_1 doit verifier l'équation, qui détermine Q_1

Il est à propos discuter ici la question sur l'intégrabilité des équations différentielles linéaires de la forme générale au moyen d'un nombre fini de quadratures.

En considérant la forme indiquée de séries pour les intégrales particulières de l'équation différentielle linéaire il est facile de voir, que leur intégrabilité en nombre fini de quadratures depend de deux conditions: 1) les séries indiquées doivent admettre une sommation, et 2) toutes les fonctions Q doivent s'exprimer au moyen d'un nombre fini de quadratures. Si on suppose, que la première condition est satisfaite, les intégrales particulières de l'équation donnée peuvent se répresenter sous la forme

$$y_1=f_1(q_1,q_2,q_3,\ldots q_{n-1})$$
$$y_2=f_2(q_1,q_2,q_3,\ldots q_{n-1})$$
$$y_3=f_3(q_1,q_2,q_3,\ldots q_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n=f_n(q_1,q_2,q_3,\ldots q_{n-1})$$

où tous les f indiquent les fonctions avec un nombre fini de quadratures (explicites), en ne comptant pas celles qui entrent dans les $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$. Mais on a dit plus haut, que les $q_1, q_2, \ldots q_{n-1}$ sont des intégrales particuliéres (système fondamental) de l'équation linéaire d'ordre $n-1$. Donc en adoptant la sommation de séries du système (13) il faudra pour exprimer des intégrales de l'équation linéaire d'ordre n en nombre fini de quadratures, que l'équation d'ordre $n-1$ aurait des intégrales exprimables au moyen d'un nombre fini de quadratures. De la même manière nous pouvons amener

l'intégrabilité de l'équation d'ordre $n-1$ à celle de l'équation d'ordre $n-2$ et ainsi de suite. Dans un mémoire publié en cette année Prof. Maximovitz ([24]) a démontré l'impossibilité de l'intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre de la forme générale au moyen d'un nombre fini de quadratures. En tel cas suivant ci-dessus exposée n'aura pas lieu l'intégration de l'équation du troisième ordre, et avec celle-ci n'aura pas lieu l'intégration de l'équation du quatrième ordre et ainsi de suite. Donc.

Équations différentielles linéaires générales d'ordre superieur au premier n'admet pas d'éxprimer ses intégrales au moyen d'un nombre fini de quadratures.

Enfin il reste à indiquer la forme de l'intégrale de l'équation différentielle linéaire avec second nombre. Désignons ce second membre par X et soit.

$$R_n = \frac{Q_n A_0 X}{A_n} = \frac{X.\left|q_1, q_{n-2}^{(n-3)}\right|}{\left|q_1, q_{n-1}^{(n-2)}\right|}$$

alors l'intégrale générale de l'équation avec second membre devient

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots + C_{n-1} y_{n-1} + C_n y_n + Ж_n$$

où les valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_{n-1}, y_n$ s'expriment en $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_{n-1}, Q_n$ par les séries ci-dessus indiquées et $Ж_n$ se détermine par la série

$$Ж_n = \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \ldots \int Q_{n-1} dx \int R_n dx + \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots$$
$$\ldots \int Q_n dx \int Q_1 dx \int Q_2 dx \ldots \int Q_{n-1} dx \int R_n dx + \ldots$$

([24]) *Максимовичъ.* Разысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ и доказательство невозможности такого интегрированія для общаго линейнаго уравненія второго порядка. Казань 1885. (*Maximovitz.* Recherches des équations différentielles linéaires générales du prémier ordre qui s'intégrent en forme finie et demonstration de l'impossibilité d'une telle intégration de l'équation linéaire générale du second ordre. Kazan 1885).

Pour le cas des Q égaux l'intégrale de l'équation avec second membre admet aussi la forme finie ([25]).

3. Équations linéaires aux différences.

Les recherches dévéloppées dans la partie générale s'appliquent aux équations linéaires aux différences, les opérations K se convertissant en Δ et les opérations inverses K^{-1} s'exprimant par Σ, c'est-à-dire par l'intégration aux différences finies. De plus il faut rémarquer, que l'équation aux différences se présente sous les deux formes

$$\begin{vmatrix} u, & u_1, & u_2, & \dots & u_n \\ (u)_1, & (u_1)_1, & (u_2)_1, & \dots & (u_n)_2 \\ (u)_2, & (u_1)_2, & (u_2)_2, & \dots & (u_n)_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u)_n, & (u_1)_n, & (u_2)_n, & \dots & (u_n)_n \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u, & u_1, & u_2, & \dots & u_n \\ \Delta u, & \Delta u_1, & \Delta u_2, & \dots & \Delta u_n \\ \Delta^2 u, & \Delta^2 u_1, & \Delta^2 u_2, & \dots & \Delta^2 u_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta^n u, & \Delta^n u_1, & \Delta^n u_2, & \dots & \Delta^n u_n \end{vmatrix} = 0$$

et par consequent sous deux formes linéaires. Ces deux formes, comme il est aisé de voir, se convertissent facilement l'une dans l'autre ([26]). La seconde des formes indiquées a une grande analogie avec l'équation linéaire différentielle, et par suite ce qui a été dit rélativement à cette dernière peut être appliqué à l'équation aux différences avec des légères modifications. Ayant en vue d'éxposer dans un autre travail d'une manière plus détaillée la résolution des équations aux différences en

---

([25]) Pour les détails v. mon article: Общій способъ интегрированія линейныхъ диффсренціальныхъ уравненій n-го порядка съ перемѣнными коеффиціентами. Одесса 1877. (Méthode générale pour l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre n à coéfficients variables. Odessa 1877). et aussi les articles cités plus haut.

([26]) *Scott* ibid. p. 19 et 20.

nous basant sur les recherches du présent mémoire, comme nous l'avons déjà fait rélativement aux équations différentielles linéaires([27]), j'indiquerai ici seulement les propriétés bien connues des équations linéaires aux différences([28]), propriétés, qui résultent avec une parfaite évidence de ce qui a été dit plus haut. Voici ces propriétés.

Les coéfficients de l'équation linéaire aux différences d'ordre n sont des fonctions de ses intégrales particulières fondamentales et peuvent être éxprimés comme les mineurs du déterminant de $(n+1)^2$ éléments.

L'équation linéaire aux différences d'ordre n a n intégrales partihulières indépendantes entre elles (système fondamentale).

L'équation linéaire aux différences est satisfaite par des sommes de leurs intégrales particulières, multipliées par des valeurs indépendantes des opérations Δ.

L'équation linéaire aux différences peut être réprésentée sous l'une de six formes: sous les deux former linéaires, sous les double forme du déterminant et sous les deux formes, correspondantes à celles, qui ont été données dans le § V.

VIII.

Il a été mentionné, que la méthode du § VI pour la résolution des équations ne peut pas être appliquée à des équations algébriques par ce que pour ces dernières équations

---

([27]) Ce sont nos articles ci-dessus indiqués, dans lesquels la résolution des équations différentielles linéaires et quelques unes de leurs propriétés sont développées avec details, qui nous ont permis dans l'éxplication précédente de citer sommairement ces propriétés et la résolution même.

([28]) *Boole.* A tretise on the calculus of finite differences. London 1880 pag. 208 etc.

la condition (9) n'est pas remplie. Néanmoins à l'aide de cette méthode on peut résoudre les équations algébriques à l'aide des équations différentielles. Nous indiquerons ici sommairement la voie à suivre dans cette solution.

Applicons la méthode de l'intégrations des équations différentielles linéaires données plus haut pour le cas général au cas des équations à coéfficients constants, savoir à l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-2}\frac{d^2y}{dx^2}+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_ny=0 \quad (12)$$

où $P_1, P_2, P_3, \ldots . P_{n-2}, P_{n-1}, P_n$ sont quantités constantes. Le système de n intégrales particulières de cette équation, comme on sait, s'exprime ainsi

$$y_1=e^{a_1x},\ y_2=e^{a_2x},\ y_3=e^{a_3x}, \ldots . y_n=e^{a_nx} \quad (13)$$

où $a_1, a_2, a_3 \ldots \ldots a_n$ sont les racines d'une équation algébrique du dégré n de la forme

$$a^n+P_1a^{n-1}+P_2a^{n-2}+\ldots\ldots+P_{n-2}a^2+P_{n-1}a+P_n=0$$

D'autre part on a vue que les intégrales particulières de l'équation linéaire donnée (12) peuvent être exprimées par les séries

$$y_1=1+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots$$
$$\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx+\ldots$$

$$y_2=\int Q_1dx+Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx+\ldots\ldots$$

$$y_3=\int Q_1dx\int Q_2dx+\int Q_1dx\int Q_2dx....\int Q_ndx\int Q_1dx\int Q_2dx+.....$$

. . . .

$$y_n=\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_{n-1}dx+\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots$$
$$\ldots\int Q_ndx\int Q_1dx\int Q_2dx\ldots\int Q_{n-1}dx+\ldots$$

Déterminons $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ pour le cas considéré.

La valeur de Q_1, comme on a vue, se détermine par l'équation

$$\frac{d^{n-1}Q_1}{dx^{n-1}}+P_1\frac{d^{n-2}Q_1}{dx^{n-2}}+P_2\frac{d^{n-3}Q_1}{dx^{n-3}}+\ldots+P_{n-2}\frac{dQ_1}{dx}+P_{n-1}Q_1=0$$

dont les intégrales particulières, $P_1, P_2, P_3\ldots P_{n-1}$ étant constantes, peuvent être exprimées conformement à la notation, admise plus haut de la manière suivante

$$q_1=e^{b_1x},\ q_2=e^{b_2x},\ q_3=e^{b_3x},\ldots\ q_{n-2}=e^{b_{n-2}x},\ q_{n-1}=e^{b_{n-1}x} \quad (14)$$

où $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ sont les racines de l'équation algébrique

$$b^{n-1}+P_1b^{n-2}+P_2b^{n-3}+\ldots+P_{n-2}b+P_{n-1}=0 \quad (15)$$

Les valeurs des autres Q jusque Q_{n-1} inclusivement, comme on a vue, se déterminent par la formule générale

$$Q_p=|q_1, q_{p-2}^{(p-3)}|\cdot|q_1, q_p^{(p-1)}|\cdot|q_1, q_{p-1}^{(p-2)}|^{-2}$$

En portant ici les valeurs $q_1, q_2, \ldots q_p$ déterminées par le système (14), on aura toutes réductions faites

$$Q_p=\frac{(b_p-b_1)(b_p-b_2)\ldots(b_p-b_{p-1})}{(b_{p-1}-b_1)(b_{p-1}-b_2)\ldots(b_{p-1}-b_{p-2})}e^{(b_p-b_{p-1})x}$$

La valeur Q_n, déterminée de cette manière, sera

$$Q_n = -P_n \frac{1}{(b_{n-1}-b_1)(b_{n-1}-b_2)\ldots(b_{n-1}-b_{n-2})} e^{-b_{n-1}x}$$

Par cela le système des intégrales particulières de l'équation (12) s'exprime

$$y_1 = 1 - P_n \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx \ldots \int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x} dx \int e^{-b_{n-1}x} dx +$$

$$+ P_n^2 \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx \ldots \int e^{-b_{n-1}x} dx \int e^{b_1 x} dx \ldots \int e^{-b_{n-1}x} dx - \ldots\ldots$$

$$y_2 = \int e^{b_1 x} dx - P_n \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx \ldots \int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x} dx \int e^{-b_{n-1}x} dx \int e^{b_1 x} dx + \ldots$$

$$y_3 = \left(b_2 - b_1\right) \Big\{ \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx - P_n \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x} dx \int e^{-b_{n-1}x} dx \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx + \ldots \Big\}$$

. . . .

$$y_n = \left(b_{n-1}-b_1\right)\left(b_{n-1}-b_2\right)\ldots\left(b_{n-1}-b_{n-2}\right) \Big\{ \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx \ldots$$

$$\ldots \int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x} dx - P_n \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx \ldots$$

$$\ldots \int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x} dx \int e^{-b_{n-1}x} dx \int e^{b_1 x} dx \int e^{(b_2-b_1)x} dx \ldots \int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x} dx + \ldots \Big\}$$

On obtient sans difficulté par une intégration immédiate les valeurs des intégrales

$$\int e^{b_1x}dx=\frac{1}{b_1}e^{b_1x}$$

$$\int e^{b_1x}dx\int e^{(b_2-b_1)x}dx=\frac{1}{b_2(b_2-b_1)}e^{b_1x}$$

. . . .

$$\int e^{b_1x}dx\int e^{(b_2-b_1)x}dx\ldots\int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x}dx=\frac{1}{b_{n-1}(b_{n-1}-b_1)(b_{n-1}-b_2)\ldots(b_{n-1}-b_{n-2})}e^{b_{n-1}x}$$

En désignant, pour abréger en général

$$k(A)=\int e^{b_1x}dx\int e^{(b_2-b_1)x}dx\ldots\int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x}dx\int e^{-b_{n-1}x}(A)dx$$

et les opérations k n fois répétées par k^n nous aurons pour le système des intégrales particulières de l'équation (12) les expressions

$$\begin{aligned}
y_1&=1-P_nk(1)+P_n^2k^2(1)-P_n^3k^3(1)+\ldots+(-1)^mP_n^mk^m(1)+\ldots\\
y_2&=\frac{1}{b_1}\left\{e^{b_1x}-P_nk(e^{b_1x})+P_n^2k(e^{b_1x})-\ldots+(-1)^mP_n^mk^m(e^{b_1x})+\ldots\right\}\\
y_3&=\frac{1}{b_2}\left\{e^{b_2x}-P_nk(e^{b_2x})+P_n^2k^2(e^{b_2x})-\ldots+(-1)^mP_n^mk^m(e^{b_2x})+\ldots\right\}\quad(16)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n&=\frac{1}{b_{n-1}}\left\{e^{b_{n-1}x}-P_nk(e^{b_{n-1}x})+P_n^2k^2(e^{b_{n-1}x})-\ldots+(-1)^mP_n^mk^m(e^{b_{n-1}x})+\ldots\right\}
\end{aligned}$$

Ces séries sont en général convérgentes, par ce que aucune des fonctions sous le signe intégral ne devient pas infinie pour des valeurs finies de x ([29])

([29]) Les règles de convérgence de ces séries sont données dans notre article cité : *Zur Frage über die Integration* etc. p. 38 etc.

D'autre part du système (13) on a

$$a_1 = \frac{1}{x} \operatorname{Log} y_1,\ a_2 = \frac{1}{x} \operatorname{Log} y_2, \ldots\ldots a_n = \frac{1}{x} \operatorname{Log} y_n \cdot$$

où pour $y_1, y_2, \ldots y_n$ nous mettons leurs valeurs déterminées par le système (16), ce qui donne pour les racines d'une équation algébrique du dégré n des expressions en séries convérgentes dont les membres sont des fonctions des racines d'une équation algébrique du dégré $n-1$ et on a pour chaque racine une série déterminée et indépendante.

De ce qui a été dit on conclut sans difficulté que

1. Les valeurs $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ par lesquelles s'expriment les racines d'une équation donnée du dégré n se déterminent comme les racines d'une équation du dégré $n-1$, dont les coéfficients sont identiques aux coéfficients de l'équation donnée, et disposés suivant le même ordre excepté le dernier, qui ne figure pas dans l'équation du dégré $n-1$. Il est facile de voir, que les racines $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ peuvent être déterminées par la même méthode à l'aide des racines des l'équation d'ordre $n-2$ etc. Donc *on peut exprimer toutes les racines d'une équation donnée en fonction de ses coéfficiens et de plus chaque racine a sa propre expression.*

2. Puisque la résolution d'une équation donnée est amenée à la résolution d'une équation du dégré moindre d'une unité il s'en suit que *toute équation algébrique du dégré* n *a des racines et posséde* n *racines.*

En effet, en admettant l'existence de $n-1$ racines pour l'équation algébrique du dégré $n-1$, on trouve que l'équation du dégré n a des racines et qu'elle a n racines. Mais, comme on peut se persuader immédiatement, l'équation du prémier dégré a une racine, donc l'équation du deuxième dégré en a deux, par conséquent l'équation du troisième dégré en a trois etc.

Nous n'entrerons pas dans les détails du calcul des séries (16) qni expriment les racines d'une équation algébrique. Nous indiquerons ici seulement la nature des résultats que l'on obtient des opérations k plusieurs fois répétées. Mais dans un autre article qui se trouve en cours de préparation nous espérons de donner des recherches plus détaillées sur ces séries avec le but de les présenter sous une formes facile pour les calculs pratiques. Nous omettrons ici ces récherches non seulement parce qu'elles augmenteraient considérablement le volume de ce mémoire, mais encore par ce que ce memoire a seulement pour objet d'indiquer sommairement des propriétés générales: on a taché de maintenir ce caractère autant que possible dans tout ce qui a été dit plus haut.

Par l'intégration immédiate on obtient sans difficulté

$$k(1)=\int e^{b_1 x}dx\int e^{(b_2-b_1)x}dx\ldots\int e^{(b_{n-1}-b_{n-2})x}dx\int e^{-b_{n-1}x}dx=$$

$$=\frac{x}{(-1)^{n-1}b_1b_2\ldots b_{n-1}}=\frac{x}{P_{n-1}}$$

puisque $b_1, b_2, \ldots . b_{n-1}$ sont les racines de l'équation (15).

En suite nous désignons pour abréger

$$s_1=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_{n-2}}+\frac{1}{b_{n-1}}=\sum_{n-1}^{1}\frac{1}{b_\alpha}$$

$$s_2=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_1b_2}+\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{b_1b_3}+\frac{1}{b_2b_3}+\frac{1}{b_3^2}+\cdots+\frac{1}{b_{n-1}^2}=\sum_{n-1}^{1}\frac{1}{b_\alpha b_\beta}$$

$$s_3=\frac{1}{b_1^3}+\frac{1}{b_1^2b_2}+\frac{1}{b_1b_2b_3}+\frac{1}{b_1b_2^2}+\frac{1}{b_2^3}+\frac{1}{b_1^2b_3}+\ldots+\frac{1}{b_{n-1}^3}=\sum_{n-1}^{1}\frac{1}{b_\alpha b_\beta b_\gamma}$$

. . . .

$$s_p=\frac{1}{b_1^p}+\frac{1}{b_1^r b_2^q\ldots b_i^s}+\frac{1}{b_1b_2b_3\ldots b_p}+\ldots\ldots+\frac{1}{b_{n-1}^p}=\sum_{n-1}^{1}\frac{1}{b_\alpha b_\beta b_\gamma\ldots b_\theta}$$

Il est évident que les valeurs de tous les $s_1, s_2, \ldots s_p$ sont des fonctions symmétriques de racines de l'équation (15) et par suite elles peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles des coéfficiens de l'équation donnée. Avec cette condition nous aurons, comme il est facite de se persuader immediatement

$$k(1)=\frac{x}{P_{n-1}}$$

$$k^2(1)=k\left(\frac{x}{P_{n-1}}\right)=\frac{1}{P_{n-1}^2}\left\{\frac{x^2}{1,2}+s_1x\right\}$$

$$k^3(1)=k\left(\frac{1}{P_{n-1}^2}\left[\frac{x^2}{1.2}+s_1x\right]\right)=\frac{1}{P_{n-1}^3}\left\{\frac{x^3}{1.2.3}+s_1x^2+(2s_2+s_1^2)x\right\}$$

$$k^4(1)=\frac{1}{P_{n-1}^4}\left\{\frac{x^4}{1.2.3.4}+s_1\frac{x^3}{1.2}+\left(s_2+\frac{3}{2}s_1^2\right)x^2+(s_3+3s_1s_2+s_1^3)x\right\}$$

etc. L'expression pour le terme général $k^m(1)$ peut être représentée ainsi

$$k^m(1)=\frac{1}{P_{n-1}^m}\left\{\frac{x^m}{1.2.2\ldots(m-1).m}+s_1\frac{x^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-2)}+\right.$$

$$+\left(s_2+\frac{m-1}{2}s_1^2\right)\frac{x^{m-2}}{1.2.3\ldots(m-3)}+\ldots$$

$$\left.\ldots+B_{p,m}\frac{x^{m-p}}{1.2.3\ldots(m-p-1)}+\ldots+B_{m-1,m}x\right\}$$

où la valeur de tous les B se détermine par la formule

$$B_{p,m}=\mathsf{S}\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-[q+r+\ldots+u-1])}{1.2.3\ldots(q-1).q.1.2.3\ldots(r-1).r\ldots1.2.3\ldots(u-1).u}s_t^q s_r^r\ldots s_w^u$$

et pour tous les membres de cette somme la condition

$$tq+rv+\dots+uw=p$$

doit être satisfaite.

Donc tous les membres de la première sèrie du systéme (16) peuvent être exprimés par des fonctions symmètriques des racines de l'équation (15) qui a leur tour sont exprimées par des fonctions rationnelles des coéfficients de l'équation donnée.

De la même manière par l'intégration immédiate on obtient

$$k\left(e^{b_px}\right)=\frac{e^{b_px}}{(b_p-b_1)(b_p-b_2)\dots(b_p-b_{n-1})b_p}\left\{x+\left(\frac{1}{b_1-b_p}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{b_2-b_p}+\dots+\frac{1}{b_{p-1}-b_p}+\frac{1}{-b_p}\right)\right\}=\frac{e^{b_px}}{b_pf'(b_p)}\left\{x+\sigma_{1,p}\right\}$$

où on a désigné par $\sigma_{1,p}$ la somme des membre entre les secondes paranthéses et par $f'(b_p)$ l'expression

$$f'(b_p)=(b_p-b_1)(b_p-b_2)\dots(b_p-b_{n-1})=\left|^{b=b_p}\frac{df(b)}{db}=\right|^{b=b_p}\frac{d(b^{n-1}+P_1b^{n-2}+\dots+P_{n-2}b+P_{n-1})}{db}$$

Ensuite on aura de même

$$k^2\left(e^{b_px}\right)=\frac{e^{b_px}}{b_p^2[f'(b_p)]^2}\left\{\frac{x^2}{1.2}+(\Sigma_{1,p}+\sigma_{1,p})x+\sigma_{1,p}(\Sigma_{1,p}+\sigma_{1,p})\right\}$$

où $\Sigma_{1,p}$ désigne la somme

$$\Sigma_{1,p}=\frac{1}{b_p}+\frac{1}{b_1-b_p}+\frac{1}{b_2-b_p}+\dots+\frac{1}{b_{n-1}-b_p}$$

étc. Par cette voie d'intégration immédiate on peut déterminer autant de membres que l'on veut dans chacune des autres $n-1$ séries du système (16).

Nous ne donnons pas l'expression pour le terme général $k^m(e^{b_p x})$, semptable à l'expression pour le terme général de la première série, par ce qu'elle n'est pas suffisamment étudiée.

Enfin il reste à indiquer que les termes des séries du système (1) toutes les intégrations éffectuées peuvent être distribués en grouppes qui admettent la sommation, a l'aide de la quelle les séries même se ramenent à une forme plus simple.

La méthode exprosée plus haut pour la résolution des équations peut être éténdue encore sur une classe assez grande d'équations linéaires aux différentielles partielles d'ordre quelconque. Uu exemple de cette extension a été indiqué pour l'équation ([30]).

$$\frac{d^n z}{d\varphi d\xi \dots d\psi d\omega}=\Psi(\varphi,\xi,\dots\psi,\omega)z+\Phi(\varphi,\xi,\dots\psi,\omega)$$

([30]) V. notre article: Общій интегралъ уравненія съ частными производными n-го порядка вида

$$\frac{\partial^n z}{\partial\varphi\partial\xi\dots\partial\psi\partial\omega}=\Psi(\varphi,\xi,\dots\psi,\omega)z+\Phi(\varphi,\xi,\dots\psi,\omega)$$

Зап. Мат. Отд. Новоросс. Общ. Естествоисп. Томъ II 1878 Одесса. (L'intégrale générale de l'équation aux différentielles partielles d'ordre n de la forme

$$\frac{\partial^n z}{\partial\varphi\partial\xi\dots\partial\psi\partial\omega}=\Psi(\varphi,\xi,\dots\psi,\omega)z+\Phi(\varphi,\xi,\dots\psi,\omega)$$

Mem. de Sect. Mathém. de la Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie t. II 1878 Odessa).

dont l'intégrale est

$$Z=F_1+\int_{\varphi_0}^{\varphi}F_2d\varphi+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}F_3d\xi+\ldots.+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots\int_{\psi_0}^{\psi}F_nd\psi+$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots.\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Phi d\omega+$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Psi F_1d\omega+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Psi d\omega\int_{\varphi_0}^{\varphi}F_2d\varphi+$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots.\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Psi d\omega\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}F_3d\xi+\ldots..$$

$$\ldots..+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Psi d\omega\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots.\int_{\psi_0}^{\psi}F_nd\psi+$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots.\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Psi d\omega\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Phi d\omega+$$

$$+\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Psi d\omega\int_{\varphi_0}^{\varphi}d\varphi\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi\ldots\int_{\psi_0}^{\psi}d\psi\int_{\omega_0}^{\omega}\Psi F_1d\omega+\ldots.$$

où chaque des $F_1, F_2, \ldots F_n$ est une fonction arbitraire de $n-1$ variables indépendantes de la forme

$F_1=f_1(\xi,\ldots\psi,\omega)$	ne contient pas φ
$F_2=f_2(\varphi,\ldots.\psi,\omega)$	ne contient pas ξ
$F_3=f_3(\varphi,\xi,\ldots\psi,\omega)$	ne contient pas χ
....	....
$F_{n-1}=f_{n-1}(\varphi,\xi,\ldots\omega)$..	ne contient pas ψ
$F_n=f_n(\varphi,\xi,\ldots\psi)$	ne contient pas ω

L'intégrale indiquée et ses $n-1$ dérivées se convertissent comme il suit en des fonctions arbitraires en nombre n

$$\Big|^{\varphi=\varphi_0} z = F_1 = f(\xi, \ldots \psi, \omega)$$

$$\Big|^{\xi=\xi_0} \frac{dz}{d\varphi} = F_2 = f_2(\varphi, \ldots \psi, \omega)$$

$$\Big|^{\chi=\chi_0} \frac{d^2z}{d\varphi d\xi} = F_3 = f_3(\varphi, \xi, \ldots \psi, \omega)$$

. . . .

$$\Big|^{\psi=\psi_0} \frac{d^{n-2}z}{d\varphi d\xi \ldots d\psi} = F_{n-1} = f_{n-1}(\varphi, \xi, \ldots \omega)$$

$$\Big|^{\omega=\omega_0} \frac{d^{n-1}z}{d\varphi d\xi \ldots d\theta d\psi} = F_n = f_n(\varphi, \xi, \ldots \psi)$$

puisque les termes précédentes s'anéantissent par la différentiation par rapport aux variables qu'ils ne contiennent pas, et les termes suivants s'evanoissent par l'intégration entre des limites égales.

Comme on peut choisir arbitrairement l'ordre des différentiations, l'ordre des fonctions données F_1, F_2,... dont chacune ne renferme pas l'une des variables indépendantes peut être pris arbitrairement; on peut donc changer arbitrairement, l'intégrale indiquée par rapport à l'ordre des variables.

En outre dans ce dernier temps ([31]) on s'est occupé des propriétés, qui peuvent être très utiles pour l'étude semblable à celle qui a été donnée plus haut des équations linéaires aux derivées partielles d'ordre quelconque sous forme géné-

---

([31]) Les prémiéres indications rélatives aux quantités à trois indices rémontent à la seconde moitié du siècle passé. [*Vandermonde*. Mém. de l'Academie des sciences de Paris 1772 II, p. 516]. L'étude des déterminants cubiques et en général à *n* dimensions a commencé seulement vers la seconde moitié de notre siècle [Somoff 1865, Delander, Gasparis, Padova, Gegenbauer 1883 etc.].

rale ainsi que des équations algèbriques avec un nombre arbitraire d'inconnues.

D'autre part Sir William Thomson a donné in instrument pour la résolution mécanique des équations différentielles linéaires d'ordre quelconque([32]); à cet effet il se sert de la représentation de cette équation sous forme de n différentiations semblable à celle indiquée plus haut. Cette forme est intimmement liée à la résolution par séries des équations donnée au § IV; il paraît donc probable que l'instrument de Sir William Thomson a une importance universal comme un intrument qui résout les équations d'une forme bien plus générale, y compris l'équation algèbrique d'un degrè quelconque, par ce que cette équation peut être résolue par séries, comme nous avons vu, à l'aide des équations différentielles linéaires d'ordre respectif.

Odessa, Mars 1885.

([32]) *Sir William Thomson.* Proceedings of the Royal Society vol. XXIV 1876, pag. 271 etc.

О сходимости непрерывныхъ дробей.

И. В. Слешинскаго.

Sur la convergence des fractions continues.

Par M. J. Slechinsky.

Введеніе.

Вопросу о сходимости непрерывныхъ дробей посвящено немного работъ. Когда, послѣ появленія дроби Brounker'а въ Arithmetica infinitorum Wallis'а, непрерывными дробями стали заниматься Huygens, Euler, Lagrange и др., особое вниманіе геометровъ было обращено на дроби вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}},$$

гдѣ a_0, a_1,. .—цѣлыя положительныя числа. Lagrange въ прибавленіи къ переводу началъ алгебры Euler'а находитъ, что «les autres n'étant presque que de pure curiosité [1])». Эти дроби всегда сходятся. Первая, на сколько мнѣ извѣстно, работа, затрогивающая болѣе общій вопросъ о сходимости дроби при какихъ угодно положительныхъ членахъ звеньевъ, принадлежитъ Stern'у. Это—теорія непрерывныхъ дробей [2]). Въ четвертой главѣ этой работы говорится о сходимости дробей. Раз-

[1]) Élémens d'algebre etc. par M. Léonard Euler. T. II. 1774. стр. 380.

[2]) Theorie der Kettenbrüche. 1834. Также Crelle's Journal B. X, XI.

сматриваются дроби, въ которыхъ члены звеньевъ—положительныя цѣлыя числа. Дробь называется сходящейся, если подходящая дробь съ увеличеніемъ указателя до безконечности имѣетъ предѣлъ. Если подходящая дробь возрастаетъ безпредѣльно, непрерывная дробь называется расходящейся. Устанавливается различіе между «суммою» дроби и выраженіемъ, которое развертывается въ разсматриваемую дробь. Далѣе дается безъ доказательства теорема, по которой дробь съ положительными членами звеньевъ всегда сходится. Вскорѣ послѣ появленія этой работы Grunert [1]), приводя ту-же теорему, старается доказать ее. Теорема эта, однако, не вѣрна. Дробь съ положительными членами звеньевъ можетъ расходиться. Ошибку въ разсужденіи Grunert'а указываетъ Arndt [2]). Но еще раньше Arndt'а Schlömilch находитъ признакъ сходимости такой дроби [3]). Вслѣдъ затѣмъ Arndt, знакомый съ результатами Schlömilch'а, предлагаетъ въ указанномъ выше сочиненіи новый признакъ, позволяющій судить о сходимости дроби въ томъ случаѣ, когда признакъ Schlömilch'а не рѣшаетъ вопроса. Въ томъ-же году между Catalan'омъ и Guilmin'омъ [4]) незнавшими, повидимому, о работахъ нѣмецкихъ математиковъ, возникаетъ полемика о сходимости непрерывныхъ дробей. Изъ этой полемики видно, что даже понятіе о сходимости непрерывной дроби не было тогда общимъ достояніемъ. Въ это время появляется работа Seidel'я [5]), въ которой для дроби вида

---

[1]) Grunert. Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik. Erster Theil. III. Brandenburg, 1838. Этой работы я не видѣлъ и передаю содержаніе ея по ниже указанной работѣ Arndt'а.

[2]) Arndt. De fractionibus continuis. Sundiae. 1845.

[3]) Schlömilch. Handbuch der math. Analysis. Erster Theil. Algebr. Analysis. 1845.

[4]) Nouv. ann. de math. T. 4. 1845. Продолженіе въ томахъ 5 и 8.

[5]) Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche. München. 1846. Эту работу я цитирую по другой ниже указанной работѣ того-же автора.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}$$

гдѣ $a_0, a_1, a_2,\ldots$ — положительныя числа, доказана замѣчательная теорема, состоящая въ томъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ сходимости дроби служитъ расходимость ряда

$$a_0+a_1+a_2+\ldots$$

Къ той-же теоремѣ приходитъ нѣсколько позже Stern [1]), не зная о работѣ Seidel'я. Прежде чѣмъ дать эту теорему, Stern, продолжая изслѣдованія Arndt'a, указываетъ безконечный рядъ признаковъ сходимости и расходимости дроби этого вида. Тотъже вопросъ разсматривается въ замѣткѣ, извлеченной изъ бумагъ Oppermann'a [2]). Время составленія этой замѣтки не указано. Въ ней доказана теорема, отличающаяся отъ теоремы Seidel'я лишь тѣмъ, что вмѣсто ряда

$$a_0+a_1+a_2+\ldots.$$

разсматривается произведеніе

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots. \quad ,$$

которое, какъ извѣстно, сходится и расходится одновременно съ рядомъ.

Дальнѣйшія изслѣдованія касаются случая, когда члены звеньевъ не всѣ—положительны. Въ указанной выше работѣ 1834 года Stern говоритъ о дробяхъ съ отрицательными числителями звеньевъ. Онъ разсматриваетъ дробь

$$\cfrac{b_1}{a_1-\cfrac{b_2}{a_2-\cdots}}$$

---

[1]) Crelle's Journal. B. 38. 1847 годъ.

[2]) Tidsskrift for Mathematik. Zeuthen. 5-ая тетрадь 1883 года.

гдѣ a_1, a_2, ...; b_1, b_2, ...—числа цѣлыя положительныя и приходитъ къ заключенію, что эта дробь сходится, коль скоро $a_n > b_n$ для всѣхъ значеній n. Доказательство этого предложенія у него неточно, такъ какъ не принято въ соображеніе, что величина, заключающаяся между двумя конечными числами можетъ не имѣть предѣла. Точное доказательство этой теоремы находимъ въ вышеуказанной книгѣ Schlömilch'а [1]. Соображенія-же, на которыхъ основано это доказательство встрѣчаются въ 4 примѣчаніи къ Éléments de Géométrie Legendre'а. Въ другой работѣ Seidel [2] также разсматриваетъ дроби, которыхъ всѣ числители звеньевъ отрицательны, а знаменатели—положительны. Онъ приводитъ эти дроби къ виду

$$b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ddots}}$$

и доказываетъ, что случай, когда всѣ b равны 2, раздѣляетъ дроби на два класса, весьма различныхъ между собою по ходу измѣненій подходящихъ дробей съ увеличеніемъ указателя. Если $b_n \geqq 2$, то дробь сходится; если $b_n < 2$, то дробь можетъ сходиться или расходиться. Этотъ результатъ стоитъ въ простой связи [3] съ преобразованіемъ непрерывной дроби, которое встрѣчается у Lagrange'а [4]. Это преобразованіе обращаетъ дробь

$$\cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \ddots}}$$

въ дробь

---

[1] Handbuch der algebr. Analysis. 5 Auflage стр. 298.

[2] Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruchs etc. München, 1855. Тоже Зап. баварск. акад. н. II. cl. VII Bd. III Abth.

[3] Heine. Handbuch der Kugelfunctionen. 1878. Стр. 266.

[4] Élém. d'algebre p. Euler стр. 391. T. II. 1774 годъ.

$$\frac{1}{b_1-1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_2-2+\frac{1}{1+\frac{1}{b_3-2+\ldots}}}}}\,.$$

Такъ что, если $b_n > 2$, то разсматриваемая дробь приводится къ дроби съ положительными членами звеньевъ. Прилагая къ этой дроби теорему Seidel'я, приведенную въ началѣ, видимъ, что она сходится. Наконецъ, въ указанной выше замѣткѣ Oppermann'а приводится безъ доказательства слѣдующая теорема Дробь

$$\frac{1}{a_1 i^{v_1}+\frac{1}{a_2 i^{v_2}+\ldots}}$$

сходится, если для конечныхъ значенiй h никакое изъ чиселъ a_h, a_{h+1},... не будетъ <2. Здѣсь $i=\sqrt{-1}$, значенія чиселъ v_1, v_2,... не указаны. Эта теорема составляетъ частный случай теоремы, доказанной въ настоящей работѣ и состоящей въ томъ, что дробь

$$\frac{b_1}{a_1+\frac{b_2}{a_2+\ldots}}$$

сходится, коль скоро

$$|a_n| \geqq |b_n|+1\,.$$

Сходимость дробей, содержащихъ перемѣнныя количества, сдѣлалась позже предметомъ изслѣдованія. Вопросъ о сходимости перемѣнной дроби ставитъ и рѣшаетъ въ 1866 году Thomé [1]) для непрерывной дроби, выражающей функцію Gauss'а

[1]) Crelle's Journal. Bd. 66.

$F(\alpha,1,\gamma,x)$. Въ слѣдующей работѣ [1]) Thomé распространяетъ свое изслѣдованіе на случай дроби, выражающей функцію

$$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)}{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}.$$

Результатъ изслѣдованія—крайне простой. Эти дроби сходятся во всей плоскости за исключеніемъ отрѣзка вещественной оси отъ 1 до ∞. Thomé достигаетъ результата, находя ассимптотическія выраженія знаменателей подходящихъ дробей съ помощью преобразованія перемѣнной

$$x=\frac{4z}{(1+z)^2},$$

пользуясь при этомъ дифференціальнымъ уравненіемъ разлагаемой функціи. Должно замѣтить, что тотъ-же результатъ, найденный другимъ путемъ, содержится въ отрывкѣ статьи Riemann'a, написанной въ 1864, но напечатанной лишь въ 1876 году [2]). Въ томъ-же 1866 году, къ которому относится первая работа Thomé, Laurent [3]) занимается изслѣдованіемъ области сходимости періодической дроби

$$\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\ddots}}$$

Выводя извѣстное выраженіе для знаменателя подходящей дроби, Laurent не пользуется, однако, также извѣстнымъ выраженіемъ для n подходящей дроби

$$2x\frac{(1+\sqrt{1+4x})^n-(1-\sqrt{1+4x})^n}{(1+\sqrt{1+4x})^{n+1}-(1-\sqrt{1+4x})^{n+1}},$$

[1]) Crelle's Journal. Bd. 67.

[2]) Riemann's Gesammelte Werke. стр. 406.

[3]) Nouv. Ann. T. V. Note sur les fractions continues.

изъ котораго легко вывести, что непрерывная дробь сходится во всей плоскости за исключеніемъ отрѣзка вещественной отрицательной оси отъ $-\frac{1}{4}$ до $-\infty$. Причемъ значеніе $x=-\frac{1}{4}$ не исключается. Вмѣсто этого, авторъ приходитъ для положительнаго x къ заключенію, что дробь сходится при $x<1$, а для остальныхъ даетъ выраженіе, которое должно въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ рѣшать вопросъ о сходимости. Тотъ-же вопросъ разсматривался еще въ иной формѣ. Отъ разложенія $\sqrt{{}^1/_4\alpha^2-\beta}$ получается, какъ извѣстно, дробь

$$\frac{1}{2}\alpha-\cfrac{\beta}{\alpha-\cfrac{\beta}{\alpha-\ddots}}$$

Если придать этой дроби видъ

$$\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\ddots}},$$

то, приложивъ указанную выше теорему объ области сходимости періодической дроби, найдемъ, что при положительныхъ α и β должно быть $\alpha^2>4\beta$ для сходимости дроби. Shlömilch-же въ 4 изданіи своей алгебры (1868 года) даетъ условіе сходимости $\alpha\geqq\beta+1$. Это условіе Weyr, исходя изъ геометрическихъ соображеній, замѣняетъ въ 1869 году вышеуказаннымъ условіемъ, которое вслѣдъ за тѣмъ Schlömilch доказываетъ аналитически [1]). Всѣ эти результаты содержатся въ одной общей теоремѣ о сходимости дроби вида

$$\cfrac{a_1x}{1+\cfrac{a_2x}{1+\ddots}},$$

[1]) Schlömilch's Zeitschr. B. 17. 1872. Также Algebr. An. 5 Aufl. стр. 319.

которая доказана въ настоящей работѣ.

Остается упомянуть еще объ одной общей теоремѣ сходимости непрерывныхъ дробей, найденной въ послѣднее время. Въ 1884 году Stieltjes [1]) даетъ доказательство слѣдующей теоремы. Непрерывная дробь, происходящая отъ разложенія

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z-x},$$

сходится во всей плоскости, кромѣ прямолинейнаго отрѣзка отъ -1 до $+1$. Доказательство это основано на нѣкоторыхъ неравенствахъ. Въ той-же статьѣ содержится утвержденіе, что подобнымъ-же образомъ можетъ быть доказана сходимость дроби для

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x} dx$$

во всей плоскости внѣ прямолинейнаго отрѣзка отъ a до b, если только $f(x)$ на этомъ отрѣзкѣ не дѣлается отрицательной. Замѣчательныя неравенства, при помощи которыхъ можетъ быть дѣйствительно доказана эта теорема, далъ впервые безъ доказательства П. Л. Чебышевъ [2]). Впервые доказываетъ эти неравенства А. А. Марковъ [3]) въ 1884 году. Тѣ-же неравенства находитъ и доказываетъ также въ 1884 году, не знавшій о предыдущихъ работахъ Stieltjes [4]). Доказательство-же вышеуказанной теоремы о сходимости непрерывной дроби даетъ А. А. Марковъ въ 1885 году [5]).

---

[1]) Comptes Rendus. T. 99.

[2]) Journ. Liouville. 1874. Sur les valeurs limites des intégrales.

[3]) О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей.

[4]) Ann. scient. de l'éc. nor. sup. 1884 г. Письма Маркова и Stieltjes'а во 2 томѣ за 1885 годъ.

[5]) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества.

Предметомъ настоящей работы служитъ вопросъ о сходимости непрерывныхъ дробей. Сдѣлаемъ общій обзоръ содержащихся въ ней истинъ. Мы будемъ говорить о дроби

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots}}, \qquad (a)$$

которую можно представить, между прочимъ, въ видахъ

$$\cfrac{c_1}{1+\cfrac{c_2}{1+\cdots}} \qquad (b)$$

и

$$\cfrac{1}{d_1+\cfrac{1}{d_2+\cdots}} \qquad (c)$$

Ниже будутъ указаны формулы для перехода отъ каждаго изъ этихъ видовъ къ остальнымъ. Поэтому можно было-бы ограничиться однимъ изъ нихъ. Мы будемъ, однако, пользоваться всѣми тремя видами, потому что это упрощаетъ выраженія и доказательства теоремъ.

Если непрерывная дробь безконечна, то будемъ называть ее сходящейся въ томъ случаѣ, когда подходящая дробь съ увеличеніемъ указателя до ∞ имѣетъ предѣлъ. Въ противномъ случаѣ дробь будетъ расходящейся. Далѣе, будемъ называть дробь перемѣнной, если члены звеньевъ ея содержатъ перемѣнныя количества. Вопросъ о сходимости перемѣнныхъ дробей можетъ быть поставленъ двояко. Можно искать условій сходимости дробей даннаго вида или по данной функціи, выражаемой дробью или по даннымъ членамъ звеньевъ ея. Послѣдній вопросъ и будетъ предметомъ нашего разсужденія. Теоремы о схо-

димости перемѣнныхъ дробей могутъ быть выведены изъ теоремъ о сходимости постоянной дроби. Поэтому прежде всего займемся вопросомъ о сходимости постоянныхъ дробей.

Разсматривая вопросъ о сходимости постоянныхъ дробей вида (a), мы естественно останавливаемся сначала на самомъ простомъ случаѣ, когда всѣ количества a и b—положительны. Для этого случая имѣетъ мѣсто вышеуказанная теорема Seidel'я, по которой необходимымъ и достаточнымъ условіемъ сходимости дроби (c) служитъ расходимость ряда

$$d_1+d_2+d_3+\dots.$$

Эта теорема сводитъ вопросъ о сходимости непрерывной дроби къ вопросу о сходимости ряда. Весьма замѣчательно простое слѣдствіе этой теоремы, состоящее въ томъ, что расходимость дроби (c) можетъ имѣть мѣсто лишь при $\lim\limits_{n=\infty} d_n=o$, или, что то-же, дробь (b) можетъ расходиться лишь при условіи, что c_n возрастаетъ безпредѣльно съ n. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ дробь сходится. Что-же касается случая, когда c_n возрастаетъ безпредѣльно, то дробь при этомъ условіи можетъ и сходиться и расходиться.

Если количества a и b въ дроби (a) перестаютъ быть положительными, теорема Seidel'я перестаетъ быть справедливой. Это видно изъ слѣдующаго примѣра. Возьмемъ дробь

$$\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\dots}}}$$

Если предположимъ, что эта дробь сходится и обозначимъ ея величину чрезъ x, то найдемъ

$$x=\frac{1}{a-x}$$

Откуда

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-1}$$

При положительномъ $a>2$, x будетъ мнимымъ, что невозможно. Итакъ эта дробь расходится. Представивъ ее въ видѣ (c), находимъ, что здѣсь $d_n=(-1)^n a$ и рядъ Σd_n расходится. Итакъ здѣсь расходимость ряда Σd_n не влечетъ за собой сходимости дроби. Если вмѣсто ряда Σd_n будемъ разсматривать рядъ $\Sigma|d_n|$, то предыдущій примѣръ покажетъ, что и въ такомъ случаѣ расходимость ряда не влечетъ за собой сходимости дроби. Но если $\Sigma|d_n|$ сходится, то легко убѣдиться, что дробь (c) расходится. Эта теорема даетъ возможность усмотрѣть зависимость между сходимостью непрерывной дроби съ какими-либо звеньями и дроби, которая получается изъ нея замѣной членовъ звеньевъ ихъ абсолютными величинами. Оказывается, что расходимость этой послѣдней дроби всегда влечетъ за собой расходимость первой. Въ случаѣ-же сходимости послѣдней дроби вопросъ о сходимости первой остается нерѣшеннымъ. Она можетъ сходиться или расходиться. Существуетъ теорема, дающая возможность доказать сходимость дроби съ какими либо звеньями во многихъ случаяхъ. Теорема эта состоитъ въ томъ, что дробь (a) сходится всегда, если $|a_n|-|b_n|\geq 1$. Это условіе, будучи достаточнымъ для сходимости дроби, не оказывается необходимымъ. Интересно, однако, замѣтить, что 1 представляетъ наименьшее изъ чиселъ k, удовлетворяющихъ требованію, чтобы условіе $|a_n|-|b_n|\geq k$ было достаточнымъ для сходимости дроби. Это послѣднее видно изъ примѣра

$$\cfrac{1}{2-\delta+\cfrac{1}{-(2-\delta)+\cfrac{1}{2-\delta+\ldots}}},$$

гдѣ $k=1-\delta$. Эта дробь можетъ быть представлена въ видѣ

$$\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a-\cdots}}}\,,$$

гдѣ

$$a=2-\delta$$

и, слѣдовательно, расходится, какъ показано выше, при сколь угодно маломъ количествѣ δ. Изъ приведенной выше теоремы получаются слѣдующія теоремы для дробей видовъ (b) и (c). Дробь (c) сходится, если для всѣхъ значеній n будетъ $|d_n|\geqq 2$. Дробь (b) сходится, если для всѣхъ значеній n будетъ $|c_n|\leqq\frac{1}{4}$.

Остановимся теперь, для опредѣленности, на дроби (b). Мы только что видѣли, что, если $|c_n|\leqq\frac{1}{4}$, дробь сходится. Если это условіе не выполняется, дробь можетъ сходиться или расходиться. Чтобы подвинуться дальше въ изученіи сходимости дробей, необходимо болѣе полно характеризовать законъ, которому слѣдуютъ количества c_n при возрастаніи n до ∞. Мы предположимъ, что существуетъ $\lim\limits_{n=\infty} c_n$. Если $\lim\limits_{n=\infty} c_n=o$, то вопросъ рѣшается непосредственно на основаніи предыдущей теоремы. Такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty} c_n=o$, то можно всегда указать столь большое m, что для $n\geqq m$ будетъ $|c_n|<\frac{1}{4}$. Если $m=1$, то, по предыдущей теоремѣ, дробь сходится. Если-же $m>1$, то, отбросивъ m первыхъ звеньевъ, получимъ сходящуюся дробь. Обратимся теперь къ случаю, когда $\lim\limits_{n=\infty} c_n=c\gtrless o$. Сопоставленіе дроби ($b$) въ этомъ случаѣ съ періодической дробью

$$\cfrac{c}{1+\cfrac{c}{1+\cdots}}$$

даетъ возможность показать, что условія сходимости для этихъ дробей одинаковы. Именно, эти дроби сходятся, если c не равно отрицательному числу, превышающему $\frac{1}{4}$ по абсолютной величинѣ. Причемъ предполагается, что, въ случаѣ надобности, отброшено достаточное число начальныхъ звеньевъ.

Мы переходимъ теперь къ перемѣннымъ дробямъ. Въ анализѣ разсматриваются обыкновенно дроби двухъ видовъ

$$\cfrac{c_1 x^{p_1}}{1+\cfrac{c_2 x^{p_2}}{1+\ddots}} \quad ; \qquad \cfrac{k_1}{g_1+\cfrac{k_2}{g_2+\ddots}} \quad ,$$

гдѣ $p_1, p_2,\ldots$—цѣлыя положительныя числа; $c_1, c_2,\ldots k_1, k_2,\ldots$ постоянныя количества и $g_1, g_2,\ldots$ цѣлыя алгебраическія функціи независимой перемѣнной x. Первый видъ получается отъ обращенія въ непрерывную дробь восходящаго степеннаго ряда, второй—отъ обращенія нисходящаго ряда. Остановимся сначала на первомъ изъ этихъ видовъ. Мы указали выше теорему, по которой дробь будетъ сходиться, коль скоро для всѣхъ значеній n будетъ $|c_n x^{p_n}|<\frac{1}{4}$. Отсюда видимъ, что, коль скоро количества c_n не возрастаютъ безпредѣльно, непрерывная дробь имѣетъ нѣкоторую область сходимости двухъ измѣреній. Въ самомъ дѣлѣ, можно выбрать r такъ, чтобы для $|x|\leq r$ вышеприведенное условіе выполнялось. Тогда внутри круга радіуса r дробь будетъ сходиться. Далѣе, прилагая послѣднюю изъ вышеприведенныхъ теоремъ, приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ. Если количества c_n убываютъ до нуля, а цѣлыя положительныя показатели p не возрастаютъ безпредѣльно, то дробь сходится для всѣхъ конечныхъ значеній x и представляетъ трансцендентную функцію съ одной существенно особенной точкой въ ∞. Если-же количества c_n стремятся къ предѣлу c, отличному отъ нуля, то мы

ограничиваемся случаемъ, когда всѣ p равны между собой. Для простоты будемъ предполагать ихъ равными 1. Въ этомъ случаѣ дробь сходится для всѣхъ значеній x внѣ продолженія прямой, соединяющей точку 0 съ точкой $\frac{-1}{4c}$. Что касается числителей и знаменателей подходящихъ дробей, то возможно указать условія, при которыхъ для нихъ существуютъ предѣлы. Далѣе для дробей втораго вида, въ предположеніи, что функціи g—линейныя, приложеніе той-же теоремы даетъ слѣдующій результатъ. Пусть будетъ $g_n = a_n x + b_n$ и $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n=\infty} k_n = k$. Областью сходимости такой дроби будетъ вся плоскость, за исключеніемъ отрѣзка прямой линіи, дѣлящагося въ точкѣ $\frac{-b}{a}$ пополамъ, имѣющаго длину $\frac{4|\sqrt{k}|}{|a|}$ и направленіе вектора $\frac{\sqrt{-k}}{a}$.

Постоянныя дроби.

Формулы, которыя предполагаются извѣстными.

1. Для непрерывной дроби

$$\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cdots}}, \qquad (1)$$

если числители и знаменатели послѣдовательныхъ подходящихъ дробей обозначены соотвѣтственно чрезъ

$$p_0,\ p_1,\ p_2 \ldots;\ q_0,\ q_1,\ q_2, \ldots,$$

имѣютъ мѣсто зависимости

$$\left.\begin{array}{l} p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2},\ p_0 = 0,\ p_1 = b_1 \\ q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2},\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1}{q_0 q_1} - \frac{b_1 b_2}{q_1 q_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{b_1 b_2 \ldots b_n}{q_{n-1} q_n} \qquad (3)$$

Дробь (1) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\cfrac{B_1}{A_1+\cfrac{B_2}{A_2+\cdots}},$$

гдѣ $A_n = k_n a_n$, $B_1 = k_1 b_1$, $B_n = k_{n-1} k_n b_n$ при $n > 1$ и $k_1, k_2, \ldots$ произвольныя отличныя отъ нуля числа. Числителей и знаменателей послѣдовательныхъ подходящихъ дробей новой непрерывной дроби обозначимъ соотвѣтственно чрезъ

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ldots;\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ldots,$$

Тогда будетъ

$$P_n=k_1k_2\ldots k_np_n,\ Q_n=k_1k_2\ldots k_nq_n$$

Въ частности дробь (1) можно представить въ видѣ

$$\cfrac{1}{d_1+\cfrac{1}{d_2+\ldots}} \tag{4}$$

причемъ

$$\left.\begin{aligned} d_1=\frac{a_1}{b_1},\ d_{2n-1}=a_{2n-1}\frac{b_2b_4\ldots b_{2n-2}}{b_1b_3\ldots b_{2n-1}}&,\quad n>1\\ d_{2n}=a_{2n}\frac{b_1b_3\ldots b_{2n-1}}{b_2b_4\ldots b_{2n}}&,\quad n>0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для этой дроби будетъ

$$\left.\begin{aligned} P_n=d_nP_{n-1}+P_{n-2},\ P_0=0,\ P_1=1\\ Q_n=d_nQ_{n-1}+Q_{n-2},\ Q_0=1,\ Q_1=d_1 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{1}{Q_0Q_1}-\frac{1}{Q_1Q_2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{Q_{n-1}Q_n} \tag{7}$$

Дробь (1) можетъ быть также представлена въ видѣ

$$\cfrac{c_1}{1+\cfrac{c_2}{1+\ldots}}, \tag{8}$$

гдѣ

$$c_1=\frac{b_1}{a_1},\ c_n=\frac{b_n}{a_{n-1}a_n};\ n>1 \tag{9}$$

Для этой дроби будетъ

$$\left.\begin{array}{l} P_n = P_{n-1} + c_n P_{n-2}\,,\ P_0 = 0\,,\ P_1 = c_1 \\ Q_n = Q_{n-1} + c_n Q_{n-2}\,,\ Q_0 = 1\,,\ Q_1 = 1 \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{c_1}{Q_0 Q_1} - \frac{c_1 c_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{c_1 c_2 \ldots c_n}{Q_{n-1} Q_n} \tag{11}$$

О сходимости дробей съ положительными членами звеньевъ.

2. Предположимъ сначала, что всѣ количества a и b въ дроби (1) положительны. Представимъ ее, для простоты, въ видѣ (4). Количества d будутъ положительныя. Въ силу (7) подходящая дробь выражается рядомъ. Такимъ образомъ вопросъ о сходимости дроби приводится къ вопросу о сходимости ряда. Отношеніе общаго члена этого ряда къ предыдущему равно

$$-\frac{Q_{p-2}}{Q_p}$$

Изъ (6), вслѣдствіе положительности количествъ d, имѣемъ

$$Q_p > Q_{p-2} \tag{12}$$

Поэтому

$$\frac{Q_{p-2}}{Q_p} < 1$$

т. е. рядъ (7) будетъ въ разсматриваемомъ случаѣ убывающимъ знакопеременнымъ рядомъ. Если продолжимъ его безконечно, то достаточнымъ и необходимымъ условіемъ сходимости его будетъ, какъ извѣстно, убываніе общаго члена до нуля т. е.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} = 0 \tag{13}$$

Это условіе легко замѣнить другимъ, весьма простымъ условіемъ.

Обозначимъ меньшее изъ двухъ чиселъ $Q_0=1$ и $Q_1=d_1$ чрезъ m, а большее чрезъ M, такъ что $M\gtreqless m$. Изъ (12) слѣдуетъ, что

$$Q_{2n}>Q_0 \text{ и } Q_{2n+1}>Q_1$$

т. е.

$$Q_p>m$$

для всякаго p. На этомъ основаніи изъ зависимости (6) получаемъ

$$Q_n>md_n+Q_{n-2}\,.$$

Замѣнимъ въ этомъ неравенствѣ n послѣдовательно чрезъ $n-2$, $n-4$, $n-6,\ldots.$ до 3 или 2, смотря потому будетъ-ли n нечетнымъ или четнымъ числомъ, и сложимъ всѣ полученныя неравенства почленно. Тогда получимъ

$$Q_n>m(d_n+d_{n-2}+d_{n-4}+\ldots+1),$$

гдѣ предпослѣдній членъ въ скобкахъ будетъ d_3 или d_2, смотря потому будетъ-ли n нечетнымъ или четнымъ числомъ. Поэтому

$$Q_nQ_{n-1}>m^2(1+\ldots+d_{n-2}+d_n)(1+\ldots+d_{n-3}+d_{n-1}) \quad (14)$$

Съ другой стороны

$$Q_0\gtreqless M \quad Q_1\gtreqless M$$

Поэтому

$$Q_2=d_2Q_1+Q_0\leqq M(1+d_2)$$

$$Q_3=d_3Q_2+Q_1\leqq M(1+d_2)d_3+M$$

$$\text{т. е. } <M(1+d_2)(1+d_3)$$

Допустивъ, что

$$Q_n<M(1+d_2)(1+d_3)\ldots(1+d_n)$$

$$Q_{n-1}\leqq M(1+d_2)\ldots..(1+d_{n-1}),$$

находимъ

$$Q_{n+1}=d_{n+1}Q_n+Q_{n-1}$$

$$<M(1+d_2)...(1+d_{n-1})[(1+d_n)d_{n+1}+1]$$

т. е. $$<M(1+d_2)...(1+d_{n-1})(1+d_n)(1+d_{n+1})$$

Итакъ

$$Q_n<M(1+d_2)...(1+d_n).$$

Поэтому

$$Q_nQ_{n-1}<M^2(1+d_2)...(1+d_n).(1+d_2)...(1+d_{n-1})$$

Тѣмъ болѣе

$$Q_nQ_{n-1}<M^2\{(1+d_2)...(1+d_n)\}^2 \qquad (15)$$

Изъ (14) и (15) слѣдуетъ

$$\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}<\frac{1}{m^2(1+...+d_{n-2}+d_n)(1+...+d_{n-3}+d_{n-1})} \qquad (16)$$

$$\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}>\frac{1}{M^2[(1+d_2)(1+d_3)\ldots(1+d_n)]^2} \qquad (17)$$

Теперь легко видѣть, что условіе (13) равносильно условію расходимости ряда

$$d_1+d_2+d_3+\ldots. \qquad (18)$$

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ (18) расходится, то по крайней мѣрѣ одинъ изъ рядовъ

$$d_1+d_3+\ldots.$$

$$d_2+d_4+\ldots.$$

долженъ расходиться и слѣдовательно по (16) будетъ

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{Q_nQ_{n-1}}=0$$

Наоборотъ, если рядъ (18) сходится, то произведеніе

$$(1+d_2)(1+d_3)\ldots.$$

также, какъ извѣстно, будетъ сходиться. Поэтому (17) показываетъ, что $\dfrac{1}{Q_{n-1}Q_n}$ не можетъ стремиться къ 0 т. е. условіе (13) не выполняется.

Итакъ сходимость ряда (7), продолженнаго до безконечности т. е. существованіе предѣла $\dfrac{P_n}{Q_n}$ при $n=\infty$ приводится въ зависимость отъ расходимости ряда (18). Такимъ образомъ получается теорема Seidel'я: Дробь

$$\cfrac{1}{d_1+\cfrac{1}{d_2+\ldots}},$$

гдѣ

$$d_p>0$$

для всѣхъ значеній p, сходится или расходится, смотря потому расходится-ли или сходится соотвѣтственно рядъ

$$d_1+d_2+d_3+\ldots.,$$

Легко перейти къ дроби (1) при помощи формулъ преобразованія (5), данныхъ въ членѣ 1. Рядъ Σd_n обратится въ

$$\sum\left(a_{2n-1}\frac{b_2b_4\ldots b_{2n-2}}{b_1b_3\ldots b_{2n-1}}+a_{2n}\frac{b_1b_3\ldots b_{2n-1}}{b_2b_4\ldots b_{2n}}\right)$$

Этотъ рядъ распадается на два ряда

$$\sum a_{2n-1}\frac{b_2b_4\ldots b_{2n-2}}{b_1b_3\ldots b_{2n-1}}$$

$$\sum a_{2n}\frac{b_1b_3\ldots b_{2n-1}}{b_2b_4\ldots b_{2n}}$$

Если по крайней мѣрѣ одинъ изъ этихъ рядовъ расходится, то начальный рядъ также расходится и, слѣдовательно, дробь будетъ сходиться. Если-же оба ряда сходятся, то начальный рядъ также сходится и, слѣдовательно, дробь расходится.

3. Выведемъ изъ этой теоремы нѣсколько слѣдствій, дающихъ возможность во многихъ случаяхъ судить о сходимости дроби непосредственно. Эта теорема приводитъ вопросъ о сходимости дроби къ вопросу о сходимости весьма простаго ряда. Каждый признакъ сходимости ряда даетъ поэтому нѣкоторый признакъ сходимости дроби. Необходимымъ условіемъ сходимости ряда (18) служитъ условіе $\lim_{n=\infty} d_n=0$. Если поэтому d_n съ увеличеніемъ n до ∞ не стремится къ предѣлу 0, то дробь непремѣнно сходится. Это обстоятельство можетъ имѣть мѣсто въ трехъ различныхъ случаяхъ. Во первыхъ d_n можетъ имѣть предѣлъ, отличный отъ нуля; во вторыхъ d_n можетъ возрастать безпредѣльно; въ третьихъ оно можетъ не имѣть предѣла, колеблясь съ увеличеніемъ n въ конечныхъ или безконечныхъ границахъ.

Отсюда получается, между прочимъ, признакъ Schlömilch'а, по которому дробь (1) сходится, если

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}>0 .$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулъ (5) находимъ

$$\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}=d_n d_{n+1} .$$

Поэтому условіе Schlömilch'а для дроби (4) будетъ

$$\lim_{n=\infty} d_n d_{n+1}>0$$

При такомъ условіи не можетъ быть $\lim_{n=\infty} d_n=0$ и слѣдовательно дробь будетъ сходиться.

Предположимъ теперь, что $\lim_{n=\infty}(d_n d_{n+1})=0$ и разсмотримъ рядъ

$$\frac{d_n d_{n+1}}{1+d_n d_{n+1}}+\frac{d_{n+1}d_{n+2}}{1+d_{n+1}d_{n+2}}+\ldots.$$

Вслѣдствіе этого условія, члены разсматриваемаго ряда отличаются отъ членовъ ряда

$$d_n d_{n+1}+d_{n+1}d_{n+2}+\ldots.$$

сомножителями, имѣющими предѣлъ 1. Поэтому, если первый рядъ расходится, то и второй долженъ расходиться. Въ такомъ случаѣ рядъ

$$d_n+d_{n+1}+\ldots.$$

долженъ расходиться, ибо сходимость его влекла-бы за собой, какъ извѣстно, сходимость предыдущаго ряда. Итакъ, по теоремѣ Seidel'я, непрерывная дробь будетъ въ этомъ случаѣ сходится т. е. дробь (4) сходится, если при условіи $\lim_{n=\infty}(d_n d_{n+1})=0$ расходится рядъ

$$\sum\frac{d_n d_{n+1}}{1+d_n d_{n+1}}.$$

Переходя къ дроби (1) и положивъ для сокращенія

$$z_k=\frac{b_{k+1}}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d_k d_{k+1}},$$

получаемъ признакъ сходимости Arndt'a: Дробь (1) сходится, если, при безконечно возрастающемъ z_n, расходится рядъ

$$\frac{1}{1+z_{k+1}}+\frac{1}{1+z_{k+2}}+\ldots.$$

Изъ разсужденій, приведенныхъ въ началѣ этого члена видно, что дробь (4) можетъ расходиться лишь при условіи

$\lim\limits_{n=\infty} d_n=0$. Но изъ (5) и (9) слѣдуетъ

$$c_n=\frac{1}{d_n d_{n-1}}$$

Отсюда заключаемъ, что дробь (8) можетъ расходиться лишь при условіи, что c_n возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ n. Такъ что, если c_n имѣетъ конечный предѣлъ или не имѣетъ вовсе предѣла, колеблясь въ конечныхъ или безконечныхъ границахъ, то дробь (8) сходится.

Изъ тѣхъ-же разсужденій видно, что дробь (1) сходится если $a_n>b_n$ для всѣхъ значеній n и если a_n не стремится къ нулю, съ увеличеніемъ n до ∞. Въ самомъ дѣлѣ, тогда $\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}=d_n d_{n+1}$ не можетъ стремиться къ нулю. Если же, при условіи $a_n>b_n$, будетъ $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$, то дробь можетъ и сходиться, и расходиться. Для примѣра возьмемъ дробь, въ которой

$$a_n=\frac{1}{n^{2p}} \quad , \quad b_n=\frac{1}{(n+1)^{2p}} \quad ,$$

Для этой дроби выполняются условія

$$a_n>b_n \qquad \lim_{n=\infty} a_n=0.$$

Мы покажемъ, что она будетъ сходиться или расходиться, смотря потому будетъ-ли соотвѣтственно $p<1$ или $p>1$. Приложимъ теорему Seidel'я. Ряды

$$\sum a_{2n-1}\frac{b_2 b_4 \ldots b_{2n-2}}{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}} \quad \text{и} \quad \sum a_{2n}\frac{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}}{b_2 b_4 \ldots b_{2n}}$$

въ данномъ случаѣ суть

$$\Sigma u_n \text{ и } \Sigma v_n,$$

гдѣ

$$u_n=\left(\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)^{2p}$$
$$=\left[\frac{2.2.4.4\ldots(2n-2)(2n-2).2n}{1.3.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)}\cdot\frac{2n}{(2n-1)^2}\right]^p$$

$$v_n=\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)^{2p}$$
$$=\left[\frac{1.3.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)}{2.2.4.4\ldots(2n-2)(2n-2)(2n)}\cdot\frac{(2n+1)^2}{(2n)^3}\right]^p$$

Но, по формулѣ Wallis'a,

$$\frac{2.2.4.4\ldots(2n-2)(2n-2).2n}{1.3.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)(2n-1)}=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_n,$$

гдѣ

$$\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0 \quad .$$

Поэтому

$$u_n=\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_n\right)^p\left(\frac{2n}{(2n-1)^2}\right)^p \quad ,$$

$$v_n=\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon_n\right)^{-p}\left(\frac{(2n+1)^2}{(2n)^3}\right)^p \quad .$$

Сравнимъ эти выраженія съ выраженіемъ

$$w_n=\frac{1}{n^p} \quad .$$

Такъ какъ

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_n}{w_n}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^p \quad , \quad \lim_{n=\infty}\frac{v_n}{w_n}=\pi^{-p} \quad ,$$

то ряды Σu_n и Σv_n сходятся и расходятся одновременно съ ря-

домъ Σw_n т. е. сходятся при $p>1$ и расходятся при $p<1$. Поэтому, по теоремѣ Seidel'я, разсматриваемая дробь сходится при $p<1$ и расходится при $p>1$.

О сходимости дробей съ какими угодно членами звеньевъ.

4. Переходимъ теперь къ случаю, когда члены звеньевъ —какія угодно комплексныя числа. Въ этомъ случаѣ теорема Seidel'я не имѣетъ мѣста. Однако та часть этой теоремы, въ которой говорится о расходимости дроби можетъ быть обобщена. Именно можно показать, что дробь (4) расходится, если рядъ $\Sigma|d_n|$ сходится.

Пусть будетъ

$$|d_n|=\delta_n \ , \ |Q_n|=\Omega_n$$

Назовемъ, сверхъ того, чрезъ $\overline{\Omega}_n$ величину, въ которую обращается Q_n, вслѣдствіе замѣны каждаго d_k чрезъ δ_k. Тогда будемъ имѣть, по (6),

$$\overline{\Omega}_0=\Omega_0 \ , \ \overline{\Omega}_1=\Omega_1$$

Допустивъ, что

$$\Omega_{n-1}\leqq\overline{\Omega}_{n-1} \text{ и } \Omega_{n-2}\leqq\overline{\Omega}_{n-2} \ ,$$

находимъ изъ (6) послѣдовательно

$$\Omega_n\leqq\delta_n\Omega_{n-1}+\Omega_{n-2} \ ,$$

$$\Omega_n\leqq\delta_n\overline{\Omega}_{n-1}+\overline{\Omega}_{n-2} \ .$$

Но

$$\delta_n\overline{\Omega}_{n-1}+\overline{\Omega}_{n-2}=\overline{\Omega}_n \ .$$

Поэтому

$$\Omega_n\leqq\overline{\Omega}_n$$

Итакъ послѣднее неравенство доказано для всѣхъ значеній n. Отсюда

$$\frac{1}{|Q_{n-1}Q_n|}=\frac{1}{\mathfrak{Q}_n\mathfrak{Q}_{n-1}}\geqq\frac{1}{\overline{\mathfrak{Q}}_n\overline{\mathfrak{Q}}_{n-1}}$$

Дано, что рядъ $\Sigma\delta_n$ сходится. Поэтому, на основанія теоремы Seidel'я, количество $\frac{1}{\overline{\mathfrak{Q}}_n\overline{\mathfrak{Q}}_{n-1}}$ не убываетъ до нуля. Въ силу предыдущаго неравенства, тоже должно сказать о $\frac{1}{Q_{n-1}Q_n}$ т. е. общій членъ ряда (7) не убываетъ до нуля съ увеличеніемъ указателя до безконечности. Значитъ дробь расходится.

Эта теорема даетъ возможность убѣдиться, что дробь (1) всегда расходится, если расходится дробь, составленная изъ абсолютныхъ величинъ членовъ звеньевъ ея. Въ самомъ дѣлѣ, приведя обѣ дроби къ виду (4), замѣчаемъ, что по (5) знаменатели звеньевъ второй дроби будутъ абсолютными величинами знаменателей звеньевъ первой. Если вторая дробь расходится, то рядъ, составленный изъ знаменателей звеньевъ, будетъ, по теоремѣ Seidel'я, сходиться. Для первой дроби онъ будетъ рядомъ, составленнымъ изъ абсолютныхъ величинъ знаменателей звеньевъ. Поэтому, по предыдущей теоремѣ, первая дробь будетъ расходиться.

5. Мы докажемъ теперь, что дробь (1) всегда сходится, если

$$|a_n|\geqq 1+|b_n|.$$

Введемъ обозначенія

$$|a_n|=\alpha_n\ ,\quad |b_n|=\beta_n\ ,\quad |q_n|=\omega_n\ .$$

По условію будетъ

$$\alpha_n\geqq 1+\beta_n \tag{19}$$

Доказательство этой теоремы основано на неравенствѣ

$$\omega_n - \omega_{n-1} \geqq \beta_1\beta_2 \ldots \beta^n .$$

Это неравенство для $n=1$ провѣряется непосредственно, ибо $\omega_1 = \alpha_1$ и $\omega_0 = 1$. Допустивъ, что

$$\omega_{n-1} - \omega_{n-2} \geqq \beta_1\beta_2 \ldots \beta_{n-1}, \tag{20}$$

имѣемъ

$$\omega_{n-1} > \omega_{n-2}$$

и, по (19),

$$\alpha_n\omega_{n-1} > \beta_n\omega_{n-2}$$

Поэтому, на основаніи (2),

$$\omega_n \geqq \alpha_n\omega_{n-1} - \beta_n\omega_{n-2}$$

Откуда, по (19),

$$\omega_n - \omega_{n-1} \geqq (\omega_{n-1} - \omega_{n-2})\beta_n$$

и, по (20),

$$\omega_n - \omega_{n-1} \geqq \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$$

Итакъ неравенство это доказано. Изъ него слѣдуетъ

$$\frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n}{\omega_{n-1}\omega_n} \leqq \frac{1}{\omega_{n-1}} - \frac{1}{\omega_n} .$$

Отсюда

$$\frac{\beta_1}{\omega_0\omega_1} + \frac{\beta_1\beta_2}{\omega_1\omega_2} + \ldots + \frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n}{\omega_{n-1}\omega_n} \leqq 1 - \frac{1}{\omega_n}$$

Но $\omega_n > \omega_0 > 1$. Поэтому лѣвая часть неравенства остается всегда меньше 1. Сравнивъ ее съ правой частью равенства (3), заключаемъ, что конечный рядъ, выражающій $\frac{p_n}{q_n}$, будучи продолженъ до безконечности, сходится абсолютно. Слѣдовательно непрерывная дробь сходится.

6. Отсюда вытекаютъ слѣдующія теоремы. Дробь (4) сходится, если $|d_n|\geqq 2$. Въ самомъ дѣлѣ, сравнивъ ее съ (1), видимъ, что здѣсь $|b_n|=1$, $|a_n|=|d_n|\geqq 2$ т. е. условіе $|a_n|\geqq 1+|b_n|$ выполняется. Поэтому, по предыдущей теоремѣ, дробь сходится. Въ частности, дробь

$$\cfrac{1}{d_1-\cfrac{1}{d_2-\cdots}},$$

гдѣ $d_1, d_2, \ldots$ —положительныя числа, можетъ быть представлена въ видѣ

$$\cfrac{-1}{-d_1+\cfrac{1}{d_2+\cfrac{1}{-d_3+\cdots}}}$$

и, слѣдовательно, будетъ сходиться при $d_n\geqq 2$. Эту послѣднюю теорему доказалъ Seidel.

Другое слѣдствіе теоремы члена 5 относится къ дроби 8) и состоитъ въ томъ, что дробь этого вида сходится, если $|c_n|\leqq\frac{1}{4}$. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $c_n=\frac{b_n}{4}$, находимъ изъ условія $|c_n|\leqq\frac{1}{4}$, условіе $|b_n|<1$. Дробь (8) обращается въ

$$\cfrac{\frac{b_1}{4}}{1+\cfrac{\frac{b_2}{4}}{1+\cdots}}$$

или

$$\cfrac{\frac{1}{2}b_1}{2+\cfrac{b_2}{2+\cfrac{b_3}{2+\cdots}}},$$

для которой выполняется условіе $|a_n| \geq 1 + |b_n|$.

7. Изложенныя выше теоремы не вполнѣ рѣшаютъ вопросъ о сходимости непрерывной дроби въ томъ случаѣ, когда члены звеньевъ дроби—произвольныя комплексныя числа. Мы будемъ разсматривать дробь въ видѣ (8). Сходимость дроби зависитъ отъ закона измѣненій c_n съ увеличеніемъ n до безконечности. Если предположить, что $\lim\limits_{n=\infty} c_n$ существуетъ, то является возможность вполнѣ изслѣдовать сходимость дроби. Приэтомъ приходится разсматривать сначала частный случай, когда $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$.

Такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$, то можно всегда указать столь большое число m, что для $n \geqq m$ будетъ $|c_n| < \frac{1}{4}$. Если $m=1$, то, по второй теоремѣ члена, 6 дробь будетъ сходиться. Если-же $m>1$, то, отбросивъ m первыхъ звеньевъ, получимъ сходящуюся дробь.

8. Перейдемъ теперь къ случаю, когда $\lim\limits_{n=\infty} c_n = c \gtrless 0$. Сначала прослѣдимъ общій ходъ разсужденій. Мы будемъ пользоваться формулой (11). Если рядъ, стоящій справа, будучи продолженъ безконечно, сходится, то $\frac{P_n}{Q_n}$ имѣетъ предѣлъ при $n=\infty$. Поэтому должно обратиться къ изслѣдованію условій сходимости этого ряда. Отношеніе общаго члена этого ряда къ предыдущему члену равно

$$-\frac{c_n Q_{n-2}}{Q_n}$$

Должно изслѣдовать, какъ измѣняется эта величина съ возрастаніемъ n до ∞. Естественно прежде всего посмотрѣть, не сремится-ли $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ къ предѣлу. На основанія (10) имѣемъ

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}}=1+\frac{c_n}{\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}} \qquad (21)$$

Отсюда непосредственно видно, что, если $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ имѣетъ предѣлъ, этотъ предѣлъ удовлетворяетъ квадратному уравненію

$$y^2-y-c=o.$$

Введемъ обозначенія

$$\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}=a\,, \qquad \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}=b\,,$$

гдѣ $\sqrt{1+4c}$—то изъ двухъ значеній корня котораго вещественная часть не отрицательна, такъ что $|a|\leqq|b|$. Начнемъ съ частнаго случая, когда всѣ c_n равны c, т. е. когда дробь будетъ періодической. Въ этомъ случаѣ члены $n^{oй}$ подходящей дроби могутъ быть найдены. Именно

$$p_n=c\frac{a^n-b^n}{a-b}\,, \qquad q_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

При помощи этихъ выраженій легко убѣдиться, что, при $|a|<|b|$,

$$\lim_{n=\infty}\frac{p_n}{q_n}=-a\,, \quad \lim_{n=\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}}=b\,, \quad \lim_{n=\infty}\frac{q_n}{q_{n-1}}=b\,.$$

Этотъ результатъ приводитъ къ мысли—изслѣдовать въ общемъ случаѣ количество

$$R_n=\frac{Q_n}{Q_{n-1}}-b\,.$$

Для него, изъ (21), находимъ зависимость

$$b+R_n=1+\frac{c_n}{b+R_{n-1}}\,,$$

которая позволяетъ изслѣдовать, имѣетъ-ли въ общемъ случаѣ количество R_n предѣлъ, или нѣтъ. Оказывается, что, за исключеніемъ случая $|a|=|b|$, количество R_n имѣетъ предѣлъ 0 или $a-b$. Далѣе можно показать, что, если отбросить достаточное число начальныхъ звеньевъ въ непрерывной дроби, для остальной дроби всегда будетъ

$$\lim_{n=\infty} R_n=0,$$

т. е.

$$\lim_{n=\infty}\frac{Q_n}{Q_{n-1}}=b \quad .$$

Поэтому предѣлъ отношенія общаго члена къ предыдущему будетъ $\frac{-c}{b^2}$ или, такъ какъ $c=-ab$, этотъ предѣлъ будетъ равенъ $\frac{a}{b}$. Но $|a|<|b|$. Поэтому рядъ будетъ сходиться.

9. Перейдемъ теперь къ доказательству этихъ утвержденій. Начнемъ съ изслѣдованія дроби

$$\cfrac{c}{1+\cfrac{c}{1+\ldots}} \quad . \qquad (22)$$

Имѣемъ

$$p_0=o,\ p_1=c,\ p_n=p_{n-1}+cp_{n-2} \quad ,$$

$$q_0=1,\ q_1=1,\ q_n=q_{n-1}+cq_{n-2} \quad .$$

Но уравненію вида

$$u_n=u_{n-1}+cu_{n-2}$$

удовлетворяетъ

$$u_n=y^n\ ,$$

если y опредѣляется уравненіемъ

$$y^2-y-c=0.$$

Корни этого уравненія:

$$a=\frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}, \qquad b=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

При этомъ знакъ корня выбранъ такъ, что, положивъ

$$\sqrt{1+4c}=m+ni,$$

имѣемъ $m\geqq 0$. Такъ какъ

$$|a|=\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2+n^2-2m}$$

$$|b|=\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2+n^2+2m},$$

то, коль скоро $m>0$, будетъ $|a|<|b|$. При $m=0$ имѣемъ $|a|=|b|$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ

$$\sqrt{1+4c}=ni$$

т. е.

$$1+4c=-n^2$$

или

$$c=-\frac{1+n^2}{4}$$

т. е. c— отрицательное число, превышающее $\frac{1}{4}$ по абсолютной величинѣ. Итакъ, если c— отрицательное число, превышающее $\frac{1}{4}$ по абсолютной величинѣ, то $|a|=|b|$. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ $|a|<|b|$. Пусть будутъ A и B произвольныя количества, независящія отъ n. Тогда общее рѣшеніе уравненія

$$u_n=u_{n-1}+cu_{n-2}$$

можно представить въ видѣ

$$u_n = Aa^n + Bb^n .$$

Выбравъ A и B такъ, чтобы u_n имѣло данныя величины u_0 и u_1 для $n=0$ и $n=1$, получаемъ

$$u_n = \frac{u_1 - bu_0}{a-b} a^n + \frac{au_0 - u_1}{a-b} b^n$$

Пользуясь этой формулой для опредѣленія p_n и q_n, и замѣтивъ, что $a+b=1$, находимъ

$$p_n = c\frac{a^n - b^n}{a-b}, \qquad q_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

Отсюда, замѣтивъ, что $c=-ab$, находимъ

$$\frac{p_n}{q_n} = -a\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1},$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = b \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} - 1},$$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = b \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}.$$

Переходя къ предѣлу при $n=\infty$, видимъ, что при $|a|<|b|$, т. е если c неравно отрицательному числу, превышающему $\frac{1}{4}$ по абсолютной величинѣ, будетъ

$$\lim_{n=\infty}\frac{p_n}{q_n}=-a\ ,\qquad \lim_{n=\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}}=b\ ,\qquad \lim_{n=\infty}\frac{q_n}{q_{n-1}}=b. \quad (23)$$

Можно замѣтить, что при $|a|=|b|$ эти предѣлы не существуютъ, ибо тогда $\left|\frac{a}{b}\right|=1$ и, слѣдовательно, $\frac{a}{b}=e^{i\varphi}$, гдѣ φ— вещественное число. Всѣ три выраженія зависятъ отъ дроби вида

$$\frac{e^{(m+1)i\varphi}-1}{e^{mi\varphi}-1}$$

или

$$e^{i\varphi}\left(1+\frac{1-e^{-i\varphi}}{e^{mi\varphi}-1}\right),$$

которая не имѣетъ предѣла, ибо $e^{mi\varphi}$ при $m=\infty$ не имѣетъ предѣла.

10. Теперь можемъ перейти къ общему случаю. Для этого изслѣдуемъ количество

$$R_n=\frac{Q_n}{Q_{n-1}}-b\ .$$

При этомъ будемъ предполагать, что $|a|<|b|$. Изъ (21) находимъ

$$b+R_n=1+\frac{c_n}{b+R_{n-1}}\ , \qquad (24)$$

гдѣ $\lim\limits_{n=\infty} c_n=c=-ab$.

Предположимъ сначала, что возможно найти такія числа m и $\tau>0$, что при $n\geqq m$ будетъ $|R_n|>\tau$. Предыдущую зависимость напишемъ въ слѣдующемъ видѣ

$$-(b+R_{n-1})=\frac{c_n}{1-(b+R_n)}\ .$$

Прилагая эту зависимость нѣсколько разъ, находимъ

$$-(b+R_{n-1})=\cfrac{c_n}{1+\cfrac{c_{n+1}}{1+\cdots+\cfrac{c_{n+k-1}}{1-(b+R_{n+k-1})}}} \qquad (25)$$

Обозначимъ числителей и знаменателей подходящихъ дробей непрерывной дроби

$$\cfrac{c_n}{1+\cfrac{c_{n+1}}{1+\cdots}} \qquad (26)$$

соотвѣтственно чрезъ

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ldots$$

гдѣ

$$u_0=1,\ u_1=c_n,\ v_0=1,\ v_1=1.$$

Тогда будетъ

$$\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}=\frac{u_k+c_{n+k}u_{k-1}}{v_k+c_{n+k}v_{k-1}}.$$

Если замѣнимъ c_{n+k} чрезъ $-(b+R_{n+k-1})$, то, въ силу (25), $\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}$ обратится въ $-(b+R_{n-1})$. Такимъ образомъ получимъ

$$-(b+R_{n-1})=\frac{u_k-(b+R_{n+k-1})u_{k-1}}{v_k-(b+R_{n+k-1})v_{k-1}}$$

или

$$-(b+R_{n-1})=\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}+\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}\cdot\frac{\frac{u_k}{u_{k-1}}-\frac{v_k}{v_{k-1}}}{\frac{v_k}{v_{k-1}}-b-R_{n+k-1}}.$$

Прибавивъ по a съ обѣихъ сторонъ, можемъ придать этому равенству видъ

$$-(R_{n-1}-(a-b))=\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}+a+\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}\cdot\frac{\frac{u_k}{u_{k-1}}-b-\left(\frac{v_k}{v_{k-1}}-b\right)}{\frac{v_k}{v_{k-1}}-b-R_{n+k-1}}.$$

Въ силу предположенія $|R_{n+k-1}|$ превышаетъ нѣкоторую отличную отъ нуля величину, количество-же $\left|\frac{v_k}{v_{k-1}}-b\right|$, какъ сейчасъ увидимъ, можетъ быть выбрано сколь угодно малымъ. Поэтому будетъ

$$\left|\frac{v_k}{v_{k-1}}-b\right|<|R_{n+k-1}|$$

и предыдущее равенство дастъ

$$|R_{n-1}-(a-b)|\leqq\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}+a\right|+\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}\right|\cdot\frac{\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}-b\right|+\left|\frac{v_k}{v_{k-1}}-b\right|}{|R_{n+k-1}|-\left|\frac{v_k}{v_{k-1}}-b\right|}. \quad (27)$$

При помощи этого неравенства легко показать, что при всякомъ ε, можно найти такое m, что для $n\gtreqless m$ будетъ $|R_n-(a-b)|<\varepsilon$. Это значитъ, что $\lim_{n=\infty} R_n=a-b$. Для доказательства этого утвержденія замѣчаемъ, что количества u_ν и v обращаются соотвѣтственно въ p_ν и q_ν, если положить всѣ c_ν равными c. Но, по (23), такъ какъ $|a|<|b|$, при всякихъ $\delta, \delta', \delta''$ можно найти такое число k, чтобы было

$$\left|\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}+a\right|<\frac{\delta}{2},\ \left|\frac{p_k}{p_{k-1}}-b\right|<\frac{\delta'}{2},\ \left|\frac{q_k}{q_{k-1}}-b\right|<\frac{\delta''}{2}. \quad (28)$$

Выбравъ такое k, мы выбираемъ m такъ, чтобы для $n\gtreqless m$ количества $c_n, c_{n+1}, \ldots c_{n+k-1}$ отличались столь мало отъ c, чтобы было

$$\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|<\frac{\delta}{2}, \left|\frac{u_k}{u_{k-1}}-\frac{p_k}{p_{k-1}}\right|<\frac{\delta'}{2}, \left|\frac{v_k}{v_{k-1}}-\frac{q_k}{q_{k-1}}\right|<\frac{\delta''}{2}. \quad (29)$$

Это всегда возможно, ибо $\lim\limits_{n=\infty} c_n=c$ и, слѣдовательно, c_n, $c_{n+1}, \ldots c_{n+k-1}$ могутъ быть сколь угодно приближены къ c, а при $c_n=c_{n+1}=\ldots c_{n+k-1}=c$ всѣ эти разности, представляющія раціональныя функціи количествъ $c_n, \ldots c_{n+k-1}$, обращаются въ нули. Изъ неравенствъ (28) и (29) слѣдуетъ

$$\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}+a\right|<\delta, \left|\frac{u_k}{u_{k-1}}-b\right|<\delta', \quad \left|\frac{v_k}{v_{k-1}}-b\right|<\delta''. \quad (30)$$

По предположенію существуютъ числа m и $\tau>0$ такія, что $|R_n|>\tau$ при $n\geq m$. Выберемъ

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta'=\delta''=\frac{\tau\varepsilon}{3\varepsilon+4|a|}. \quad (31)$$

Увеличивъ, если понадобится, m, удовлетворяющее при этомъ выборѣ условіямъ (30), достигнемъ выполненія одновременно съ ними неравенства

$$|R_{n+k-1}|>\tau. \quad (32)$$

Тогда изъ (30) и (31) находимъ

$$\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}+a\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (33)$$

Отсюда, если $\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}\right|<|a|$, слѣдуетъ

$$\frac{\varepsilon}{2}>\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}\right|-|a|$$

т. е.

$$\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}\right|<|a|+\frac{\varepsilon}{2}, \quad (34)$$

что остается справедливымъ и при $\left|\frac{u_{k-1}}{v_{k-1}}\right|<|a|$ т. е. имѣетъ мѣсто всегда. Затѣмъ, по (30) и (31),

$$\left|\frac{u_k}{u_{k-1}}-b\right|<\frac{\tau\varepsilon}{3\varepsilon+4|a|}\ ,\ \left|\frac{v_k}{v_{k-1}}-b\right|<\frac{\tau\varepsilon}{3\varepsilon+4|a|}\ . \tag{35}$$

Пользуясь неравенствами (32), (33), (34) и (35), находимъ изъ (27)

$$|R_{n-1}-(a-b)|<\varepsilon\ ,\ n\overline{\gtrless}m\ .$$

Предположимъ теперь, что нельзя найти такихъ чиселъ m и τ, чтобы при $n\overline{\gtrless}m$ было $|R_n|>\tau$. Въ такомъ случаѣ, пользуясь зависимостями $a+b=1$ и $ab=-c$, представимъ (24) въ видѣ

$$R_n=\frac{c_n-c+aR_{n-1}}{b+R_{n-1}}\ .$$

Такъ какъ ниже R_n предполагается достаточно малымъ, то будетъ

$$|R_{n-1}|<|b|\ .$$

Поэтому

$$|R_n|\leqq\frac{|c_n-c|+|a||R_{n-1}|}{|b|-|R_{n-1}|}\ . \tag{36}$$

Такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty} c_n=c$, то при всякомъ $\varepsilon>o$, не превышающемъ $|b|-|a|$, начиная съ нѣкотораго $n=m$, будемъ имѣть

$$|c_n-c|<(|b|-|a|-\varepsilon)\varepsilon\ . \tag{37}$$

Далѣе, найдется такое $p>m$, для котораго будетъ

$$|R_p|\leqq\varepsilon\ , \tag{38}$$

ибо въ противномъ случаѣ существовали-бы числа m и ε такія, что при $n\overline{\gtrless}m$, $R_n>\varepsilon$, что противно предположенію. Положимъ те-

перь въ (36) и (37) $n=p+1$. Тогда, присоединяя къ полученнымъ неравенствамъ неравенство (38), найдемъ

$$|R_{p+1}|\leqq\varepsilon\ .$$

и т. д. Итакъ $|R_n|\leqq\varepsilon$ при $n\geqq p$. Отсюда $\lim\limits_{n=\infty} R_n=0$. Соединяя обѣ части доказательства, находимъ, что при $|a|<|b|$, $\lim\limits_{n=\infty} R_n$ всегда существуетъ и равняется 0 или $a-b$.

Докажемъ теперь, что всегда можно отбросить столько начальныхъ звеньевъ въ дроби (8), чтобы для остальной дроби количество R_n имѣло предѣлъ 0. По вышедоказанному возможны два случая. Количество это имѣетъ предѣлъ 0 или $a-b$. Поэтому достаточно показать, что R_n не можетъ стремиться къ предѣлу $a-b$ если отброшено достаточно начальныхъ звеньевъ. Это будетъ показано, если докажемъ, напримѣръ, что R_n остается постоянно меньше по абсолютной величинѣ, чѣмъ $\frac{1}{2}\,|a-b|$. Для этого замѣтимъ, что при $c_1=c_2=\ldots.=c$ дробь (8) обращается въ періодическую дробь и количество $R_k=\frac{Q_k}{Q_{k-1}}-b$ переходитъ въ $r_k=\frac{q_k}{q_{k-1}}-b$. По (23) будетъ $\lim\limits_{k=\infty} r_k=0$. Поэтому при каждомъ ε можно выбрать k такъ, чтобы было

$$|r_k|<\frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{39}$$

Далѣе, переходя къ R_k, замѣчаемъ, что $\lim\limits_{n=\infty} c_n=c$. Поэтому можно найти такое m, чтобы для $n\geqq m$ количества c_n сколь угодно мало отличались отъ c. Отбросимъ всѣ предшествующія звенья и остальныя c_n обозначимъ опять чрезъ c_1, c_2,.... Количество R_k, обращающееся въ r_k при $c_1=c_2=\ldots=c_k=c$ будетъ къ нему сколь угодно близко. Поэтому можно выбрать m такъ, чтобы было

$$|R_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \qquad (40)$$

Изъ (39) и (40) слѣдуетъ

$$|R_k| < \varepsilon$$

Это неравенство не нарушится, если замѣнимъ c_1, c_2,... иными количествами, отбрасывая еще сколько угодно начальныхъ звеньевъ. Поэтому, для всякаго $0 < \varepsilon < |b| - |a|$, можно достигнуть выполненія условія

$$|c_n - c| < (|b| - |a| - \varepsilon)\varepsilon \; .$$

Тогда изъ неравенства (36) при $n = k+1$, при помощи предыдущаго неравенства, взятаго для $n = k+1$ и неравенства $|R_k| < \varepsilon$, получимъ

$$|R_{k+1}| < \varepsilon$$

и т. д. Такимъ образомъ пріидемъ къ заключенію, что

$$|R_n| < \varepsilon$$

для $n \overline{\overline{>}} k$. Если возьмемъ теперь $\varepsilon \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}|a-b|$, то утвержденіе наше будетъ доказано.

Итакъ, если въ дроби (8) отбросимъ достаточное число начальныхъ звеньевъ, то для новой дроби будетъ

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

т. е.

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = b.$$

Поэтому отношеніе общаго члена ряда (11), продолженнаго до ∞, къ предыдущему члену будетъ имѣть предѣлъ

$$-\frac{c}{b^2} = \frac{a}{b}$$

Такъ какъ $|a|<|b|$, то предѣлъ этого отношенія будетъ по абсолютной величинѣ меньше 1. Отсюда, какъ извѣстно, слѣдуетъ, что члены ряда, по крайней мѣрѣ начиная съ опредѣленнаго указателя, всѣ конечны и рядъ, составленный изъ нихъ сходится. Въ данномъ случаѣ и безконечно большіе начальные члены не причиняютъ расходимости ряда. Въ самомъ дѣлѣ, какой либо членъ ряда можетъ быть равенъ ∞ лишь тогда, когда для опредѣленнаго значенія n имѣемъ $Q_n=0$. Но тогда обращаются въ ∞ два члена

$$(-1)^{n-1}\frac{c_1c_2\ \ldots c_n}{Q_{n-1}Q_n} \text{ и } (-1)^n\frac{c_1c_2\ldots c_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}.$$

Сумма же ихъ равна

$$(-1)^{n-1}\frac{c_1c_2\ldots c_n}{Q_{n-1}Q_{n+1}}$$

и остается конечной, такъ какъ, въ силу зависимости (10), смежныя количества Q не могутъ быть равны 0. Итакъ непрерывная дробь будетъ сходиться. Такимъ образомъ приходимъ къ теоремѣ: непрерывная дробь (8) сходится, если $\lim\limits_{n=\infty} c_n=c$ и c не равно отрицательному числу, превышающему $\frac{1}{4}$ по абсолютной величинѣ. Причемъ предполагается, что, въ случаѣ надобности, отброшено достаточное количество начальныхъ звеньевъ.

Перемѣнныя дроби.

Дроби, отвѣчающія восходящимъ рядамъ.

11. Мы начнемъ съ изслѣдованія области сходимости дроби вида

$$\frac{c_1 x^{\nu_1}}{1+} \frac{c_2 x^{\nu_2}}{1+} \cdots \qquad (41)$$

гдѣ $\lim\limits_{n=\infty} c_n = o$ и ν_n цѣлое положительное число, не возрастающее вмѣстѣ съ n безпредѣльно. Положивъ $c_n = \frac{k_n}{4}$, получимъ дробь

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{k_1 x^{\nu_1}}{2+} \frac{k_2 x^{\nu_2}}{2+} \cdots$$

Такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty} c_n = o$, то $\lim\limits_{n=\infty} k_n = o$. Изслѣдуемъ эту дробь внутри круга произвольнаго радіуса r. Эта дробь имѣетъ видъ (1). Для изслѣдованія ея мы будемъ пользоваться соображеніями, изложенными въ членѣ 5. Условіе

$$|a_n| \gtreqless 1 + |b_n| \qquad (42)$$

будетъ выполняться для этой дроби, если будетъ

$$|k_n x^{\nu_n}| < 1 .$$

Но для разсматриваемыхъ значеній x

$$|k_n x^{\nu_n}| < |k_n| r^{\nu_n}$$

и слѣдовательно условіе (42) будетъ выполнено, если будетъ

$$|k_n| r^{\nu_n} < 1$$

или

$$|k_n| < \frac{1}{r^{\nu_n}} .$$

Можетъ случиться, что всѣ k выполняютъ это условіе. Въ противномъ-же случаѣ мы можемъ отбросить достаточное число начальныхъ звеньевъ для того, чтобы для остальныхъ это условіе выполнялось. Это всегда возможно, потому что k_n можетъ быть сдѣлано менѣе всякой данной величины, а $\frac{1}{r^{\nu_n}}$ остается всегда болѣе нѣкотораго отличнаго отъ нуля числа. Мы предположимъ сначала первое и обратимся къ формулѣ (3). Въ данномъ случаѣ

$$|b_n| = |k_n x^{\nu_n}| < \left(\frac{|x|}{r}\right)^{\nu_n} < \frac{|x|}{r} .$$

Съ другой стороны, въ силу условія (42), заключаемъ, на основаніи (20), что $|q_n| > 1$. Поэтому остатокъ ряда, выражающаго $\frac{p_n}{q_n}$, будетъ по абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ

$$\left(\frac{|x|}{r}\right)^m + \left(\frac{|x|}{r}\right)^{m+1} + \ldots + \left(\frac{|x|}{r}\right)^n$$

т. е. рядъ будетъ сходиться равномѣрно внутри круга, описаннаго изъ точки 0 радіусомъ r. Этотъ рядъ состоитъ изъ раціональныхъ функцій, не обращающихся въ ∞ въ разсматриваемой области, ибо $|q_n| > 1$. Поэтому, по извѣстной теоремѣ *), можно превратить его въ степенной рядъ, сходящійся внутри

*) Weierstrass. Zur Functionenlehre. Monatsber. d. K. Ak. zu Berlin. 1880. Также Weierstrass. Abhandlungen aus der Functionenlehre. Стр. 73.

той-же области. Обозначимъ величину этого ряда чрезъ u. Количество u будетъ изображать величину разсматриваемой дроби въ той-же области. Предположимъ теперь, что для выполненія условія (42) пришлось отбросить начальныя звенья. Приложивъ къ остальной дроби вышеуказанныя разсужденія, получимъ степенной рядъ u, выражающій эту дробь. Для полученія же начальной дроби, мы должны присоединить отброшенныя звенья и тогда, если число ихъ было μ, мы получимъ величину нашей дроби

$$y=\frac{p_{\mu-1}+up_{\mu-2}}{q_{\mu-1}+uq_{\mu-2}},$$

гдѣ p_μ и q_μ относятся къ дроби (41). Такимъ образомъ непрерывная дробь представляется въ видѣ частнаго двухъ степенныхъ рядовъ, сходящихся въ той-же области. Нули и безконечности этой дроби суть корни уравненій

$$p_{\mu-1}+up_{\mu-2}=0\ , \quad q_{\mu-1}+uq_{\mu-2}=0,$$

заключенные внутри разсматриваемой области. Число ихъ должно быть конечно внутри этой области по извѣстному свойству степенныхъ рядовъ. Итакъ функція y можетъ быть представлена внутри каждаго круга въ видѣ частнаго двухъ степенныхъ рядовъ, сходящихся въ этомъ кругѣ, причемъ различнымъ кругамъ могутъ отвѣчать различные степенные ряды. Поэтому функція y имѣетъ лишь полюсы внутри каждаго круга. Представимъ себѣ*) цѣлую аналитическую функцію G, которой корни служили бы полюсами для разсматриваемой функціи. Разсмотримъ произведеніе $yG=H$ и развернемъ его въ степенной рядъ. Легко видѣть, что этотъ рядъ сходится для всѣхъ конечныхъ значеній перемѣнной. Въ самомъ дѣлѣ, по свойству

*) Weierstrass. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Abh. der Akad. zu Berlin. 1876. Также въ Abhandlungen aus der Functionenlehre. 1886. Стр. 21.

степенныхъ рядовъ, мы получимъ тотъ-же рядъ какое-бы изъ выраженій для y мы ни выбрали. Возьмемъ выраженіе $y=\frac{u_n}{v_n}$, гдѣ u_n и v_n—степенные ряды, сходящіеся внутри круга радіуса r. Произведеніе uG т. е. $\frac{u_n G}{v_n}$ не обращается въ ∞ внутри круга радіуса r и потому можетъ быть развернуто въ степенной рядъ, сходящійся въ томъ-же кругѣ. Поэтому H имѣетъ кругъ сходимости, котораго радіусъ не меньше r. Но r— произвольное число. Слѣдовательно H—постоянно сходящійся рядъ. Поэтому

$$y=\frac{H}{G}$$

представляетъ частное двухъ цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій т. е. функцію съ одной существенно особенной точкой въ ∞.

12. Обратимся теперь къ дроби

$$\frac{c_1x}{1+\frac{c_2x}{1+.}},$$

гдѣ $\lim_{n=\infty} c_n=c\gtrless o$. Такъ какъ здѣсь $\lim_{n=\infty} c_nx=cx\gtrless o$, то, прилагая теорему члена 10, видимъ, что дробь сходится всякій разъ, когда cx не равно отрицательному числу, превышающему $\frac{1}{4}$ по абсолютной величинѣ т. е. дробь сходится внѣ продолженія прямой, соединяющей 0 съ $\frac{-1}{4c}$.

Условія, при которыхъ члены подходящей дроби имѣютъ предѣлы.

13. Мы переходимъ теперь къ выводу теоремъ, дающихъ условія существованія предѣловъ числителей и знаменателей

подходящихъ дробей. Для этой цѣли мы докажемъ прежде всего слѣдующую лемму. Сходимость ряда

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left|\frac{u_{k+2}-u_{k+1}-(u_{k+1}-u_k)z_k}{u_k}\right|,$$

гдѣ $|z_k|$ меньше нѣкоторой правильной дроби ε а m—цѣлое положительное число, служитъ достаточнымъ условіемъ существованія $\lim\limits_{n=\infty} u_n$. Введемъ обозначенія:

$$u_m=a_m,\quad u_n-u_{n-1}=a_n \text{ при } n>m,\quad |a_n|=\alpha_n,\quad |z_n|=\zeta_n$$

$$\alpha_m+\alpha_{m+1}+\ldots+\alpha_n=\sigma_n.$$

По условію рядъ

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left|\frac{a_{k+2}-a_{k+1}z_k}{a_m+a_{m+1}+\ldots+a_k}\right|$$

сходится. Но

$$\left|\frac{a_{k+2}-a_{k+1}z_k}{a_m+a_{m+1}+\ldots+a_k}\right|\geqq\frac{|\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\zeta_k|}{\sigma_k}.$$

Поэтому рядъ

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\zeta_k}{\sigma_k}$$

будетъ также сходиться. Слѣдовательно, положивъ

$$\omega_k=\frac{\alpha_{m+2}}{\sigma_m}+\frac{\alpha_{m+3}-\alpha_{m+2}\zeta_{m+1}}{\sigma_{m+1}}+\ldots+\frac{\alpha_{k+2}-\alpha_{k+1}\zeta_k}{\sigma_k},$$

видимъ, что $\lim\limits_{k=\infty}\omega_k$ существуетъ. Но

$$\omega_k>\frac{\alpha_{m+2}}{\sigma_m}+\left(\frac{\alpha_{m+3}}{\sigma_{m+1}}-\frac{\alpha_{m+2}}{\sigma_m}\zeta_{m+1}\right)+\ldots+\left(\frac{\alpha_{k+2}}{\sigma_k}-\frac{\alpha_{k+1}}{\sigma_{k-1}}\zeta_k\right)$$

или

$$\omega_k > (1-\zeta_{m+1})\frac{\alpha_{m+2}}{\sigma_m} + (1-\zeta_{m+2})\frac{\alpha_{m+3}}{\sigma_{m+1}} + \ldots + (1-\zeta_k)\frac{\alpha_{k+1}}{\sigma_{k-1}} + \frac{\alpha_{k+2}}{\sigma_k}$$

и, по условію, $\zeta_n < \varepsilon$. Слѣдовательно

$$\omega_k > (1-\varepsilon)\left[\frac{\alpha_{m+2}}{\sigma_m} + \frac{\alpha_{m+3}}{\sigma_{m+1}} + \ldots + \frac{\alpha_{k+2}}{\sigma_k}\right]. \qquad (43)$$

Съ другой стороны, изъ разложенія

$$e^x = 1 + x + \ldots ,$$

видно, что при $x > o$ будетъ

$$e^x > 1 + x \quad .$$

Поэтому

$$e^{\frac{\alpha_{n+2}}{\sigma_n}} > 1 + \frac{\alpha_{n+2}}{\sigma_n} > 1 + \frac{\alpha_{n+2}}{\sigma_{n+1}}$$

т. е.

$$e^{\frac{\alpha_{n+2}}{\sigma_n}} > \frac{\sigma_{n+2}}{\sigma_{n+1}} .$$

Отсюда

$$e^{\frac{\alpha_{m+2}}{\sigma_m} + \frac{\alpha_{m+3}}{\sigma_{m+1}} + \ldots + \frac{\alpha_{k+2}}{\sigma_k}} > \frac{\sigma_{k+2}}{\sigma_{m+1}} .$$

Поэтому, на основаніи (43), находимъ

$$\sigma_{k+2} < \sigma_{m+1} e^{\frac{\omega_k}{1-\varepsilon}} .$$

Такъ какъ ω_k имѣетъ предѣлъ, то отсюда видно, что съ возрастаніемъ k до ∞, σ_{k+2} остается меньше нѣкотораго числа.

Но количество σ_{k+2} возрастаетъ съ k, слѣдовательно оно имѣетъ предѣлъ. Это значитъ, что рядъ Σa_k т. е. $\Sigma|u_\kappa - u_{\kappa-1}|$ сходится. Поэтому, и подавно, сходится рядъ $\Sigma(u_\kappa - u_{\kappa-1})$ т. е. существуетъ $\lim\limits_{\kappa=\infty} u_\kappa$.

14. При помощи этой теоремы непосредственно доказывается слѣдующее предложеніе. Если количества c въ непрерывной дроби

$$\cfrac{c_1 x}{1+\cfrac{c_2 x}{1+\cdots}}$$

таковы, что рядъ $\Sigma|c_n|$ сходится, то числитель и знаменатель подходящей дроби имѣютъ предѣлы для всякаго конечнаго значенія x. Въ самомъ дѣлѣ, числитель и знаменатель подходящей дроби удовлетворяютъ уравненію

$$R_{n+2} = R_{n+1} + c_{n+2} x R_n \quad . \tag{44}$$

Отсюда

$$\frac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_n} = c_{n+2} x \ .$$

Поэтому, на основаніи предположенія, рядъ

$$\sum \left| \frac{R_{n+2} - R_{n+1}}{R_n} \right|$$

будетъ сходиться. Слѣдовательно, по члену 13 ($z = o$, $u = R$), будетъ существовать $\lim\limits_{n=\infty} R_n$.

15. Далѣе, если при $\lim\limits_{n=\infty} c_n = o$ рядъ $\Sigma|c_n|$ расходится, то можетъ случиться, что сходятся ряды $\Sigma|c_{2n+1} + c_{2n+2}|$ и $\Sigma|c_{2n} c_{2n+1}|$ или ряды $\Sigma|c_{2n} + c_{2n+1}|$ и $\Sigma|c_{2n-1} c_{2n}|$. Въ каждомъ изъ этихъ случаевъ числитель и знаменатель подходящей дроби имѣютъ предѣлы для всякаго конечнаго значенія x. Въ самомъ

дѣлѣ, положивъ въ (44) послѣдовательно $n=m, m-1, m-2$ и исключивъ изъ полученныхъ уравненій количества R_{m-1} и R_{m+1}, получимъ зависимость

$$R_{m+2}=[1+(c_{m+1}+c_{m+2})x]R_m-c_m\,c_{m+1}x^2R_{m-2}\ . \qquad (45)$$

Отсюда при $m=2n$, положивъ $R_{2n}=U_{n+1}$, находимъ

$$U_{n+2}=[1+(c_{2n+1}+c_{2n+2})x]U_{n+1}-c_{2n}c_{2n+1}x^2U_n\ .$$

Этой зависимости можно придать видъ

$$\frac{U_{n+2}-U_{n+1}-(U_{n+1}-U_n)z_n}{U_n}=(c_{2n+1}+c_{2n+2}-c_{2n}\,c_{2n+1}x)x,$$

гдѣ

$$z_n=(c_{2n+1}+c_{2n+2})x.$$

Такъ какъ для достаточно большихъ значеній n, при всякомъ x, $|z_n|$ будетъ меньше нѣкоторой правильной дроби, и, такъ какъ

$$|(c_{2n+1}+c_{2n+2}-c_{2n}c_{2n+1}x)x|\leqq|c_{2n+1}+c_{2n+2}|\,|x|+|c_{2n}c_{2n+1}|\,|x^2|\ ,$$

то, въ силу предположенной сходимости рядовъ

$$\Sigma|c_{2n+1}+c_{2n+2}| \text{ и } \Sigma|c_{2n}\,c_{2n+1}|$$

условія теоремы члена 13 будутъ выполнены и, слѣдовательно, $\lim\limits_{n=\infty} U_n$ т. е. $\lim\limits_{n=\infty} R_{2n}$ будетъ существовать. Но, по (44),

$$R_{2n-1}=R_{2n}-c_{2n}xR_{2n-2}\ ,$$

слѣдовательно $\lim\limits_{n=\infty} R_{2n-1}$ также существуетъ и равенъ $\lim\limits_{n=\infty} R_{2n}$ т. е. существуетъ $\lim\limits_{n=\infty} R_n$. Совершенно также должно поступать для доказательства теоремы, если дана сходимость рядовъ

$\Sigma|c_{2n}+c_{2n+1}|$ и $\Sigma|c_{2n-1}c_{2n}|$. Тогда должно въ (45) взять $m=2n-1$ и положить $R_{2n-1}=U_{n+1}$. Получится зависимость

$$U_{n+2}=[1+(c_{2n}+c_{2n+1})x]U_{n+1}-c_{2n-1}c_{2n}xU_n,$$

откуда совершенно также заключимъ, что $\lim\limits_{n=\infty} R_n$ существуетъ.

Иногда случается, что $c_{2n+1}+c_{2n+2}=o$ для всѣхъ значеній n. Тогда условіемъ существованія предѣловъ будетъ служить сходимость ряда $\Sigma|c_{2n}c_{2n+1}|$ или, такъ какъ $c_{2n+1}=-c_{2n+2}$, — сходимость ряда $\Sigma|c_{2n}c_{2n+2}|$. Подобнымъ же образомъ, если для всѣхъ значеній n имѣемъ $c_{2n}+c_{2n+1}=o$, то остается лишь условіе сходимости ряда $\Sigma|c_{2n-1}c_{2n}|$ или ряда $\Sigma|c_{2n-1}c_{2n+1}|$, ибо $c_{2n}=-c_{2n+1}$.

16. Переходимъ теперь къ случаю, когда $\lim\limits_{n=\infty} c_n=c\gtrless o$.

Предположимъ, что рядъ $\Sigma|d_n|$, гдѣ $d_n=1-\frac{c_n}{c}$, сходится. Тогда числитель и знаменатель $n^{\text{ой}}$ подходящей дроби, по раздѣленіи на

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4cx}}{2}\right)^n$$

имѣютъ предѣлы для всякаго значенія x внѣ продолженія прямой, соединяющей 0 съ $\frac{-1}{4c}$. Для доказательства этого предложенія воспользуемся преобразованіемъ перемѣнной

$$z=\frac{1-\sqrt{1+4cx}}{1+\sqrt{1+4cx}}, \quad x=-\frac{z}{c(1+z)^2},$$

гдѣ корень имѣетъ положительную вещественную часть. Если положимъ $\sqrt{1+4cx}=m+in$, то, по условію, будетъ $m\geqq 0$. Имѣемъ

$$|z|=\left|\frac{1-m-in}{1+m+in}\right|=\sqrt{\frac{1+m^2+n^2-2m}{1+m^2+n^2+2m}}$$

т. е., $|z|<1$, если $m>o$

и $|z|=1$, если $m=o$.

Въ послѣднемъ случаѣ

$$\sqrt{1+4cx}=ni\ ,$$

слѣдовательно

$$x=-\frac{1+n^2}{4c}$$

т. е. x лежитъ на продолженіи прямой, соединяющей точку 0 съ точкой $\frac{-1}{4c}$. Вслѣдствіе этого преобразованія числитель или знаменатель $n^{\text{ой}}$ подходящей дроби $R_n(x)$ обратится въ дробь. Положимъ

$$R_n(x)=\frac{r_n(z)}{(1+z)^{n+1}}\ .$$

Тогда для $r_n(z)$ получаемъ изъ (44) уравненіе

$$r_{n+2}=(1+z)r_{n+1}-(1-d_{n+2})zr_n\quad . \tag{46}$$

Это уравненіе можетъ быть написано такъ

$$\frac{r_{n+2}-r_{n+1}-(r_{n+1}-r_n)z}{r_n}=zd_{n+2}$$

Откуда, по члену 13, заключаемъ, что при $|z|<1$ существуетъ $\lim\limits_{n=\infty} r_n$. Но $|z|<1$ отвѣчаетъ значеніямъ x, указаннымъ въ теоремѣ. Слѣдовательно теорема доказана.

17. Если рядъ $\Sigma|d_n|$ расходится, то можетъ случиться, что при этомъ сходятся ряды $\Sigma|d_{n-1}+d_n|$ и $\Sigma|d_n d_{n-1}|$. Въ такомъ случаѣ утвержденіе предыдущей теоремы остается въ силѣ. Въ самомъ дѣлѣ, преобразуя зависимость (45) какъ и въ предыдущей теоремѣ, находимъ

$$r_{m+2}\{1+(d_{m+1}+d_{m+2})z+z^2\}r_m-(1-d_m)(1-d_{m+1})z^2r_{m-2}\ .$$

Этому равенству можно придать видъ

$$\frac{r_{m+2}-r_m-(r_m-r_{m-2})[(d_{m+1}+d_{m+2})z+z^2]}{r_{m-2}}=$$

$$[d_{m+1}+d_{m+2}+(d_m+d_{m+1})z-d_md_{m+1}z]z\ .$$

Положимъ $r_m=U_{k+1}$, гдѣ $k=\frac{m}{2}$ или $\frac{m+1}{2}$, смотря потому какое изъ этихъ чиселъ будетъ цѣлымъ. Тогда къ функціи U можно приложить теорему члена 13. Здѣсь будетъ

$$z_k=(d_{m+1}+d_{m+2})z+z^2\ .$$

Если $|z|<1$, то, такъ какъ $\lim\limits_{n=\infty} d_n=0$, можно выбрать m столь большимъ, чтобы $|z_k|$ было меньше нѣкоторой правильной дроби. Такъ какъ

$$|d_{m+1}+d_{m+2}+(d_m+d_{m+1})z-d_md_{m+1}z||z|$$

$$<|d_{m+1}+d_{m+2}||z|+|d_m+d_{m+1}||z^2|+|d_md_{m+1}||z^2|\ ,$$

и ряды $\Sigma|d_{n-1}+d_n|$ и $\Sigma|d_nd_{n-1}|$ по предположенію сходятся, то условія теоремы члена 13 выполняются и слѣдовательно существуетъ $\lim\limits_{n=\infty} r_{2n}$ и $\lim\limits_{n=\infty} r_{2n-1}$. Но, по (46),

$$(1+z)r_{n+1}=r_{n+2}+(1-d_{n+2})zr_n$$

и слѣдовательно оба предѣла равны между собой т. е. существуетъ $\lim\limits_{n=\infty} r_n$.

18. Приложимъ послѣднюю теорему къ разложенію

$$\frac{F(\alpha,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)}{F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)}$$

въ непрерывную дробь. Здѣсь

$$c_{2\nu}=-\frac{(\nu+\beta)(\nu+\gamma-\alpha)}{(2\nu+\gamma-1)(2\nu+\gamma)}$$

$$c_{2\nu+1}=-\frac{(\nu+\alpha)(\nu+\gamma-\beta)}{(2\nu+\gamma)(2\nu+\gamma-1)}$$

$$c=-\frac{1}{4}$$

$$d_{2\nu}=\frac{A\nu+B}{(2\nu+\gamma-1)(2\nu+\gamma)}$$

$$d_{2\nu+1}=\frac{-A\nu+C}{(2\nu+\gamma)(2\nu+\gamma+1)},$$

гдѣ

$$A=2(2\alpha-2\beta-1)$$

$$B=\gamma(\gamma-1)-4\beta(\gamma-\alpha)$$

$$C=\gamma(\gamma+1)-4\alpha(\gamma-\beta)\quad.$$

Такъ что суммы $d_{2\nu}+d_{2\nu+1}$ и $d_{2\nu-1}+d_{2\nu}$ имѣютъ видъ

$$\frac{G+H\nu}{I+K\nu+L\nu^2+M\nu^3}\,,$$

и произведенія $d_{2\nu}d_{2\nu+1}$ и $d_{2\nu-1}d_{2\nu}$ имѣютъ видъ

$$\frac{P+Q\nu+R\nu^2}{S+T\nu+U\nu^2+V\nu^3+W\nu^4}\quad.$$

Такъ какъ отношеніе каждаго изъ этихъ выраженій къ общему члену сходящагося ряда

$$\sum\frac{1}{\nu^2}$$

имѣетъ конечный, отличный отъ нуля предѣлъ, то условія требуемыя теоремою члена 17 выполняются и, слѣдовательно, дробь сходится во всей плоскости за исключеніемъ отрѣзка вещественной оси отъ 1 до ∞ такъ, что числитель и знаменатель $n^{ой}$ подходящей дроби, раздѣленные на

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n$$

имѣютъ предѣлы при $n=\infty$.

Дроби, отвѣчающія нисходящимъ рядамъ.

19. Обращаемся теперь къ дроби вида

$$\cfrac{k_1}{a_1x+b_1+\cfrac{k_2}{a_2x+b_2+\ddots}}$$

и предположимъ существованіе предѣловъ $\lim\limits_{n=\infty} k_n=k$, $\lim\limits_{n=\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n=\infty} b_n=b$. Приведя данную дробь къ виду (8), получимъ дробь

$$\cfrac{\cfrac{k_1}{a_1x+b_1}}{1+\cfrac{\cfrac{k_2}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)}}{1+\ddots}}.$$

Приложивъ сюда теорему члена 10, видимъ, что дробь наша сходится всякій разъ, когда x не удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{k}{(ax+b)^2}=-\frac{1+t^2}{4},$$

гдѣ положительное количество t^2 можетъ измѣняться отъ 0 до ∞. Откуда видно, что исключаемыя значенія x будутъ

$$x=\frac{-b\pm 2\vartheta\sqrt{-k}}{a},$$

гдѣ

$$1\geqq\vartheta\geqq o$$

т. е. образуютъ прямолинейный отрѣзокъ, дѣлящійся въ точкѣ $\frac{-b}{a}$ пополамъ, имѣющій длину $\frac{4\sqrt{|k|}}{|a|}$ и направленіе такое, какъ $\frac{\sqrt{-k}}{a}$.

Въ частности, если $b=o$ и $\frac{2\sqrt{-k}}{a}=1$, исключаемый отрѣзокъ представляетъ часть вещественной оси отъ -1 до $+1$. Это будетъ имѣть мѣсто при $k=-\frac{a^2}{4}$. Если при этомъ $a=1$, то $k=-\frac{1}{4}$. Этотъ послѣдній случай имѣемъ въ извѣстномъ примѣрѣ

$$\cfrac{1}{z-\cfrac{\frac{1.1}{1.3}}{z-\cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{z-\cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{z-.}}}},$$

гдѣ

$$k=\lim_{n=\infty}\frac{-n^2}{(2n-1)(2n+1)}=-\frac{1}{4}.$$

Поправка къ статьѣ
О сходимости непрерывныхъ дробей.
И. В. Слешинскаго.

А. А. Марковъ обратилъ мое вниманіе на то, что неравенства П. Л. Чебышева, доказаны А. А. Марковымъ впервые не въ 1884 году, а въ 1883 году въ «Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества».

И. Слешинскій.

Изданія Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей въ Одессѣ:

Томъ I и II. Распроданы.

Томъ III. Вып. 1-й и 2-й. (См. XII т. «Записокъ» и раньше).

Томъ IV. Вып. 1-й и 2-й (См. XIII т. «Записокъ» и раньше).

Томъ V. Вып. 1-й и 2-й.

Томъ VI. Вып. 1-й *И. Синцовъ.* О мѣловыхъ губкахъ Сарат. губ. (съ 6 табл.). *О. Мечникова.* О тазовой и плечевой дугѣ хрящевыхъ рыбъ. *Е. Клименко.* Матеріалы для исторіи молочной и пировиноградной кисл. *В. Шманкевичъ.* Объ отношеніи нѣкоторыхъ безцвѣтныхъ Flagellata къ водорослямъ и грибамъ (съ табл. рис.) 1879 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *Н. Забаринскій.* Дополненіе къ монографіи N. Kleinenberg'a «Hydra» (съ 2 табл.). *Ил. Мечниковъ.* Матеріалы къ ученію о вредныхъ насѣкомыхъ юга Россіи (личинка Anisoplia). *В. Репяховъ.* Къ морфологіи мшанокъ (съ 6 табл.). *С. Танатаръ.* О строеніи фумаровой и малеиновой кисл. 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Приложен. къ VI т. Записокъ: *Flora chersonensis E. Lindemann'a.* 2 т. Цѣна 1 и 2 т. 4 р.

Томъ VII. Вып. 1-й. *Л. Ришави.* Альгологическія изслѣдованія (съ табл.). *Н. Спиро.* Матеріалы для изученія образованія желчи. *П. Меликовъ.* О производныхъ акриловой кислоты. *И. Синцовъ.* Описаніе нѣкоторыхъ видовъ мезозойскихъ окаменѣлостей изъ Симбирской и Саратовской губерн. (съ 2 табл.). *Его-же.* Описаніе новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи (съ табл.). 1880 г. Цѣна 1 р. 50 к.

Вып. 2-й. *Л. Ришави.* Матеріалы для лихенологической флоры Крыма. *Н. Бучинскій.* Къ вопросу о развитіи дождеваго червяка (съ 3 таблицами). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо-восточной части Херсонск. губ. (съ табл.) 1881 г. Цѣна 1 р.

Томъ VIII. Вып 1-й. *Д. Кожевниковъ.* Объ анатомическомъ строеніи лепестковыхъ цвѣточныхъ покрововъ (съ 6 табл.). *Р. Прендель.* Изслѣдованіе кристаллическихъ породъ, развитыхъ въ бассейнѣ р. Бававлука и въ верховьяхъ Саксагани (съ картой и 4 табл.). *А. Ковалевскій.* Къ исторіи развитія хитоновъ. *С. Танатаръ.* О хлорсубститутахъ фумаровой и малеиновой кисл. *И. Деппъ.* Замѣтки любителя о жизни Макроподъ. *А. Геричъ.* Объ электрическихъ явленіяхъ, наблюдаемыхъ при диффузіи нѣкоторыхъ жидкостей. *И. Красильщикъ.* Къ исторіи развитія и систематикѣ р. Polytoma Ehr. (съ 3 табл.). *В. Репяховъ.* О личинкѣ Polygordius flavocapitatus (съ табл.). 1882 г. Цѣна 3 руб.

Вып. 2-й. *Ф. Каменскій.* Матеріалы для морфологіи и біологіи Monotropa Hypopitis L. и нѣкоторыхъ другихъ сапрофитовъ (съ 3-мя таблиц.). *Р. Прендель.* Матеріалы для геологіи сѣверо-восточной части Херсонской губ. *Н. Головкинскій.* Результаты геологическихъ изысканій и развѣдокъ на ископаемый уголь въ окрестностяхъ Балаклавы (съ 5 рис. въ текстѣ, картой и 2 табл.). *Н. Спиро.* О нѣкоторыхъ явленіяхъ такъ называемаго животнаго магнитизма (гипнотизма) съ 3 табл. 1883 г. Цѣна 2 руб.

Томъ IX. Вып. 1-й. *И. Синцовъ.* Описананій новыхъ и малоизслѣдованныхъ формъ раковинъ изъ третичныхъ образованій Новороссіи. Ст. 5 я (съ табл.). *И. Миклашевскій.* Матеріалы для геологіи Глуховскаго уѣзда. Черниговск. губ. (съ табл.). *Н. Андрусовъ.* Замѣтка о геологическихъ изслѣдованіяхъ въ окрестностяхъ г. Керчи. *А. Клоссовскій.* Инструкція для наблюденія осадковъ, грозъ и града. *С. Переяславцева.* О развитіи коловратокъ (съ табл.). 1884 г. Цѣна 1 р.

Вып. 2 й. *Н. Андрусовъ.* Геологическія изслѣдованія на Керченскомъ полуостровѣ, произведенныя въ 1882 и 1883 г. *Л. Рейнгардъ.* Альгологическія изслѣдованія. Матеріалы для морфологіи и систематики водорослей Чернаго моря съ 5 политипажами и атласомъ изъ 11 табл. рисунковъ. 1885 г. Цѣна 3 р.

Томъ X. Вып. 1-й. *И. Акинфіевъ.* Списокъ цвѣтковыхъ растеній г. Бѣлграда. *Его-же.* Очеркъ флоры г. Екатеринослава (съ картой). *П. Меликовъ.* О производныхъ изомерныхъ кротоновыхъ кислотъ. *Н. Бучинскій.* Краткій очеркъ фауны лимановъ Новороссійскаго края. *Л. Ришави.* Къ вопросу о такъ называемомъ гальванотропизмѣ. *В. Хмълевскій.* Матеріалы для флоры водорослей Бессарабской губ. *Н. Дорофѣевъ.* Матеріалы для альгологической

флоры окрестностей Кишинева (и отчасти Кишиневскаго уѣзда). Сообщеніе *Н. Спиро*, по поводу работы Ш. Рише, надъ такъ называемымъ мысленнымъ внушеніемъ (suggestion mentale) и предварительное сообщеніе *Н. Бучинскаго* о развитіи Parapodopsis cornuta Czern. 1885 г. Цѣна 1 р. 50 коп.

Вып. 2-й. *В. Репяховъ.* Къ анатоміи и исторіи развитія Dinophilus gyrociliatus O. Schmidt съ 4 табл. рис. *С. Переяславцева.* Protozoa Чернаго моря съ 3 табл. рис.

Томъ XI. Вып. 1-й. *Н. Моринъ.* Къ исторіи развитія рѣчнаго рака. *В. Хмѣлевскій.* Къ морфологіи Haplotrichum roseum Corda. *А. Ковалевскій* и *М. Шульгинъ.* Къ исторіи развитія кавказскаго скорпіона (Androctonus ornatus). *В. Хавкинъ.* Къ вопросу о питаніи Эвгленъ и Астазій и значеніи у нихъ ротоваго аппарата. *Н. Красильщикъ.* О грибныхъ болѣзняхъ у насѣкомыхъ. *Р. Прендель.* Кристаллическія породы горы Кастель и прилегающихъ къ ней мѣстностей. *Н. Красильщикъ.* Матеріалы къ естественной исторіи и систематикѣ флагеллатъ.

Вып. 2-й. *А. Клоссовскій.* Метеорологическія наблюденія, произведенныя въ Одессѣ, а также на дождевыхъ станціяхъ Херсонской губерніи. Май—августъ 1886 г. *Н. Андрусовъ.* Къ геологіи Керченскаго полуострова. Часть II. *М. Шульгинъ.* Строеніе цереброспинальной системы амфибій и рептилій. Цѣна 2 руб. 50 коп.

Томъ XII. Вып. 1-й. *Н. Умовъ.* Законы растворимости нѣкоторыхъ солей. *М. Балашева.* О вліяніи внѣшней среды и преимущественно объема воднаго бассейна на нѣкоторыхъ изъ слизняковъ (съ 1 таб. рис.). *А. Клоссовскій.* О колебаніяхъ температуры и плотности морской воды вблизи Одессы (съ 1 таб. рис.). *Г. Вольтке.* Къ исторія развитія Urospora mirabilis Aresch (съ 2 таб. рис.). *Р. Савельевъ.* Свойства психрометра (съ 1 таб. рис.). *О. Нусбаумъ.* Къ эмбріологіи Mysis Chameleo Thompson (съ 8 таб. рис. и 3 полит. въ текстѣ). *В. Хавкинъ.* Законы наслѣдственности въ примѣненіи къ одноклѣтнымъ организмамъ. Цѣна 3 руб.

Вып. 2-й. *Р. Прендель.* О вилуитѣ (Съ таб. рис.). *Н. Кульчицкій.* Матеріалы для изученія кишечнаго канала рыбъ. *А. Клоссовскій.* Краткій отчетъ о наблюденіяхъ надъ осадками и грозами, произведенными на югѣ Россіи съ 1 января по 31 іюля 1887 г. *И. Синцовъ.* О водоносныхъ слояхъ Кишинева. *Его же.* Нѣсколько словъ о степныхъ отложеніяхъ лѣваго берега Волги между кол. Ровнымъ и сел. Духовницкимъ. *Его же.* Замѣтки о новыхъ пліоценовыхъ отложеніяхъ Южной Россіи. Цѣна 2 руб.

Томъ XIII. Вып. 1-й. П. *Бучинскій.* Левъ Семеновичъ Ценковскій (біографическій очеркъ съ портретомъ). *В. Заленскій.* Рѣчь, посвященная памяти Л. С. Ценковскаго. *Л. Ришави.* То-же. *Г. Скадовскій*—То-же. *Н. Карвацкій.*—То-же. *А. Клоссовскій.* Осадки Юго-Западной Россіи, ихъ распредѣленіе и предсказаніе (съ 6 табл.) *В. Хмѣлевскій.* Къ вопросу о копуляціи ядеръ при половомъ процессѣ у грибовъ. *Его-же.* Къ вопросу о всасываніи воды надземными частями. *И. Синцовъ.* Объ оренбургско-самарской юрѣ. *С. Танатаръ.* Дѣйствіе іодистаго метилена на малоновый эфиръ. *М. Балашева.* О вліяніи внѣшней среды и преимущественно температуры воды и воздуха на Planorbis Vertia.

Вып. 2-й Некрологъ. *Н. Кеппенъ.* Наблюденія надъ щупальцевыми инфузоріями (Tentaculifera) съ 3-мя таблицами. *С. Танатаръ.* О хлорсубститутахъ фумаровой и малеиновой кислотъ. *А. Клоссовскій.* Краткій отчетъ о дѣятельности метеорологической обсерваторіи Императорскаго Новороссійскаго Университета съ 1-го января 1886 года по 1 сентября 1888 года. *Н. Моринъ.* Наблюденія надъ развитіемъ пауковъ. (съ 4 табл. и 3 рисунками въ текстѣ). *Н. Кеппенъ.* Замѣтка объ эмбріональныхъ шарахъ Podophrya quadripartita. *С. Танатаръ.* Адипомалоновая кислота изъ бромоизоянтарной.

Томъ XIV. Вып. 1-й. *Н. Умовъ.* Диффузія воднаго раствора поваренной соли. *Е. Клименко* и *Г. Пекаторосъ.* О вліяніи HCl и хлористыхъ металловъ на фотохимическое разложеніе хлорной воды. А. *Ковалевскій.* О выдѣлительныхъ органахъ безпозвоночныхъ животныхъ. *П. Зелинскій.* Къ вопросу объ изомеріи въ тіофеновомъ ряду. *A. Klossowsky.* L'anémographe de M. Timtchenko. А. *Клоссовскій.* Матеріалы для разработки вопроса о заносахъ. А. *Н. Эйсмондъ.* Списокъ дикорастущихъ растеній въ окрестностяхъ г. Кишинева и ст. Ю. З. Ж. Д. Раздѣльной, собранныхъ весною 1888 г. *И. Пекарскій.* О перитрахеальныхъ клѣткахъ насѣкомыхъ.

Складъ изд. при Новороссійск. Обществѣ Естествоиспыт., въ Одессѣ.






3 2044 102 937 034